Exercícios da monitoria

14/10/2019

5.9) Uma partícula de massa m é colocada num poço esférico finito:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

Calcule o estado fundamental resolvendo a equação radial com $l = 0$. Demonstre que não há nenhum estado ligado se $V_0 \leq \pi^2\hbar^2/8ma^2$.

Conforme discutimos em sala, o primeiro passo é escrever e resolver a equação radial para $u(r) = rR(r)$ para fora e dentro do poço:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}u_D'' - V_0 u_D = E u_D \;\Rightarrow\; u_D'' = -k_D^2 u_D,\; k_D = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar},$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m}u_F'' = E u_F \;\Rightarrow\; u_F'' = k_F^2 u_F,\; k_F = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar},$$

onde, para um estado ligado, $E < 0$. A solução é

$$u_D(r) = A\sin(k_D r) + B\cos(k_D r)$$
$$u_F(r) = C\exp(k_F r) + D\exp(-k_F r)$$

As condições de contorno são:

- $u_D(0) = rR(r)|_{r=0} = 0 \Rightarrow B = 0;$
- $u_F(\infty) = 0 \Rightarrow C = 0;$
- $u_D(a) = u_F(a) \Rightarrow A\sin(k_D a) = D\exp(-k_F a);$
- $u_D'(a) = u_F'(a) \Rightarrow Ak_D\cos(k_D a) = -Dk_F\exp(-k_F a);$

Dividindo as duas últimas, temos que $\tan(k_D a) = -\frac{k_D}{k_F}$. Definindo $z \equiv k_D a$ e escrevendo

$$k_D^2 = \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2} = -k_F^2 + \frac{2mV_0}{\hbar^2},$$

temos

$$-\cot z = \frac{k_F}{k_D}\frac{a}{a} = \frac{1}{z}\sqrt{\left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right) - z^2} = \sqrt{\left(\frac{z_0}{z}\right)^2 - 1},\quad z_0^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}.$$

Como a raiz quadrada é positiva, a cotangente deve ser negativa, o que acontece para $z > \pi/2$. Além disso, para uma solução real, a raiz deve ter argumento positivo, ou seja, $z_0 \geq z > \pi/2$. Portanto, se $z_0 \leq \pi/2$, não há estados ligados. Isso implica que um poço com $V_0 \leq \pi^2\hbar^2/8ma^2$

não tem estados ligados.

6.1) Usando a expansão de uma onda plana em harmônicos esféricos

$$e^{i\vec{k}.\vec{r}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} i^l j_l(kr)[Y_l^m(\theta_k, \varphi_k)]^* Y_l^m(\theta, \varphi),$$

onde (θ_k, φ_k) são os ângulos em coordenadas esféricas do vetor $\vec{k}$, junto com a representação da $\delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$ em coordenadas esféricas:

$$\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int k^2 dk d\Omega_k e^{i\vec{k}.(\vec{r}-\vec{r}')},$$

onde $d\Omega_k = \sin\theta_k d\theta_k d\varphi_k$
a) Obtenha a condição de ortogonalidade:

$$\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{2}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} (-1)^l [Y_l^m(\theta', \varphi')]^* Y_l^m(\theta, \varphi) \int_0^{\infty} dk k^2 j_l(kr) j_l(kr')$$

Escrevendo

$$e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'} = \left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'}\right)^* = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} (-i)^l j_l(kr') Y_l^m(\theta_k, \varphi_k) \left[Y_l^m(\theta', \varphi')\right]^*,$$

temos

$$\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{(4\pi)^2}{(2\pi)^3} \int k^2 dk d\Omega_k \sum_{l,a=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \sum_{b=-a}^{a} i^l (-i)^a j_a(kr') j_l(kr)$$
$$Y_l^m(\theta, \varphi) \left[Y_l^m(\theta_k, \varphi_k)\right]^* Y_a^b(\theta_k, \varphi_k) \left[Y_a^b(\theta', \varphi')\right]^*,$$

Os harmônicos esféricos são normalizados:

$$\int d\Omega_k \left[Y_l^m(\theta_k, \varphi_k)\right]^* Y_a^b(\theta_k, \varphi_k) = \delta_{al}\delta^{bm},$$

o que mata os somatórios em a e b. Assim,

$$\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{2}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left[Y_l^m(\theta', \varphi')\right]^* Y_l^m(\theta, \varphi) \int_0^{\infty} dk k^2 j_l(kr) j_l(kr').$$

b) Mostre que se $\vec{k}.\vec{r} = kz$, ou seja, se $\vec{k}//\mathcal{O}z$, entao

$$e^{ikz} = e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos\theta)$$

que é conhecido como a fórmula de Rayleigh.

Se $\vec{k}$ aponta no eixo z, a onda independe do ângulo φ, então, por simetria, o único m que não é cancelado é $m = 0$, de modo que

$$Y_l^0(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta).$$

Assim,

$$e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos\theta) P_l(\cos\theta_k).$$

Porém, $\theta_k = 0 \Rightarrow \cos\theta_k = 1 \Rightarrow P_l(\cos\theta_k) = 1$. Então,

$$e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos\theta)$$