Lista 3

① Duas variáveis que tomam valores nos reais tem distribuição conjunta normal

$$P(x,y|\rho) = N \exp -\frac{1}{2C}(x^2 - 2\rho xy + y^2)$$

onde ρ é um parâmetro positivo dado, entre 0 e 1.

1. Encontre $C(\rho)$ para que as marginais sejam gaussianas padrão $P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{1}{2}x^2$,$P(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{1}{2}y^2$.
2. Encontre a normalização $N(\rho)$
3. Encontre os valores esperados $\mathbb{E}(x|\rho)$,$\mathbb{E}(y|\rho)$ e $\mathbb{E}(xy|\rho)$. Interprete o significado de C.

Dica: Use as regras do produto e da soma.

② Considere uma variável aleatória Y definida como a soma de N variáveis: $Y_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ Suponha que cada X_i seja independente das outras e sejam uniformemente distribuidas no intervalo $[0, 1]$. Encontre a função caracterísitica de Y_2 e de Y_3. Você pode encontrar a distribuição de probabilidades dessas variáveis? Fica como sugestão fazer numericamente o gráfico das distribuições para $N = 2$, 3, 4, e 5.

③ Considere N variáveis aleatórias independentes entre si X_1... X_N e identicamente distribuidas, que tomam valores nos reais e tem distribuição normal $P(X_i|\mu, \sigma)$. Defina $W_N = \frac{1}{N}\sum_i^N X_i$

1. Obtenha a função característica da variável aleatória W_N.
2. Encontre a densidade de probabilidade de W_N.
3. Encontre a relação entre as entropia das variáveis aleatórias X_i e a W_N. Obtenha a entropia de W_N como função de N, μ e σ.

④ A entropia associada a uma distribuição de probabilidade p_i é dada por $S = -\sum_i p_i \ln p_i$. (a) Considere dois sistemas . O sistema A tem associada a distribuição p_i de ser encontrado no estado i e o sistema B, a distribuição q_k de ser encontrado no estado k. O sistema C composto por A e B terá distribuição P_{ik}, para o estado rotulado pelos dois indices i e k . Se os sistemas são estatisticamente independentes, encontre desigualdades relacionando as entropia S_A, S_B e S_c? Mostre os cálculos. Use (prove) uma desigualdade entre $\ln(1+x)$ e x.

(b)Um dado tem três faces com os números $k = 0, 1, 2$ estampados. É dado que o valor médio é $\overline{k} = \sum_{k=0,1,2} kp_k = d$. Calcule a distribuição de probabilidades que deve ser atribuida com base no princípio de máxima entropia, levando em conta que a informação dada e o fato que $\sum_k p_k = 1$. Elimine o multiplicador de Lagrange λ_1 associado à normalização e encontre o valor do outro λ_2 (não deve cair em nada mais complicado que uma equação de segundo grau, dica $\exp(-\lambda_2) = x$) . Discuta o que ocorre se $0 < d < 2$.

5. Um sistema de N átomos com spin 1 clássico e que não interagem entre si, estão na presença de um campo magnético h. Temos a informação que o hamiltoniano tem valor esperado $\langle \mathcal{H} \rangle = E$, onde $\mathcal{H} = -D \sum_i^N s_i^2 - \mu_0 h \sum_i^N s_i$. Cada variável de spin s_i pode tomar valores $\pm 1, 0$ e $i = 1, \cdots, N$

1. Deixe claro **os vínculos** impostos pela informação disponível. Maximize a entropia de Shannon e encontre uma expressão para a distribuição de probabilidades dos spins $\{s_i\}$.
2. Elimine o multiplicador de Lagrange associado ao vínculo de normalização e encontre a expressão para a função de partição $Z(\beta, h)$.
3. Encontre uma expressão que permita calcular o(s) multiplicador(es) de Lagrange restante(s) como função de E.
4. Calcule a entropia de Boltzman do sistema a temperatura β^{-1}.
5. Encontre uma expressão para a magnetização e para a sua derivada com respeito a campo, a suscetibilidade magnética, como função da temperatura e campo magnético.