

3ª Prova — Eletromagnetismo II — Diurno
Duração: 120 min

Q1 [5.0]: Vimos em sala de aula, e também em uma Lista de Exercícios, que uma onda plana $\psi_{in} = \psi_0 e^{ikz}$ que incide num objeto na origem ($r = 0$) gera uma onda espalhada que descrevemos, no limite $r \rightarrow \infty$, como:

$$\psi_{esp} = \psi_0 f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r},$$

onde assumimos simetria axial (ou seja, nada depende do ângulo azimutal φ). Também vimos que, utilizando as ondas parciais esféricas, podemos escrever o fator angular dessa onda espalhada como:

$$f(\theta) = \frac{2}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} e^{i\delta_\ell} \sin \delta_\ell \frac{2\ell+1}{2} P_\ell(\cos \theta), \quad (1)$$

onde δ_ℓ são fases determinadas pelas condições de contorno do problema, e $P_\ell(\cos \theta)$ são os Polinômios de Legendre.

(a) **(2.0)** Uma das aplicações desse resultado é na obtenção da *seção de choque diferencial*:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2,$$

onde $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$. Mostre que a seção de choque total pode ser escrita como:

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell} (2\ell+1) \sin^2 \delta_\ell.$$

Dica: veja as propriedades dos P_ℓ no formulário.

(b) **(3.0)** No Eletromagnetismo, o espalhamento de luz é muito bem aproximado pela descrição acima, com a ressalva de que o modo $\ell = 0$ nunca aparece. Em particular, no caso de espalhamento por partículas muito pequenas, de tamanho típico a , temos que o termo dominante é $\ell = 1$, com $\delta_1 \simeq -(ka)^3/3$. Use esse resultado para explicar por que o céu é mais azul durante o dia, enquanto no final do dia o céu se torna mais avermelhado na direção em que o Sol se põe.

Resposta

(a) Temos que:

$$\sigma = \int d\Omega f(\theta) f^*(\theta) = \int d\Omega \left[\frac{2}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} e^{i\delta_\ell} \sin \delta_\ell \frac{2\ell+1}{2} P_\ell(\cos \theta) \right] \times \left[\frac{2}{k} \sum_{\ell'=0}^{\infty} e^{-i\delta_{\ell'}} \sin \delta_{\ell'} \frac{2\ell'+1}{2} P_{\ell'}(\cos \theta) \right] \quad (2)$$

Pela ortogonalidade dos polinômios de Legendre temos que:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \times \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_\ell(\cos \theta) P_{\ell'}(\cos \theta) = 2\pi \times \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'}$$

Substituindo de volta na expressão para σ temos o resultado citado no enunciado.

(b) Para partículas muito pequenas, temos que $ka \ll 1$. A seção de choque fica então:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \times (2 \times 1 + 1) \sin^2 \delta_1 \simeq \frac{4\pi}{k^2} \times 3 \times \left(\frac{(ka)^3}{3} \right)^2 = \frac{4\pi a^2}{3} (ka)^4$$

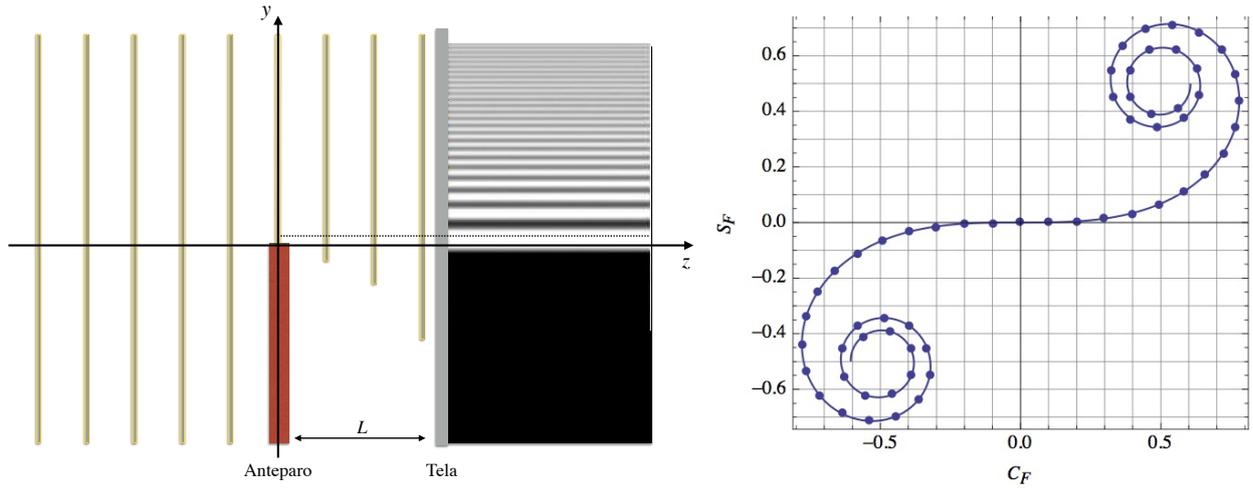


Figura 1: Esquerda: uma onda plana incide sobre um anteparo limitado ao semi-plano infinito $y < 0$, sendo depois projetada na tela. Direita: cosseno $C_F(u)$ e seno $S_F(u)$ de Fresnel. Os pontos marcam intervalos de $\Delta u = 0.1$, com $u = 0$ sendo a origem. A posição $\{C_F = -1/2, S_F = -1/2\}$ corresponde a $u \rightarrow -\infty$, e a posição $\{C_F = 1/2, S_F = 1/2\}$ corresponde a $u \rightarrow \infty$.

Isso significa que os comprimentos de onda *menores* (luz mais azul) são *mais* espalhados do que os comprimentos de onda mais longos. Portanto, quando a luz tem que atravessar uma coluna de ar maior (como é o caso da luz que chega do pôr-do-sol, que vem rente à superfície da Terra), a luz mais azul foi muito mais espalhada para outras direções, e a luz vermelha foi menos espalhada e torna-se a componente principal da luz solar que chega até nós. A contrapartida desse fenômeno é que, durante o dia, a luz é espalhada na atmosfera e desce até nós. Como essa luz espalhada é predominantemente azul, vemos um céu azul.

Q2 [6.0]: Uma onda plana monocromática $\psi_0 e^{ikz}$ incide normalmente em um anteparo que ocupa todo o plano $(x', y' < 0)$, como na figura abaixo. A luz é projetada numa tela a uma distância L do anteparo. A intensidade da luz na tela obedece um padrão de difração $I(y)$, aproximadamente como está indicado no painel da esquerda da figura abaixo (veja próxima página).

Vimos durante as aulas que a difração de uma onda por uma abertura S_0 pode ser descrita através da integral de Kirchoff:

$$\psi(x, y) \simeq -i \frac{k \psi_0}{2\pi} \frac{e^{i\phi}}{r} \int_{S_0} dx' dy' e^{i \frac{k}{2r} [(x'-x)^2 + (y'-y)^2]}, \quad (3)$$

onde $r = (x^2 + y^2 + L^2)^{1/2}$. No caso de uma janela S_0 retangular (a luz só passa entre $x'_{min} \leq x' \leq x'_{max}$ e $y'_{min} \leq y' \leq y'_{max}$), vimos em sala de aula que essa integral se torna:

$$\psi(x, y) = -i \frac{k \psi_0}{2\pi} \frac{e^{i\phi}}{r} \frac{\pi r}{k} [F(u_x^+) - F(u_x^-)] [F(u_y^+) - F(u_y^-)],$$

onde $F(u) = C_F(u) + iS_F(u)$ é dado em termos das funções seno (S_F) e cosseno (C_F) de Fresnel, com $u_x^+ = \sqrt{\frac{k}{\pi r}} (x'_{max} - x)$, $u_x^- = \sqrt{\frac{k}{\pi r}} (x'_{min} - x)$, e analogamente para u_y^\pm . As funções seno e cosseno de Fresnel estão representadas na figura (próxima página, painel da direita).

Para responder as questões abaixo você vai precisar dos limites assintóticos do Seno e Cosseno de Fresnel, que podemos escrever:

$$\lim_{u \rightarrow 0} F(u) \approx u + \mathcal{O}(u^3) \quad , \quad \lim_{u \rightarrow \infty} F(u) \approx \frac{1}{2}(1 + i) + \mathcal{O}(u^{-1}).$$

Considerando o anteparo descrito acima, para o qual a luz passa em todo o semi-plano $y' > 0$, responda:

- (a) **(1.5)** Qual é a intensidade da onda projetada na tela como função de y , para qualquer valor de y ? Expresse essa intensidade em termos da intensidade da onda incidente ($I_0 = |\psi_0|^2$).
- (b) **(1.0)** Qual o valor de $I(y = 0)$? Expresse sua resposta em termos de I_0 .
- (c) **(1.5)** Qual a intensidade da luz projetada na tela quando $y \rightarrow \infty$? E quando $y \rightarrow -\infty$? Justifique suas respostas com *cálculos*, utilizando os limites assintóticos acima.
- (d) **(2.0)** O gráfico da direita da Fig. 1 mostra as funções seno e cosseno de Fresnel como funções do parâmetro u , em intervalos de $\Delta u = 0.1$. Encontre (graficamente) a posição y_1 que marca o primeiro máximo da intensidade da luz projetada na tela (linha pontilhada no diagrama da esquerda da Fig. 1). Qual o valor dessa intensidade máxima $I_1 = I(y_1)$? Expresse o resultado em termos de I_0 .
- (e) **(1.0)** Explique de modo sucinto o que é a aproximação de Fraunhofer para a integral de Kirchoff, Eq. (2), e por que ela falha para descrever esta situação física.

Resposta

(a) Levando em conta que quando $x \rightarrow \infty$ temos $C_F = S_F = 1/2$, a função de onda fica expressa como:

$$\psi(y) = \frac{-i\psi_0 e^{i\phi}}{2} [1 + i] \left[\frac{1}{2}(1 + i) + C_F \left(\sqrt{\frac{k}{\pi r}} y \right) + iS_F \left(\sqrt{\frac{k}{\pi r}} y \right) \right]. \quad (4)$$

(b) Quando tomamos $y \rightarrow 0$ temos $C_F = S_F = 0$, e assim:

$$\psi(y = 0) = \frac{-i\psi_0 e^{i\phi}}{2} [1 + i] \left[\frac{1}{2}(1 + i) \right]. \quad (5)$$

Portanto,

$$I(y = 0) = |\psi(y = 0)|^2 = |\psi_0|^2 \left(\frac{1 + i}{2} \right)^2 \times \left(\frac{1 - i}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} |\psi_0|^2. \quad (6)$$

(c) Quando tomamos $y \rightarrow \infty$ temos $C_F = S_F = 1/2$. Portanto:

$$\psi(y \rightarrow \infty) = \frac{-i\psi_0 e^{i\phi}}{2} [1 + i] [1 + i] = \psi_0 e^{i\phi}, \quad (7)$$

o que significa que $I(y \rightarrow \infty) = |\psi_0|^2 = I_0$. Ou seja, muito acima da fresta a onda incidente segue sem obstrução alguma e termina projetada na tela, com a intensidade original I_0 .

Por outro lado, Quando tomamos $y \rightarrow -\infty$ temos $C_F = S_F = -1/2$. Portanto:

$$\psi(y \rightarrow -\infty) = \frac{-i\psi_0 e^{i\phi}}{2} [1 + i] \times 0 = 0, \quad (8)$$

o que significa que $I(y \rightarrow -\infty) = 0$. Ou seja, muito abaixo da fresta nenhuma luz está passando, e a intensidade é nula.

(d) A intensidade será máxima quando a amplitude (o módulo) da função de onda atingir um máximo. Isso ocorre quando $|(1 + i)/2 + C_F(u) + iS_F(u)|^2 = |C_F(u) + iS_F(u) - [(1 + i)/2]|^2$ é máximo. Ou seja, a questão é: qual ponto nesse gráfico corresponde à maior distância ao ponto $\{C_F, S_F\} = \{-1/2, -1/2\}$? Claramente, esse ponto pode ser encontrado traçando uma reta inclinada a 45° desde o centro da espiral de baixo, passando pelo centro da espiral de cima.

Olhando para o gráfico da “espiral de Cornu” (Fig. 2, painel da direita) vemos que o esse ponto está aproximadamente em $u_1 \simeq 1.35$, onde $C_F(u_1) \simeq S_F(u_1) \simeq 0.65$ (Obs: eu aceitarei qualquer resposta que esteja próxima desses valores, desde que a argumentação seja correta.)

O próximo ponto onde teremos um máximo vai acontecer quando a espiral der uma volta completa e cruzar novamente a reta a 45° . Isso deve ocorrer para $u_2 \simeq 2.45$, onde $C_F(u_2) \simeq S_F(u_2) \simeq 0.6$. E assim por diante.

A posição y_1 é, portanto, dada por $u_1 = \sqrt{k/\pi r} y_1 \simeq 1.35$, ou seja, $y_1 \simeq 1.35 \sqrt{\pi r/k} = 1.35 \sqrt{\lambda r/2}$.

A amplitude da onda naquele ponto é:

$$\psi(y_1) \simeq \frac{-i\psi_0 e^{i\phi}}{2} [1+i] [0.5(1+i) + 0.65(1+i)] = 1.15 \psi_0 e^{i\phi}, \quad (9)$$

o que significa que a intensidade naquele ponto de “máximo” é um pouco maior do que a intensidade da onda incidente, $I(y_1) \simeq (1.15)^2 I_0 \simeq 1.3 I_0$.

(e) Na aproximação de Fraunhofer, o termo $|\vec{x}_\perp - \vec{x}'_\perp|^2$ é aproximado por:

$$\vec{x}_\perp^2 - 2\vec{x}_\perp \cdot \vec{x}'_\perp + \dots$$

O termo \vec{x}_\perp^2 sai para fora da integral (3), e dentro dela sobra apenas o termo cruzado.

Nessa aproximação, portanto, assumimos que $|\vec{x}_\perp|^2 \gg |\vec{x}'_\perp|^2$. Essa aproximação falha em algumas situações:

(1) quando observamos o padrão de difração perto da origem no anteparo, ou seja, quando $|\vec{x}_\perp| \rightarrow 0$.

(2) quando a abertura é muito grande (ou infinita, como no caso desse exercício) em ao menos uma das dimensões.