AULA 4:
INTERVALO DE CONFIANÇA E TESTE DE HIPOTESES

Gleici Castro Perdoná

pgleici@fmrp.usp.br

Introdução

- Estimativas por intervalos são expressas por um limite inferior e um superior entre os quais acredita-se estar o verdadeiro valor do parâmetro.
- Uma das utilidades dos intervalos é dar a idéia da dispersão ou variabilidade das estimativas.
- Um intervalo muito grande indica que a estimativa calculada não é tão acurada quanto outra com intervalo menor, ou seja, quanto maior a amplitude do intervalo menor a confiabilidade da estimativa

- ✓ Existem vários métodos para expressar intervalos

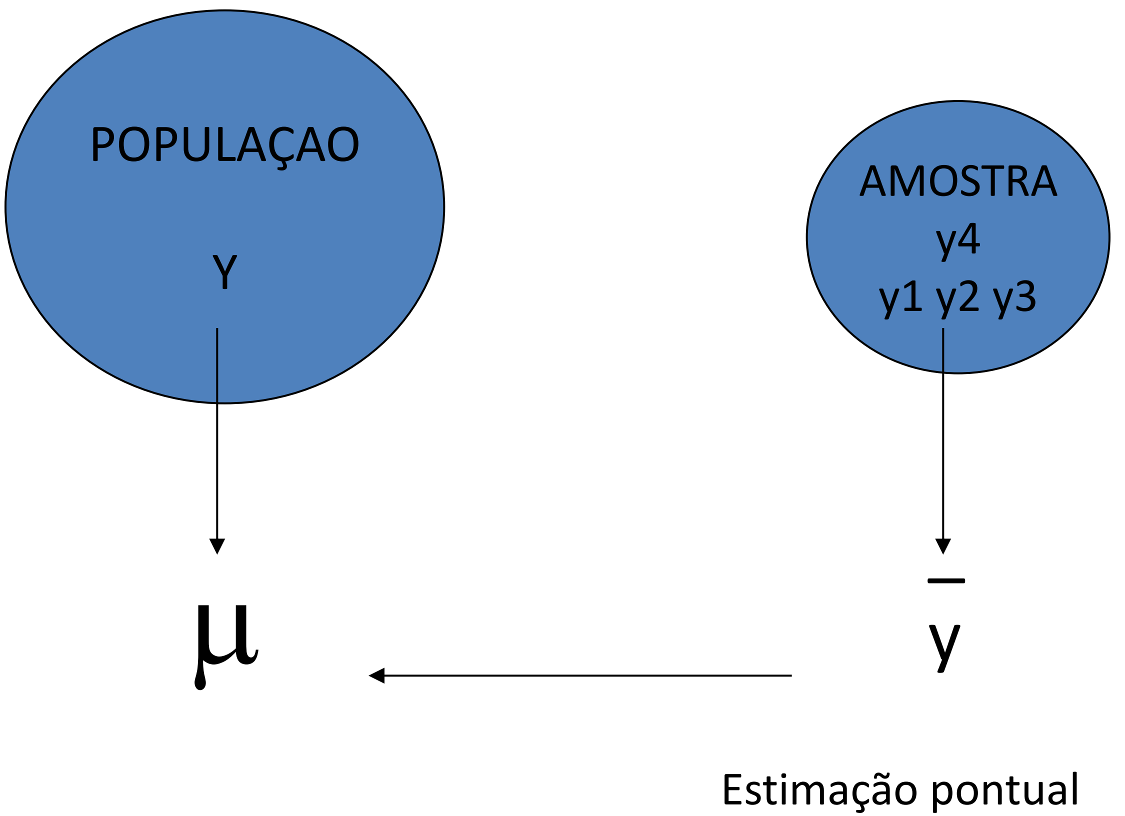
- ✓ O valor máximo e o valor mínimo,
- ✓ Intervalos de percentis, como o intervalo 25% - 75%.

- ✓ Intervalo de confiança que permite incorporar uma probabilidade de erro.

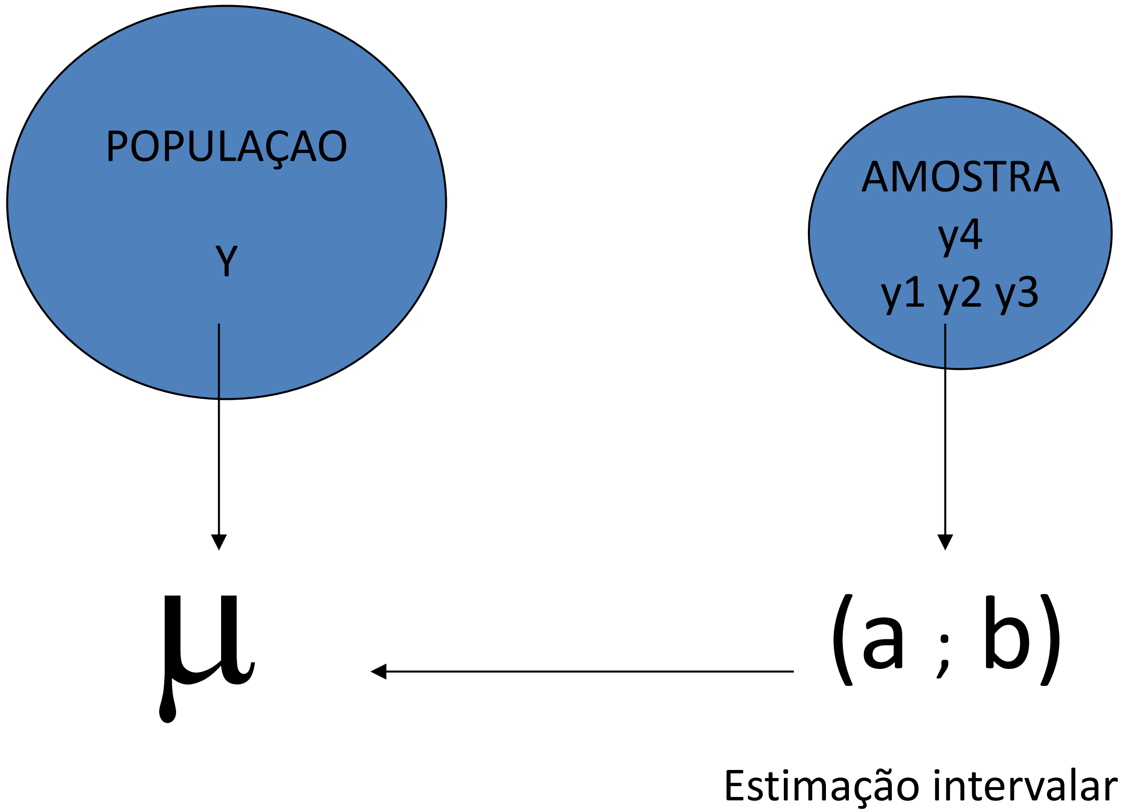
- ✓ Os intervalos podem ser construídos com diferentes coeficientes de confiança, sendo em geral mais utilizados os intervalos de confiança de 95% ou 99%.

Por exemplo, em um estudo de nefropatia diabética, uma amostra de pacientes apresentou os níveis de glicemia de 350 mg/dl variando de 325mg/dl a 365mg/dl (intervalo de confiança = [325; 365]).

Y= Níveis de Glicemia: 350 mg/dL;



Y= Níveis de Glicemia



Exemplo

Amostra aleatória de 4 observações de uma distribuição normal com média desconhecida μ desvio padrão(σ) 10 mg/dl conhecido.

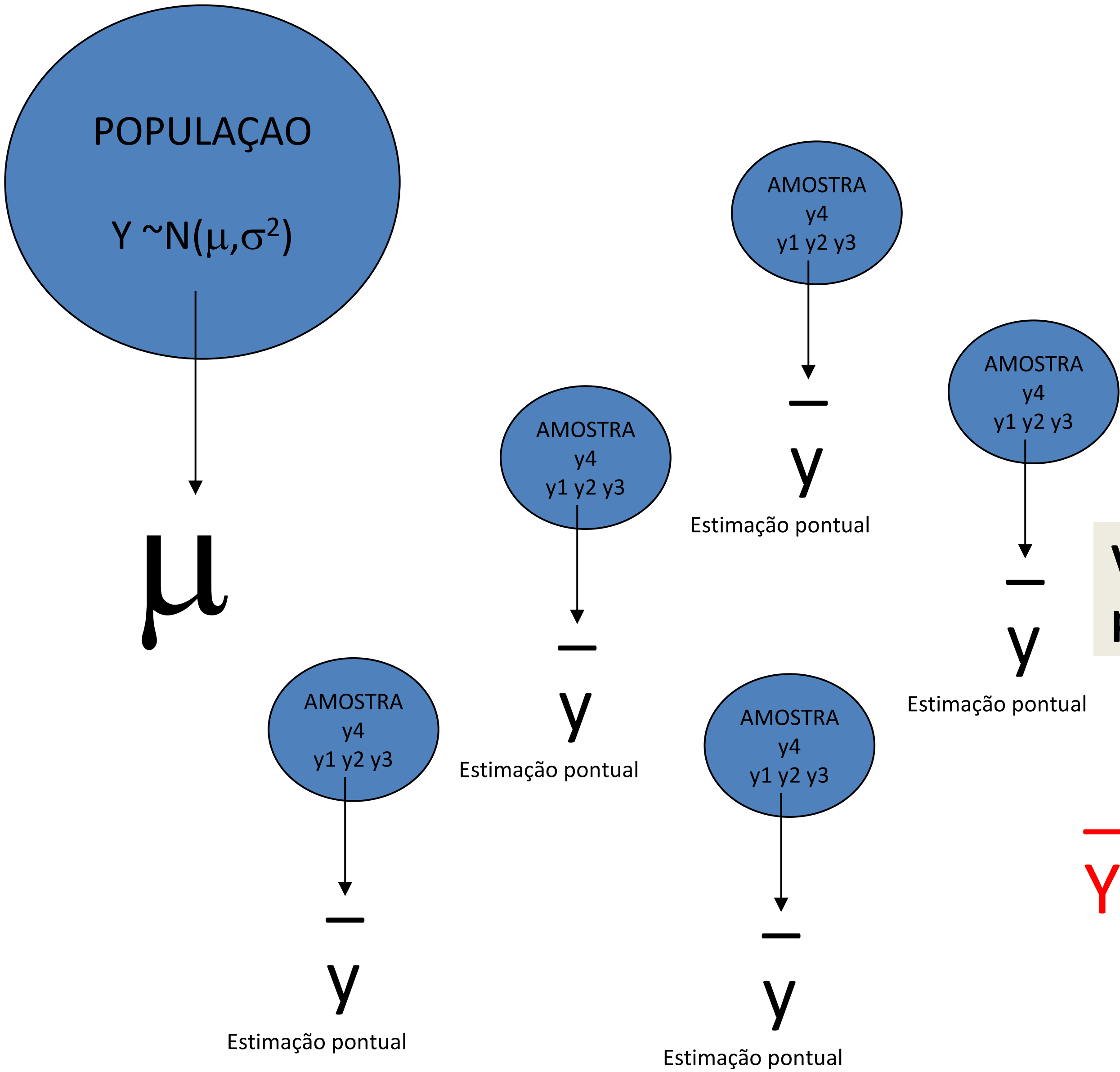
421 510 333 310

$\bar{y} = 393{,}5$

(a ; b)

? ?

Y= Níveis de HB



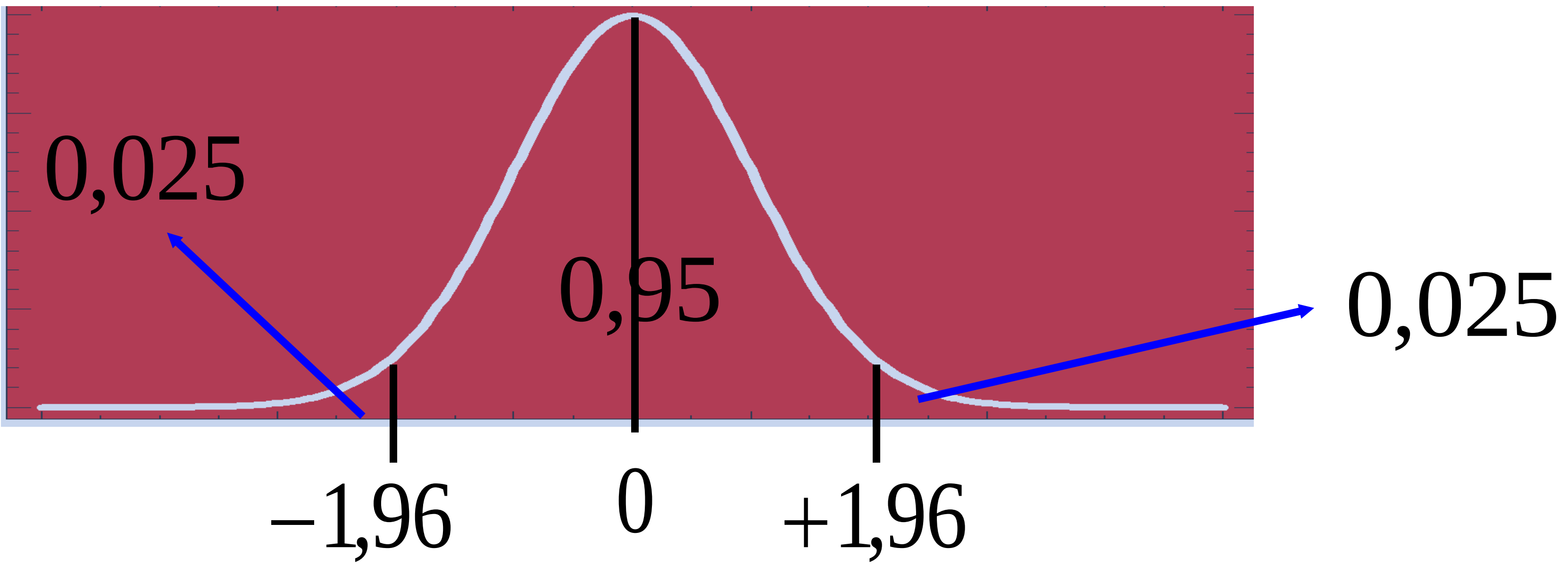
Veja que o desvio padrão Mudou!!!

$$\bar{Y} \sim N(\mu,\sigma^2/n)$$

NORMAL

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

- **Muito utilizada**
- **Forma simétrica e unimodal**
- **μ pode ser estimada por** $\bar{x}$
- σ^2 **pode ser estimada por s2**



Exemplo

$$421 \quad 510 \quad 333 \quad 310$$

$\bar{y} = 393{,}5$ (a ; b)

Queremos encontrar limites inferiores e superiores que confiamos conter a média verdadeira desconhecida

$Z = (\bar{Y} - \mu)/\sigma \longrightarrow P[-1{,}96 < Z < 1{,}96] = \int_{1,96}^{1,96} \phi(z) = 0{,}95$

N(0,1)

$$m < \bar{y} + \frac{10 ´ \ 1,96}{\sqrt{4}} = \bar{y} + 9,8$$

$$m > \bar{y} - \frac{3 ´ \ 1,96}{2} = \bar{y} - 2,94$$

Lembre-se: desvio padrão Mudou!!! PARA A MÉDIA

$$\mu < \bar{y} + \frac{10 \times 1,96}{2} = \bar{y} + 9,8$$

$$\mu > \bar{y} - \frac{10 \times 1,96}{2} = \bar{y} - 9,8$$

$$P[\bar{y} - 9,8 < \mu < \bar{y} + 9,8] = 0,95$$

Para $\bar{y} = 393,5$

(383.7mg/dl ; 403.3mg/dl)

A

$$(\bar{y} - 9{,}8 ; \bar{y} + 9{,}8)$$

B

(383.7mg/dl ; 403.3mg/dl)

O QUE ISTO SIGNIFICA??

Intervalo aleatório

Intervalo quando Y = 393,5

$$P[\bar{y} - 9{,}8 < m < \bar{y} + 9{,}8] = 0{,}95$$

- ✓ A probabilidade do intervalo A cobrir a verdadeira média desconhecida é 0,95.

- ✓ Se amostras de tamanho 4 forem repetidamente retiradas de uma população normal e se o intervalo A for computado para cada amostra então a frequencia relativa deste intervalos conter o valor verdadeiro desconhecido da média é aproximadamente 95%.

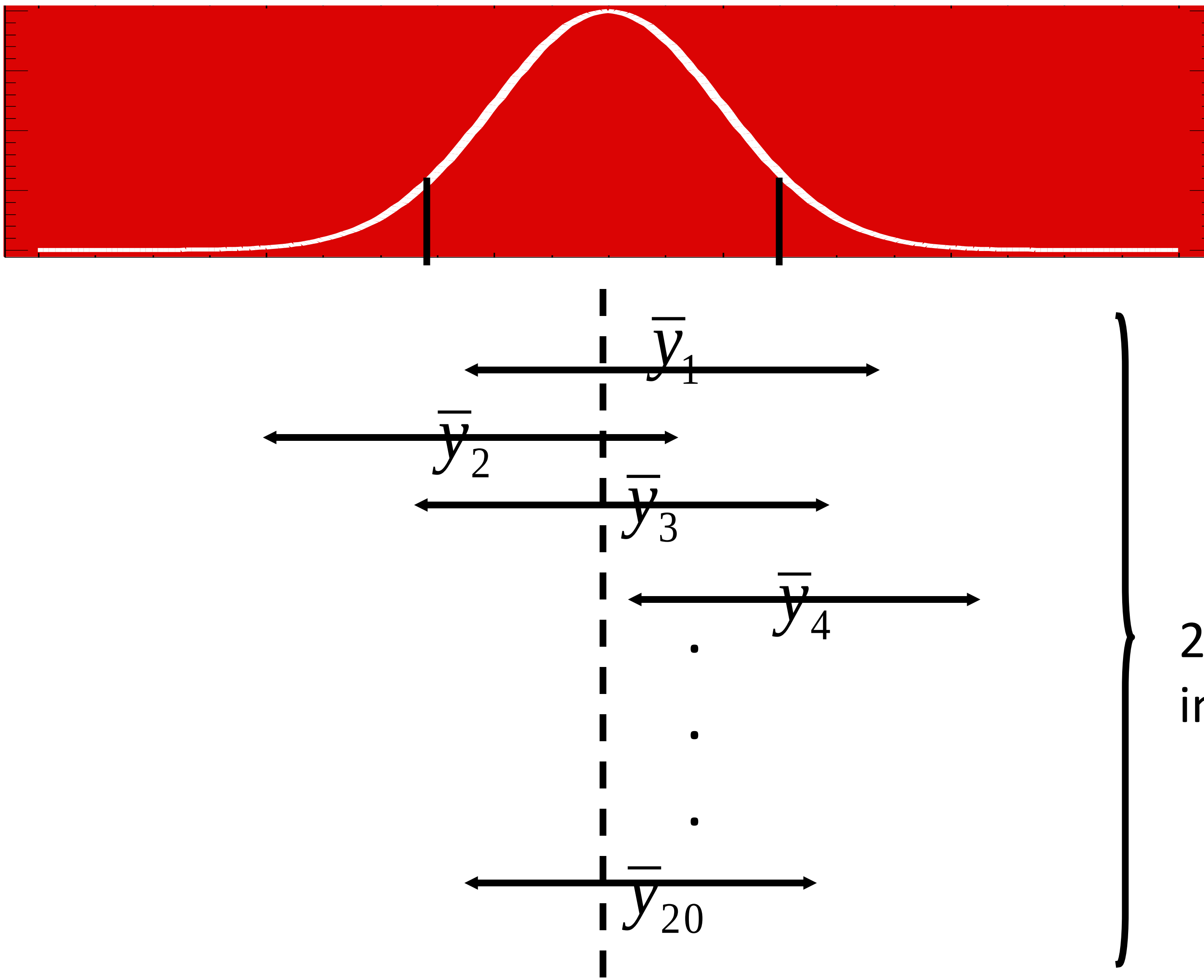
- ✓ Estamos confiantes que o intervalo observado B, cobriu a verdadeira média.

Estimamos μ → Via $\bar{y}$

$$\mu = \bar{y} \pm \text{um erro de amostragem}$$

- Qual a amplitude do erro de amostragem?
- Devemos decidir quanto ao grau de confiança em nosso intervalo que deve efetivamente englobar μ
- Geralmente, Nível de Conf. = 95%
- Isto é, utilizaremos uma técnica que, a longo alcance, nos dará um intervalo correto 19 vezes em cada 20.

INTERPRETAÇÃO



Distr. da Média Amostral que conhecemos

20 estimativas intervalares

- É comum em artigos médicos os valores de medidas estarem expressos na forma de médias mais ou menos desvio padrão.

- Um erro comum é subtrair e somar este valor e interpretar como limites de intervalo de confiança.

- Veja que neste caso o cálculo corresponde a um intervalo de confiança de 65%, correspondente ao valor crítico de 1 desvio padrão, e leva a um intervalo muito menor do que o habitual intervalo de confiança de 95%, cujo valor crítico é de aproximadamente 2.

- Além de informar sobre a variabilidade/dispersão de estimativas pontuais, os intervalos de confiança podem também expressar a “significância estatística” dos testes referentes às comparações. (Teste de comparação de duas médias, comparação de proporções)

- Um intervalo de confiança para a diferença entre as médias que contém o valor zero indica que a diferença não é significante, ou seja, que não existe diferença entre as médias.

- Para o caos de proporções por exemplo utilizando o risco relativo, a ausência de significância se dá quando o intervalo para o risco relativo contém o valor 1,pois isto indica que as duas proporções podem ser iguais.

Comparação entre duas médias

Media 1	Media 2	Dif	IC95% p/ dif	Conclusão
53,4	62,8	-9,4	[-7,6 ; -11,12]	Não contem o valor 0
				As médias são diferentes
45,9	47,2	-1,3	[-3,3 ; 0,30]	Contem o 0
				Médias são iguais

Estimação do Risco Relativo

RR	IC95% p/ dif	Conclusão
2,13	[1,58 ; 2,68]	Não contem o valor 1
		As proporções são diferentes
1,25	[0,48 ; 2,02]	Contem o 1
		são iguais

PORTANTO,

- Para construir um intervalo de confiança bilateral para uma média μ da população, utilizamos $Z = \dfrac{\bar{y} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ que tem uma distribuição normal padrão aproximada, se n é suficientemente grande.

$$P[-1{,}96 < Z < 1{,}96] = \int_{1{,}96}^{1{,}96} \phi(z) = 0{,}95$$

- Quando o desvio padrão da população não é conhecido, parece lógico substituir σ por s, o desvio padrão de uma amostra extraída da população. Quando isso é feito a razão muda

$$t = \frac{\bar{y} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

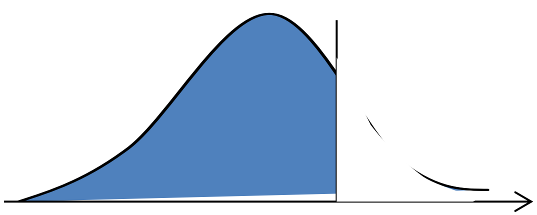
- Portanto se Y(barra) é normalmente distribuida e a amostra de tamanho n é aleatóriamente escolhida dessa população original, esta distribuição é conhecida com t de Student com n-1 graus de liberdade.

Usando a tabela t,

Considere a distribuição t com 5 graus de liberdade.

- Que proporção da área sob a curva se encontra à direita de t=2,015?
- Que proporção da área sob a curva se encontra à esquerda de t=3,365?
- Que proporção da área sob a curva se encontra entre t= -4,032 e t = 4,032?
- Que valor de t limita os 2,5% inferiores da distribuição

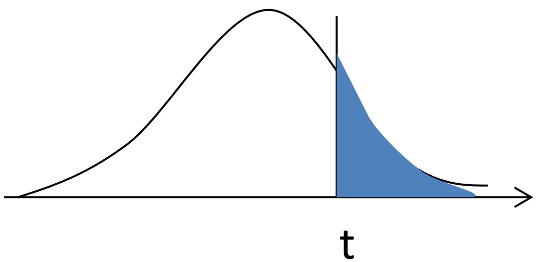
Probabilidades associadas à curva t Student



t

d/f	$t_{.80}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$
1	1.376	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66
2	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
80	.846	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639
100	.845	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
120	.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Disponível em: http://www.normaltable.com/ttable.html



df\p	0.40	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0005
1	0.324920	1.000000	3.077684	6.313752	12.70620	31.82052	63.65674	636.6192
2	0.288675	0.816497	1.885618	2.919986	4.30265	6.96456	9.92484	31.5991
3	0.276671	0.764892	1.637744	2.353363	3.18245	4.54070	5.84091	12.9240
4	0.270722	0.740697	1.533206	2.131847	2.77645	3.74695	4.60409	8.6103
5	0.267181	0.726687	1.475884	2.015048	2.57058	3.36493	4.03214	6.8688
6	0.264835	0.717558	1.439756	1.943180	2.44691	3.14267	3.70743	5.9588
7	0.263167	0.711142	1.414924	1.894579	2.36462	2.99795	3.49948	5.4079
8	0.261921	0.706387	1.396815	1.859548	2.30600	2.89646	3.35539	5.0413
9	0.260955	0.702722	1.383029	1.833113	2.26216	2.82144	3.24984	4.7809
10	0.260185	0.699812	1.372184	1.812461	2.22814	2.76377	3.16927	4.5869
11	0.259556	0.697445	1.363430	1.795885	2.20099	2.71808	3.10581	4.4370
12	0.259033	0.695483	1.356217	1.782288	2.17881	2.68100	3.05454	4.3178
13	0.258591	0.693829	1.350171	1.770933	2.16037	2.65031	3.01228	4.2208
14	0.258213	0.692417	1.345030	1.761310	2.14479	2.62449	2.97684	4.1405
15	0.257885	0.691197	1.340606	1.753050	2.13145	2.60248	2.94671	4.0728
16	0.257599	0.690132	1.336757	1.745884	2.11991	2.58349	2.92078	4.0150
17	0.257347	0.689195	1.333379	1.739607	2.10982	2.56693	2.89823	3.9651
18	0.257123	0.688364	1.330391	1.734064	2.10092	2.55238	2.87844	3.9216
19	0.256923	0.687621	1.327728	1.729133	2.09302	2.53948	2.86093	3.8834
20	0.256743	0.686954	1.325341	1.724718	2.08596	2.52798	2.84534	3.8495
21	0.256580	0.686352	1.323188	1.720743	2.07961	2.51765	2.83136	3.8193
22	0.256432	0.685805	1.321237	1.717144	2.07387	2.50832	2.81876	3.7921
23	0.256297	0.685306	1.319460	1.713872	2.06866	2.49987	2.80734	3.7676
24	0.256173	0.684850	1.317836	1.710882	2.06390	2.49216	2.79694	3.7454
25	0.256060	0.684430	1.316345	1.708141	2.05954	2.48511	2.78744	3.7251
26	0.255955	0.684043	1.314972	1.705618	2.05553	2.47863	2.77871	3.7066
27	0.255858	0.683685	1.313703	1.703288	2.05183	2.47266	2.77068	3.6896
28	0.255768	0.683353	1.312527	1.701131	2.04841	2.46714	2.76326	3.6739
29	0.255684	0.683044	1.311434	1.699127	2.04523	2.46202	2.75639	3.6594
30	0.255605	0.682756	1.310415	1.697261	2.04227	2.45726	2.75000	3.6460
inf	0.253347	0.674490	1.281552	1.644854	1.95996	2.32635	2.57583	3.2905

Exercício

- As distribuições das pressões sanguineas sistólicas e diastólicas para mulheres diabéticas entre 30 e 34 anos tem média desconhecidas. No entanto, seus desvios-padrão são σs=11,8mmHg e σd=9,1mmHg, respectivamente.

  a) Uma amostra aleatória de dez mulheres é selecionada dessa população. A PS média para a amostra é 130mmHg. Calcule um IC de 95% para μ, a verdadeira PS média.

  b) Interprete esse intervalo de confiança.

  c) A PD média para a amostra de tamanho 10 é 84mmHg. Encontre um IC de 90% para μd a verdadeira PD média da população.

Exercicio

- Mude o nível de significância para 99% e encontre o IC para a μd PD.
- Como o IC de 99% se compara com o 90% para a μd

Questões: Como saber que os dados tem distribuição normal?

Atividade usando o R

- Monte um experimento com o seguinte problema:
- A amostra de pacientes com cetoacidose diabética foi tratada com insulina. Para avaliar se houve reversão da cetoacidose diabética e da desidratação. Vc analisou o grupo tratado com insulina e com recomendação dieta após 1 mês.
- Avalie se os pacientes que após este periodo tiveram aderencia ao tratamento quanto à dieta, Use os níveis de glicemia antes e após o tratamento para esta avaliação.
-

Usando o R

crie uma amostra de tamanho 16 para representar o grupo

```
G_antes=rnorm(16,393,10)
```

crie uma amostra de tamanho 16 para representar os pacientes tratados apos 1 mes.

```
G_pos=rnorm(16,120,10)
```

Investigue o grupo , medidas descritivas que já conhece,

Obtenha os intervalos de confiança para ambos os grupos

```
mean(G_antes)-1.96*10/4
mean(G_antes)+1.96*10/4
```

Obtenha uma nova variavel (dif)

```
dif=G_antes-G_pos
```

Veja os dados

```
cbind(G_antes,G_pos,dif)
```

Obtenha o intervalo de confiança para a média pop, de 95% para a variavel “dif” . Qual conclusão?

E se não tibermos o desvio padrão?

Intervalo para média

$$IC(\mu, 1-\alpha) = \left(\overline{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$IC(\mu, 1-\alpha) = \left(\overline{X} - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}; \overline{X} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

Intervalo para comparação de 2 médias

$$IC(\mu_1 - \mu_2, 1-\alpha) = \left((\overline{X} - \overline{Y}) - Z_{\alpha/2} \left(\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right) ; (\overline{X} - \overline{Y}) + Z_{\alpha/2} \left(\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right) \right)$$

$$\mathrm{IC}(\mu_1 - \mu_2, 1-\alpha) = \left((\overline{X} - \overline{Y}) - t_{(a,\alpha/2)} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} ; (\overline{X} - \overline{Y}) + t_{(a,\alpha/2)} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right)$$

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}.$$

Intervalo para proporção

$$IC(p, 1-\alpha) = \left(\hat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

$$\hat{p}_c = \begin{cases} \hat{p} + \dfrac{1}{2n} \text{ se } \hat{p} < 0,5 \\ \hat{p} - \dfrac{1}{2n} \text{ se } \hat{p} > 0,5. \end{cases}$$

$$IC(p, 1-\alpha) = \left(\hat{p}_c - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_c(1-\hat{p}_c)}{n}}, \hat{p}_c + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_c(1-\hat{p}_c)}{n}}\right)$$

OBRIGADA

- EXERCÍCIOS estarão no stoa para entregar como tarefa para próximas aulas.

Uma variável aleatória X tem distribuição normal, com média 100 e desvio padrão 10.

(a) Qual a $P(90 < X < 110)$?

(b) Se $\bar{X}$ for a média de uma amostra de 16 elementos retirados dessa população, calcule $P(90 < \bar{X} < 110)$.

(c) Represente, num único gráfico, as distribuições de X e $\bar{X}$.

(d) Que tamanho deveria ter a amostra para que $P(90 < \bar{X} < 110) = 0.95$?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 274.

Estão sendo estudados dois processos para conservar alimentos, cuja principal variável de interesse é o tempo de duração destes. No processo A, o tempo X de duração segue a distribuição $N(\mu_A, 100)$, e no processo B o tempo Y obedece à distribuição $N(\mu_B, 100)$. Sorteiam-se duas amostras independentes: a de A, com 16 latas, apresentou tempo médio de duração igual a 50, e a de B, com 25 latas, duração média igual a 60.

(a) Construa um IC para μ_A e μ_B, separadamente.

(b) Para verificar e os dois processos podem ter o mesmo desempenho, decidiu-se construir um IC para a diferença $\mu_A - \mu_B$. Caso o zero pertença ao intervalo, pode-se concluir que existe evidência de igualdade dos processos. Qual seria sua resposta?

Suponha que $p = 30\%$ dos estudantes de uma escola sejam mulheres. Colhemos uma amostra aleatória simples de $n = 10$ estudantes e calculamos $\hat{p}$ = proporção de mulheres na amostra. Qual a probabilidade de que $\hat{p}$ difira de p em menos de 0,01?
Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 276.

Qual deve ser o tamanho de uma amostra cujo desvio-padrão é 10 para que a diferença da média amostral para a média da população, em valor absoluto, seja menor que 1, com coeficiente de confiança igual a:

(a) 95%
(b) 99%

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 308.

Um procedimento de controle de qualidade foi planejado para garantir um máximo de 10% de itens defeituosos na produção. A cada 6 horas sorteia-se uma amostra de 20 peças e, havendo mais de 15% de defeituosas, encerra-se a produção para verificação do processo. Qual a probabilidade de uma parada desnecessária?
Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 276.

Um distribuidor de sementes determina, por meio de testes, que 5% das sementes não germinam. Ele vende pacotes com 200 sementes com garantia de 90% de germinação. Qual é a probabilidade de que um pacote não satisfaça à garantia?
Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 284.

Uma amostra aleatória de 625 donas de casa revela que 70% delas preferem a marca A de detergente. Construir um intervalo de confiança para $p =$ proporção das donas de casa que preferem A com coeficiente de confiança $\gamma = 90\%$.
Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 308.

BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA

BUSSAB, W.O.; MORETTIN, P**. Estatística básica.** 4 ed. São Paulo, Atual, 1987.

PAGANO, M. e GAUVREAU, K. Princípios de Bioestatística - Tradução da 2ª Edição Norte Americana, Pioneira Thonpson Learning, São Paulo, SP,2004.

MEDRONHO R; CARVALHO DM; BlOCH KV; LUIZ RR; WERNECK GL. Epidemiologia.
Atheneu, 2 ed. São Paulo, 2008

ROSNER, B.Fundamentos de bioestatistica**.** 8ª Edição Norte Americana, Cengage Learning, 2016.