

Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz” Universidade de São Paulo

Teste de Hipóteses

Professora Renata Alcarde Sermarini

Piracicaba
junho 2016

Conceitos iniciais

- Hipóteses de interesse:

$$\begin{cases} H_0 : \text{hipótese nula} \\ H_a : \text{hipótese alternativa} \end{cases}$$

Conceitos iniciais

- Tipos de erro:

- Escolhendo H_0 podemos cometer o erro dessa hipótese ser falsa: erro tipo II.
- Escolhendo H_a podemos cometer o erro dessa hipótese ser falsa: erro tipo I.

		hipótese verdadeira	
		H_0	H_a
sua escolha	H_0	sem erro	erro tipo II
	H_a	erro tipo I (α)	sem erro

Conceitos iniciais

Exemplo: Hoje a noite você vai a uma festa. A previsão do tempo diz que há 80% de probabilidade de chuva. Você leva guarda-chuva?

$$\begin{cases} H_0 : \text{vai chover hoje a noite} \\ H_a : \text{Não vai chover hoje a noite} \end{cases}$$

Erro tipo I: Você rejeita H_0 , acredita que não vai chover, foi sem guarda-chuva e se molha.

Erro tipo II: Você não rejeita H_0 , acredita que vai chover, leva guarda-chuva e passa a noite toda carregando um guarda-chuva sem usá-lo.

- **Regra da decisão:** Regra que estabelece com base nos dados obtidos, quando H_0 é rejeitada.
- **Nível de significância (α):** associado a uma regra de decisão. É a probabilidade de se cometer erro tipo I.

Teste para uma proporção populacional

Um produtor precisa decidir pela compra ou não de sementes fornecidas por um distribuidor, que afirma que a proporção de germinação de sementes é $\pi = 0,94$. Para tanto ele observou a proporção de germinação de uma amostra aleatória simples de 100 sementes e encontrou o valor $\hat{\pi} = 0,93$. Com base nesse resultado o produtor poderia discordar do distribuidor?

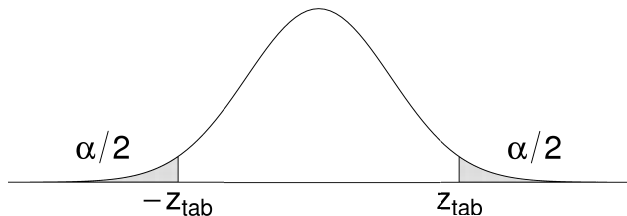
Teste para uma proporção populacional

Procedimento para a realização de um teste de hipóteses:

- 1 Formular as hipóteses estatísticas: Hipótese nula (H_0) e Hipótese alternativa (H_1).
- 2 Definir da estatística adequada $\Rightarrow$ conhecer a distribuição amostral do estimador.
- 3 Fixar o nível de significância (α) para o teste $\Rightarrow$ limitar as regiões de rejeição e aceitação de $H_0 \Rightarrow z_{tab}$

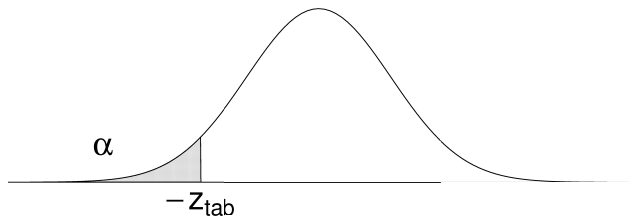
Teste para uma proporção populacional

- Teste Bilateral:



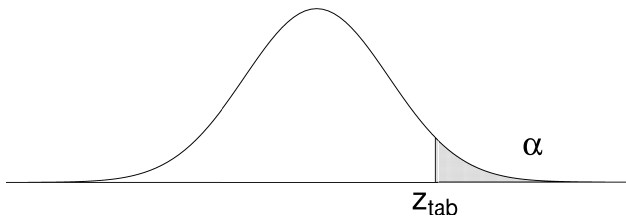
Teste para uma proporção populacional

- Teste Unilateral (esquerda):



Teste para uma proporção populacional

- Teste Unilateral (direita):



Teste para uma proporção populacional

Procedimento para a realização de um teste de hipóteses (continuação):

4 Com base na amostra, obter o valor z_{cal} , tal que

$$z_{cal} = \frac{\hat{\pi} - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}$$

5 Comparar z_{cal} com z_{tab} :

- Se z_{cal} pertencer a região de rejeição $\Rightarrow$ rejeita-se H_0 ao nível α de significância
- Se z_{cal} não pertencer a região de rejeição $\Rightarrow$ não se rejeita H_0 ao nível α de significância

Teste para uma proporção populacional

Exemplo: Um produtor precisa decidir pela compra ou não de sementes fornecidas por um distribuidor, que afirma que a proporção de germinação de sementes é $\pi = 0,94$. Para tanto ele observou a proporção de germinação de uma amostra aleatória simples de 100 sementes e encontrou o valor $\hat{\pi} = 0,93$. Com base nesse resultado o produtor poderia discordar do distribuidor, considerando um nível de significância de 5%?

Teste para uma proporção populacional

Exercício: Um biólogo, com base em conhecimentos teóricos e práticos, afirma que a proporção (π) de ferólitos sem bromélias, no estágio arbóreo pioneiro da Floresta Ombrófila, na Ilha de Santa Catarina, é igual a 0,47. Em uma amostra de 35 forófitos, 24 não apresentaram bromélias. Teste a afirmativa do biólogo ao nível de 5% de significância.

Teste para uma proporção populacional

Exercício: Uma estação de televisão afirma que 60% dos televisores estavam ligados no seu programa especial da última segunda-feira. Uma rede competidora deseja contestar essa afirmação e decide usar uma amostra de 200 famílias para um teste. Da pesquisa obteve-se 104 famílias que estavam assistindo ao programa. Verifique a informação da estação de televisão ao nível de 5% de significância.

Teste para uma proporção populacional

Códigos em R

```
binom.test(93,100,0.94, alternative="less")  
binom.test(24,35,0.47, alternative="two.sided")  
binom.test(104,200,p=0.60,alternative="less")
```

Teste para uma proporção populacional

Códigos em R

```
# poder do teste
```

```
(pc<- 0.60-1.64*sqrt(0.60*(1-0.60)/200))  
pnorm(pc,0.59,sqrt(0.59*(1-0.59)/200))  
pnorm(pc,0.58,sqrt(0.58*(1-0.58)/200))  
pnorm(pc,0.50,sqrt(0.50*(1-0.50)/200))
```

```
# modificando o tamanho da amostra
```

```
(pc2<- 0.60-1.64*sqrt(0.60*(1-0.60)/500))  
pnorm(pc2,0.59,sqrt(0.59*(1-0.59)/500))  
pnorm(pc2,0.58,sqrt(0.58*(1-0.58)/500))  
pnorm(pc2,0.50,sqrt(0.50*(1-0.50)/500))
```

Teste para médias populacionais

Existem basicamente três tipos de afirmações que podem ser feitas a respeito das médias populacionais:

- 1 a afirmação diz respeito a uma média populacional. Exemplo: a altura média da floresta nativa é igual a 20m.
- 2 a afirmação diz que duas médias populacionais são iguais. Exemplo: as produtividades médias de duas variedades de cana-de-açúcar são iguais.
- 3 a afirmação diz que as médias de duas ou mais populações são iguais. Exemplo: desejamos saber se há diferença entre três locais quanto ao número médio de micronúcleos por 5000 células sanguíneas de peixe do gênero Bagre.

Teste para uma média populacional

$$H_0 : \mu = \mu_0,$$

em que μ_0 é um valor conhecido.

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad (\text{teste bilateral})$$

$$H_1 : \mu > \mu_0 \quad (\text{teste unilateral à direita})$$

$$H_1 : \mu < \mu_0 \quad (\text{teste unilateral à esquerda})$$

Teste para uma média populacional com variância conhecida

Sabendo-se que, para uma população normal

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Assim, quando a hipótese nula, $\mu = \mu_0$, for verdadeira, a estatística:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}},$$

segue a distribuição normal padrão, $N(0, 1)$.

Teste para uma média populacional com variância conhecida

Exemplo: Uma balança para encher pacotes de sementes automaticamente está programada para produzir pacotes com peso médio de 20 kg e desvio padrão de 0,20 kg. Periodicamente é feita uma inspeção para verificar se o peso médio está sob controle. Para este fim, foi selecionada uma amostra de 8 pacotes de sementes, cujos resultados foram:

20,3	19,8	20,3	19,7	19,8	19,7	19,8	19,8
------	------	------	------	------	------	------	------

Teste a hipótese que a a balança se desregulou e está produzindo um peso médio inferior a 20 kg. Use o nível de significância de 5%.

Teste para uma média populacional com variância desconhecida

Quando não conhecemos a variância da população (mais comum), devemos estimá-la a partir da amostra. Nesse caso, a estatística apropriada para o teste da hipótese é dada por:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}},$$

a qual tem distribuição t de Student com $n - 1$ graus de liberdade, quando a hipótese nula for verdadeira.

Teste para uma média populacional com variância desconhecida

Exemplo: Um pesquisador deseja verificar se o processamento térmico da soja reduz sua atividade ureática a níveis inferiores a 0,4 (nível máximo permitido para a utilização da soja na alimentação animal). Assim, retirou uma amostra de tamanho 10 e observou os resultados da tabela a seguir:

0,5	0,4	0,2	0,4	0,1
0,2	0,3	0,3	0,4	0,3

Tire uma conclusão supondo um nível de significância $\alpha = 0,05$.

Teste para uma média populacional com variância desconhecida

Exemplo: Um cientista deseja saber se o pH de um solo é ácido. Ele toma uma amostra de 10 unidades e obteve os valores de pH:

5,8	6,0	7,0	6,2	6,2
7,1	6,4	5,5	5,8	5,9

Tire uma conclusão supondo nível de significância de 5%.

Teste para uma proporção populacional

Códigos em R

```
t.test(c(5.8,6.0,7.0,6.2,6.2,  
        7.1,6.4,5.5,5.8,5.9), alternative="less",  
        mu=7.0)
```

Teste para duas médias populacionais

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

versus

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad \text{teste bilateral}$$

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2 \quad \text{teste unilateral à direita}$$

$$H_1 : \mu_1 < \mu_2 \quad \text{teste unilateral à esquerda}$$

Nestes casos, observam-se duas amostras de duas populações com médias μ_1 e μ_2 . Possíveis casos:

- Dados pareados ou amostras dependentes
- Dados não pareados ou amostras independentes

Teste para dados pareados

Exemplo: Foi conduzido um experimento para estudar o conteúdo de hemoglobina no sangue de suínos com deficiência de niacina. Aplicaram-se 20 mg de niacina em oito suínos. Podemos afirmar que o conteúdo de hemoglobina no sangue diminui com a aplicação de niacina, ao nível de significância de 5%?

Suíno	Antes (A)	Depois (B)
1	13,6	11,4
2	13,6	12,5
3	14,7	14,6
4	12,1	13,0
5	12,3	11,7
6	13,2	10,3
7	11,0	9,8
8	12,4	10,4

Teste para dados pareados

Hipóteses:

$$H_0 : \mu_A = \mu_B \quad \text{versus} \quad H_1 : \mu_A \neq \mu_B$$

Ou ainda,

$$H_0 : \mu_D = 0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \mu_D \neq 0$$

Estatística

$$t = \frac{\bar{D} - 0}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{D}}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}},$$

a qual segue uma distribuição t de Student com $n - 1$ graus de liberdade. $\bar{D}$ corresponde a média amostral da diferença entre os valores de A e B e S_D é o desvio padrão das diferenças.

Teste para dados pareados

Exemplo: Foi conduzido um experimento para estudar o conteúdo de hemoglobina no sangue de suínos com deficiência de niacina. Aplicaram-se 20 mg de niacina em oito suínos. Podemos afirmar que o conteúdo de hemoglobina no sangue diminui com a aplicação de niacina, ao nível de significância de 5%?

Suíno	Antes (A)	Depois (B)	Diferenças ($D=A-B$)
1	13,6	11,4	2,2
2	13,6	12,5	1,1
3	14,7	14,6	0,1
4	12,1	13,0	-0,9
5	12,3	11,7	0,6
6	13,2	10,3	2,9
7	11,0	9,8	1,2
8	12,4	10,4	2,0

Teste para dados pareados

Códigos em R

```
antes <- c(13.6, 13.6, 14.7, 12.1, 12.3, 13.2,  
           11.0, 12.4)  
depois <- c(11.4, 12.5, 14.6, 13.0, 11.7, 10.3,  
            9.8, 10.4)  
  
t.test(antes, depois, alternative="greater",  
       mu=0, paired=TRUE)
```

Teste para dados não pareados

Exemplo: Um pesquisador deseja comparar dois meios de cultura diferentes no desenvolvimento de colônias de um certo fungo. Para isso, utilizou 5 placas de Petri com o meio A e 5 com o meio B e colocou o inóculo no centro de cada placa. Após um certo período de tempo, observou as colônias (áreas em cm).

Meio A	22,0	23,2	15,4	22,1	25,0
Meio B	20,5	30,5	26,8	24,8	43,0

Será que as áreas são diferentes?

Teste para dados não pareados

Hipóteses

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

versus

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad \text{teste bilateral}$$

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2 \quad \text{teste unilateral à direita}$$

$$H_1 : \mu_1 < \mu_2 \quad \text{teste unilateral à esquerda}$$

Teste para dados não pareados

Estatística

- Variâncias iguais ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$) desconhecidas:

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

com distribuição t de Student com $(n_1 + n_2 - 2)$ graus de liberdade e

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_{X_1}^2 + (n_2 - 1)S_{X_2}^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

Teste para dados não pareados

Estatística

- Variâncias desiguais ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$) desconhecidas:

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_{X_1}^2}{n_1} + \frac{S_{X_2}^2}{n_2}}},$$

com distribuição t de Student com (ν) graus de liberdade e

$$\nu = \frac{\left(\frac{S_{X_1}^2}{n_1} + \frac{S_{X_2}^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_{X_1}^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1} + \frac{\left(\frac{S_{X_2}^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}.$$

Teste de variância de 2 populações

Hipóteses

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

vs

$$H_a : \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \rightarrow \text{unilateral}$$

Estatística do teste

					n	Média	Variância
Amostra 1	x_{11}	x_{12}	$\dots$	x_{1n_1}	n_1	$\bar{x}_1$	s_1^2
Amostra 2	x_{21}	x_{22}	$\dots$	x_{2n_2}	n_2	$\bar{x}_2$	s_2^2

$$F_{calc} = \frac{s_{max}^2}{s_{min}^2}$$

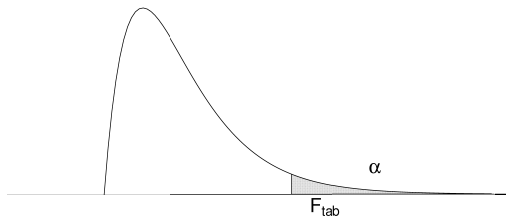
com

$$\begin{aligned} \nu_1 &= (n_1 - 1) \text{g.l.} && (\text{g.l. do numerador}) \\ \nu_2 &= (n_2 - 1) \text{g.l.} && (\text{g.l. do denominador}) \end{aligned}$$

Teste de variância de 2 populações

Regiões de rejeição

$$H_a : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$



Teste de variância de 2 populações

Conclusões

Obs:

Se H_0 é rejeitada $\Rightarrow$ variância heterogênea.

Se H_0 não é rejeitada $\Rightarrow$ variância homogênea.

Teste para dados não pareados

Exemplo: Um pesquisador deseja comparar dois meios de cultura diferentes no desenvolvimento de colônias de um certo fungo. Para isso, utilizou 5 placas de Petri com o meio A e 5 com o meio B e colocou o inóculo no centro de cada placa. Após um certo período de tempo, observou as colônias (áreas em cm).

Meio A	22,0	23,2	15,4	22,1	25,0
Meio B	20,5	30,5	26,8	24,8	43,0

Será que as áreas são diferentes?

Teste para dados não pareados

Códigos em R

```
meio.a<- c(22.0, 23.2, 15.4, 22.1, 25.0)
```

```
meio.b<- c(20.5, 30.5, 26.8, 24.8, 43.0)
```

```
var(meio.a)
```

```
var(meio.b)
```

```
1-pf(var(meio.b)/var(meio.a), 4,4)
```

```
t.test(meio.a, meio.b, alternative="two.sided",  
       mu=0, paired=FALSE, var.equal = TRUE)
```

Teste para dados não pareados

Exercício: As seguintes medidas de *Cytochrome oxidase* foram determinadas em machos de peixes *Periplaneta* em mm^3 por 10 minutos por miligrama, em um estudo para comparar dois tratamentos, quais sejam: (i) 24 horas após injeção de methoxychlor e (ii) controle, ou seja, sem injeção de methoxychlor.

Tratamento	n	$\bar{x}$	S	S^2
Tratado	5	24,8	0,9	0,81
Controle	3	19,7	2,8	7,84

Verifique se existe efeito significativo da aplicação de methoxychlor quanto às médias de *Cytochrome oxidase*.

Teste de qui-quadrado para duas ou mais proporções

- Tabelas de contingência:
 - Contagem de sobrevivência de enxertos de ameixeiras $\Rightarrow$ comparar duas épocas de plantio

Distribuição conjunta das frequências das variáveis época de plantio e sobrevivência de enxertos de ameixeiras

Época	Raízes		Total
	Sobreviventes	Mortas	
Fora da primavera	263	217	480
Na primavera	115	365	480
Total	378	582	960

Teste de qui-quadrado para duas ou mais proporções

- Tabelas de contingência:
 - Contagem de plantas segregando para dois caracteres: ciclo e virescência (formação de cloroplastos nas pétalas, originando plantas verdes), numa progênie da espécie X

Ciclo	Virescência		Total
	Normal	Virescente	
Tardio	3470	910	4380
Precoce	1030	290	1320
Total	4500	1200	5700

Teste de qui-quadrado para duas ou mais proporções

- Tabelas de contingência:

A	B		Total
	B ₁	B ₂	
A ₁	π_{11}	π_{12}	$\pi_{1.}$
A ₂	π_{21}	π_{22}	$\pi_{2.}$
Total	$\pi_{.1}$	$\pi_{.2}$	$\pi_{..}$

Teste de qui-quadrado para duas ou mais proporções

- Hipótese de homogeneidade das duas distribuições binomiais
 - Contagem de sobrevivência de enxertos de ameixeiras $\Rightarrow$ comparar duas épocas de plantio

Distribuição conjunta das frequências das variáveis época de plantio e sobrevivência de enxertos de ameixeiras

Época	Raízes		Total
	Sobreviventes	Mortas	
Fora da primavera	263	217	480
Na primavera	115	365	480
Total	378	582	960

$$H_0 : \pi_{1j} = \pi_{2j}$$

$$H_a : \pi_{1j} \neq \pi_{2j}$$

H_0 : a proporção de sobreviventes na primavera é igual a proporção de sobreviventes fora dela

Teste de qui-quadrado para duas ou mais proporções

- Hipótese de independência entre as variáveis
 - Contagem de plantas segregando para dois caracteres: ciclo e virescência (formação de cloroplastos nas pétalas, originando plantas verdes), numa progênie da espécie X

Ciclo	Virescência		Total
	Normal	Virescente	
Tardio	3470	910	4380
Precoce	1030	290	1320
Total	4500	1200	5700

$$H_0 : \pi_{ij} = \pi_{i.}\pi_{.j}$$

$$H_a : \pi_{ij} \neq \pi_{i.}\pi_{.j}$$

H_0 : a proporção de elementos classificados na categoria i da variável A e categoria j da variável B é igual ao produto das marginais dessa categoria

Teste de qui-quadrado para duas ou mais proporções

Estatística do teste

$$\chi_{cal}^2 = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r \frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}},$$

em que

n_{ij} é a frequência observada de elementos na categoria i da variável A e categoria j da variável B,

e_{ij} é a frequência esperada de elementos nessa categoria, dada por:

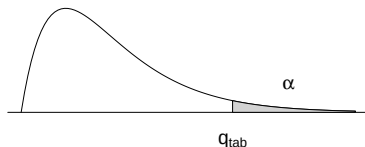
$$e_{ij} = \frac{n_{i.} \cdot n_{.j}}{n_{..}},$$

$n_{i.}$, $n_{.j}$ e $n_{..}$ representam as frequências marginais e o total da tabela de contingência a ser analisada.

Teste de qui-quadrado para duas ou mais proporções

Distribuição associada

$$\chi^2 \sim \chi^2_{(s-1) \times (r-1)}$$



Rejeita-se H_0 se $\chi^2_{cal} > \chi^2_{tab}$

Teste de qui-quadrado para duas ou mais proporções

- Hipótese de homogeneidade das duas distribuições binomiais
 - Contagem de sobrevivência de enxertos de ameixeiras $\Rightarrow$ comparar duas épocas de plantio

Distribuição conjunta das frequências das variáveis época de plantio e sobrevivência de enxertos de ameixeiras

Época	Raízes		Total
	Sobreviventes	Mortas	
Fora da primavera	263	217	480
Na primavera	115	365	480
Total	378	582	960

$$H_0 : \pi_{1j} = \pi_{2j}$$

$$H_a : \pi_{1j} \neq \pi_{2j}$$

H_0 : a proporção de sobreviventes na primavera é igual a proporção de sobreviventes fora dela

Teste de qui-quadrado para duas ou mais proporções

- Hipótese de independência entre as variáveis
 - Contagem de plantas segregando para dois caracteres: ciclo e virescência (formação de cloroplastos nas pétalas, originando plantas verdes), numa progênie da espécie X

Ciclo	Virescência		Total
	Normal	Virescente	
Tardio	3470	910	4380
Precoce	1030	290	1320
Total	4500	1200	5700

$$H_0 : \pi_{ij} = \pi_{i.} \pi_{.j}$$

$$H_a : \pi_{ij} \neq \pi_{i.} \pi_{.j}$$

H_0 : a proporção de elementos classificados na categoria i da variável A e categoria j da variável B é igual ao produto das marginais dessa categoria

Teste de qui-quadrado de aderência

- Aplicação à teoria Mendeliana

ervilhas com sementes amarelas lisas }
ervilhas com sementes verdes rugosas } $\Rightarrow$ ervilhas amarelas lisas (F_1)

Autofecundação $\Rightarrow F_2$ {
amarelas lisas (9/16)
verdes lisas (3/16)
amarelas rugosas (3/16)
verdes rugosas (1/16)

Teste de qui-quadrado de aderência

Frequências observadas das quatro classes fenotópicas geradas por autofecundação de plantas di híbridas da F_1

Tipos de ervilhas	Frequências observadas	Frequências esperadas sob H_0
Amarelas lisas	315	$312,75 = 556 \times (9/16)$
Verdes lisas	108	$104,25 = 556 \times (3/16)$
Amarelas rugosas	101	$104,25 = 556 \times (3/16)$
Verdes rugosas	32	$34,75 = 556 \times (1/16)$
Total	556	556

Avaliar se o padrão de segregação dos caracteres envolvidos segue aquele proposto pela segunda lei de Mendel.

$$H_0: \pi_1 = 9/16, \pi_2 = 3/16; \pi_3 = 3/16, \pi_4 = 1/16$$

H_a : pelo menos uma das igualdades é falsa

Teste de qui-quadrado de aderência

Estatística do teste

$$\chi_{cal}^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i},$$

em que

m é o número de categorias da variável qualitativa n_i é a frequência observada

e_i é a frequência esperada , supondo a hipótese nula verdadeira

Rejeita-se H_0 se $\chi_{cal}^2 > \chi_{tab}^2$

Teste para duas ou mais proporções

Códigos em R

```
# teste de homogeneidade  
prop.test(c(263, 115), c(480,480), correct=F)
```

```
# teste de independência  
y<- c(3470, 910, 1030, 290)  
tab<- array(y, c(2,2))  
prop.test(tab, correct=F)  
chisq.test(tab, correct=F)
```

```
# teste de aderência  
chisq.test(c(315,108,101,32),  
p=c(9/16, 3/16, 3/16, 1/16), correct=F)
```