

TESTES DE HIPÓTESES

Notas de aula

Prof.: IDEMAURO ANTONIO RODRIGUES DE LARA

CONTEÚDO

1. Fundamentos e conceitos básicos;
2. Função poder;
3. Testes mais poderosos e Lema de Neyman-Pearson;
4. Teste da razão de verossimilhanças generalizada.

1. FUNDAMENTOS E CONCEITOS BÁSICOS

1.1 Hipótese Estatística

Hipótese $\Rightarrow$ palavra de origem grega $\Rightarrow$ base, fundamento, proposição.

Em um estudo experimental ou observacional (pesquisa) podem ser levantadas várias hipóteses, que são afirmações sobre uma ou mais populações. Essas “suposições” podem ser formuladas como hipóteses estatísticas.

Definição 1.1 - Hipótese estatística: é qualquer afirmação sobre um ou mais parâmetros populacionais ou sobre a distribuição de probabilidade de uma ou mais variáveis aleatórias.

Notação: H (Hipótese)

Exemplos:

1.1 A renda média do trabalhador agrícola no Nordeste é inferior a 3 s.m.

1.2 A distribuição das alturas dos alunos da ESALQ/USP é normal.

Hipótese paramétrica: é uma conjectura sobre θ , estabelecendo uma dicotomia no espaço paramétrico Θ .

No exemplo 1, temos:

$$\Theta_0 = \{\mu \mid \mu \leq 3 \text{ s.m}\}$$

$$\Theta_1 = \{\mu \mid \mu > 3 \text{ s.m}\}$$

Nesse contexto, há sempre duas hipóteses envolvidas em um estudo, a saber:

$H_0 : \theta \in \Theta_0$ (Hipótese nula)

$H_1 : \theta \in \Theta_1$ (Hipótese alternativa)

Obs.: $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$ e $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \phi$

O termo **Hipótese nula** corresponde ao “status” em que nada muda, ou seja afirma-se uma situação postulada, ausência de efeito de tratamentos, valor zero ou de referência para um parâmetro. Em geral, esta hipótese é formulada com o propósito de ser rejeitada.

Definição 1.2 - Tipos de Hipóteses. Quando a hipótese especifica completamente a distribuição de probabilidade de uma ou mais variáveis aleatórias, diz-se que ela é simples, caso contrário é composta.

Exemplo 1.3. Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ uma amostra aleatória da v.a. X com função de densidade ou distribuição de probabilidade $f_X(x, \theta)$, com $\theta \in \Theta$. Dependendo do contexto, podem ser formuladas as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 & (\text{Hipótese simples}) \\ H_1 : \theta = \theta_1 & (\text{Hipótese simples}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 & (\text{Hipótese simples}) \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 & (\text{Hipótese composta}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : \theta \geq \theta_0 & (\text{Hipótese composta}) \\ H_1 : \theta < \theta_0 & (\text{Hipótese composta}) \end{cases}$$

(dentre outras)

Definição 1.3 - Teste de Hipóteses. Um teste de hipóteses é uma regra de decisão, baseada em um conjunto de procedimentos estatísticos alicerçados na teoria da probabilidade, que consiste em rejeitar ou não a hipótese H_0 com base na informação contida na amostra aleatória.

Exemplo 1.4. Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim N(\mu, 100)$ e considere as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq 180 \\ H_1 : \mu > 180 \end{cases}$$

Uma regra de decisão pode ser: Rejeitar H_0 se $\bar{X} > 180 + \frac{196}{\sqrt{n}}$.

Um aspecto fundamental da metodologia dos testes de hipóteses é especificar uma função da amostra aleatória $W(X_1, X_2, \dots, X_n)$, chamada de estatística do teste com as seguintes propriedades:

- i. A distribuição de W , sob H_0 verdadeira, deve ser conhecida ao menos aproximadamente;
- ii. O valor da estatística W com base na amostra aleatória é usada para rejeitar ou não H_0 .

Definição 1.4 - Região Crítica. Um teste de hipóteses particiona o espaço amostral associado à amostra aleatória, $\mathbb{X}$, em duas regiões, a saber:

Região crítica ou de rejeição de $H_0 \Rightarrow C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X} \text{ para os quais rejeita-se } H_0\}$

Região de não rejeição de $H_0 \Rightarrow C^C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X} \text{ para os quais não se rejeita } H_0\}$

Observe que:

$$C \cup C^C = \mathbb{X} \quad \text{e} \quad C \cap C^C = \phi$$

Para o exemplo 1.4, temos:

$$C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X} \mid \bar{X} > 180 + \frac{196}{\sqrt{n}}\}$$

$$C^C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X} \mid \bar{X} \leq 180 + \frac{196}{\sqrt{n}}\}$$

Exemplo 1.5. Uma urna contém duas moedas viciadas, com probabilidades de cara iguais a 0,3 e 0,6, respectivamente. Retira-se uma moeda aleatoriamente e lança-a três vezes. Deseja-se testar:

$$H_0 : \pi = 0,3 \quad \text{versus} \quad H_1 : \pi = 0,6$$

O espaço amostral é:

$$\mathbb{X} = \{(0, 0, 0); (1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1); (1, 1, 0); (1, 0, 1); (0, 1, 1); (1, 1, 1)\}$$

Uma possível regra de decisão é rejeitar H_0 se $\sum_{i=1}^3 x_i > 1$.

Com isso temos:

$$C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X} \mid x_1 + x_2 + x_3 > 1\}$$

$$C^C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X} \mid x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\}$$

Definição 1.5 - Função teste. A função teste é definida pela informação da amostra aleatória, também chamada de função crítica, tal que:

$$\varphi(\mathbf{X}) : \mathbb{X} \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\varphi(\mathbf{X}) : \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} \in C \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \in C^C \end{cases}$$

Observa-se que:

$$E[\varphi(\mathbf{X})] = P[\mathbf{x} \in C]$$

Definição 1.6 - Tipos de erros. Em um problema de teste de hipóteses podem ser cometidos dois tipos de erros, a saber:

Erro tipo I: é o erro que pode ser cometido quando decidimos por rejeitar H_0 , sendo esta verdadeira.

Erro tipo II: é o erro que pode ser cometido quando decidimos por não rejeitar H_0 , sendo esta falsa.

Tabela 1: Decisão e tipos de erros

Decisão	H_0	
	verdadeira	falsa
Rejeitar H_0	Erro I	Decisão correta
Não Rejeitar H_0	Decisão correta	Erro II

Na prática não sabemos se H_0 é verdadeira ou falsa. Podemos quantificar as probabilidades associadas a estes erros.

$$\alpha = P[\text{Erro tipo I}] = P[\text{Rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}]$$

$$\beta = P[\text{Erro tipo II}] = P[\text{Não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}]$$

A situação ideal em um teste de hipóteses é aquela em que estas probabilidades são relativamente “baixas”, o que, em geral, nem sempre ocorre.

Observação:

$$\downarrow \alpha \Rightarrow \beta \uparrow \qquad n \rightarrow \infty \Rightarrow \downarrow \alpha \simeq \beta \downarrow$$

O principal tipo de erro a ser controlado em um teste é o erro tipo I, quando então assumimos um “risco” que estamos dispostos a correr ao rejeitar H_0 . A sua probabilidade de ocorrência define o nível de significância do teste.

$$\alpha \text{ (nível de significância do teste)} \qquad \gamma = 1 - \alpha \text{ (nível de confiança do teste)}$$

Exemplo 1.6. O consumo per capita mensal de um produto historicamente tem sido considerado uma variável aleatória normal com média igual a 8 kg e desvio padrão 2 kg. Desconfia-se que mudanças na Economia e nos hábitos alimentares das pessoas podem ter provocado a diminuição do consumo médio. Para avaliar esta questão foi selecionada uma amostra de 25 indivíduos para os quais obteve-se $\sum_{i=1}^n x_i = 180$ kg. Ao nível de significância de 5% o que podemos concluir?

Definição 1.7 - Nível descritivo de um teste. Uma alternativa para a tomada de decisão, implementada nos *softwares*, é o nível descritivo de um teste (“p-valor”). Seja:

$$\alpha^* = \text{p-valor}$$

O nível descritivo é a probabilidade, sob H_0 verdadeira, de se obterem estimativas ainda mais desfavoráveis do que aquela evidenciada pela amostra aleatória (a luz de H_1). “Pequenos valores” para α^* evidenciam que H_0 é falsa.

Para o exemplo 1.6, tem-se:

$$\alpha^* = P(\bar{X} < 7,2 \mid \mu = 8,0) = P(Z < -2,0) = 0,0228$$

2. FUNÇÃO PODER OU POTÊNCIA DE UM TESTE

Definição 2.1: Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de X com função de densidade ou distribuição de probabilidade $f_X(x, \theta)$, com $\theta \in \Theta$ e sejam as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \theta \in \Theta_0 \\ H_1 : \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

em que $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$. E seja a função teste:

$$\varphi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} \in C; \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \in C^c. \end{cases}$$

A Função poder do teste $\varphi(\mathbf{X})$ é definida por:

$$\pi_\varphi(\theta) = P(\text{Rejeitar } H_0 \mid \theta) = P(\mathbf{x} \in C) = E[\varphi(\mathbf{X})].$$

Exemplo 2.1: Especificar a função poder associada ao teste de hipóteses do exemplo 1.6, em que:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 8,0 \\ H_1 : \mu < 8,0 \end{cases}$$

$$\varphi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \bar{X} < 7,34; \\ 0 & \text{se } \bar{X} \geq 7,34. \end{cases}$$

Solução:

$$\pi_{\varphi}(\theta) = P(\bar{X} < 7,34 \mid \mu) = P\left(Z < \frac{7,34 - \mu}{0,4}\right) = \Phi\left(\frac{7,34 - \mu}{0,4}\right).$$

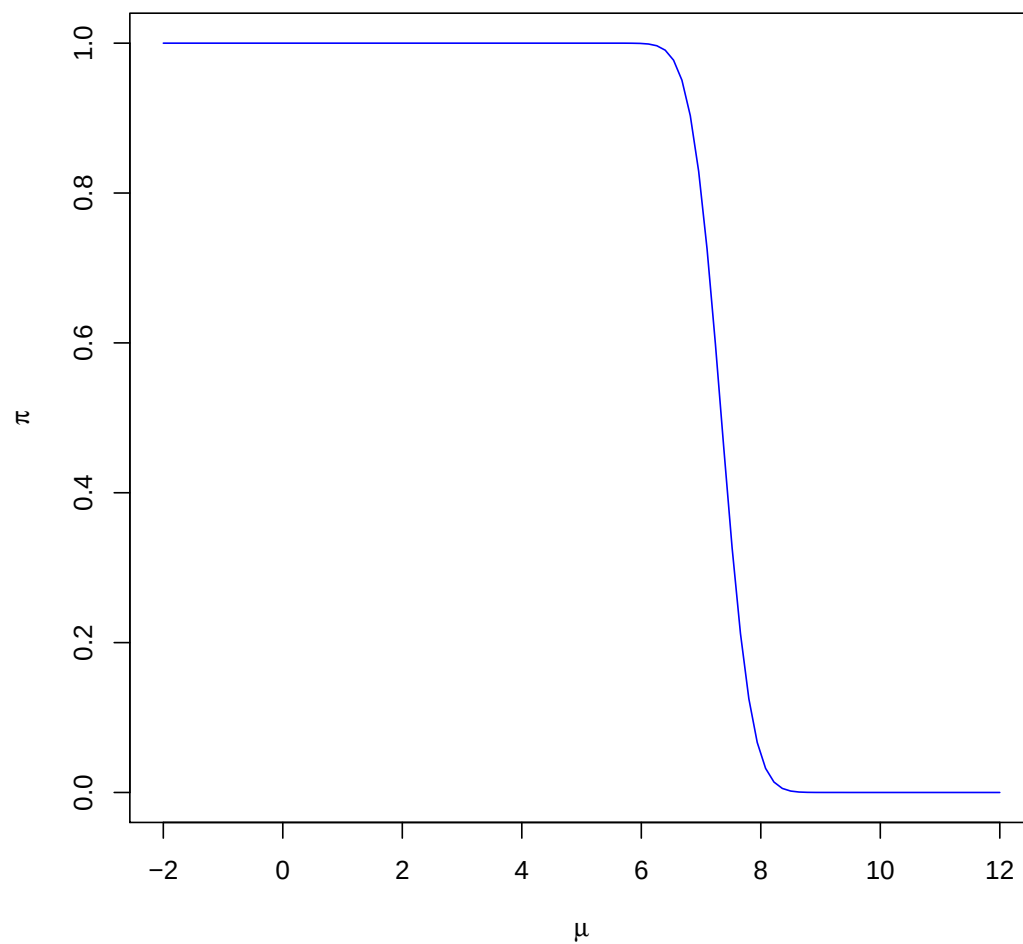


Figura 1: Função poder associada ao teste $\varphi(\mathbf{X})$.

3. TESTES MAIS PODEROSOS

Considere $X_1, X_2, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de X com função de densidade ou distribuição de probabilidade $f_X(x, \theta)$, com $\theta \in \Theta$ e sejam as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \theta \in \Theta_0 \\ H_1 : \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

Localização do problema: Fixado o nível de significância α queremos especificar um teste $\varphi(\mathbf{X})$ de região crítica C^* de tal forma que se tenha a menor probabilidade de se cometer o erro tipo II, ou seja buscamos testes com maior poder.

Podemos considerar três situações:

1. H_0 simples e H_1 simples;
2. H_0 simples e H_1 composta;
3. H_0 composta e H_1 composta.

Exemplo 3.1- (Bolfarine e Sandoval, pág. 94) Considere o problema de se testar $H_0 : \theta = \theta_0$ versus $H_1 : \theta = \theta_1$, com uma única observação da variável aleatória X com distribuição:

X	0	1	2	3	4	5
$f(x, \theta_0)$	0,02	0,03	0,05	0,05	0,35	0,50
$f(x, \theta_1)$	0,04	0,05	0,08	0,12	0,41	0,30

Encontre o teste mais poderoso para estas hipóteses de nível $\alpha = 0,05$.

Observação: Na prática, buscamos minimizar uma combinação linear das probabilidades dos dois tipos de erros, $a(\alpha) + b(\beta)$, o que equivale a:

$$\frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \theta_1)}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \theta_0)} > \frac{a}{b} \quad b > 0$$

Definição 3.1 - Em um problema de teste de hipóteses, em que ambas as hipóteses $H_0 : \theta = \theta_0$ e $H_1 : \theta = \theta_1$ são simples, um teste $\varphi(\mathbf{X})$ de nível α é dito mais poderoso para se testar H_0 contra H_1 se entre todos os outros possíveis testes, digamos $\delta(\mathbf{X})$, de nível α , se verifique:

$$E[\varphi(\mathbf{X})] \geq E[\delta(\mathbf{X})]$$

LEMA DE NEYMAN-PEARSON

Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de X com função de densidade ou distribuição de probabilidade $f_X(x, \theta)$, com $\theta \in \Theta$ e considere as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta = \theta_1 \end{cases}$$

O teste $\varphi(\mathbf{X})$ de nível α dado por:

$$\varphi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{se } f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \theta_1) > c f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \theta_0) \\ 0 & \text{se } f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \theta_1) \leq c f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \theta_0) \end{cases}$$

é definido como o teste mais poderoso (M.P.) de nível α para se testar H_0 versus H_1 .

A constante c deve ser especificada de tal forma que o nível do teste seja α .

Exemplo 3.2 - Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, com σ^2 conhecida e sejam as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu = \mu_1 (\mu_1 > \mu_0) \end{cases}$$

Encontrar o teste $\varphi(\mathbf{X})$ mais poderoso de nível α para se testar as hipóteses acima.

A título de ilustração considere $X_1, X_2, \dots, X_9$ uma a.a. de $X \sim N(\mu, 1)$ e as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu = 1 \end{cases}$$

Obter a função crítica para $\alpha = 0,05$. Calcular a probabilidade do erro tipo II.

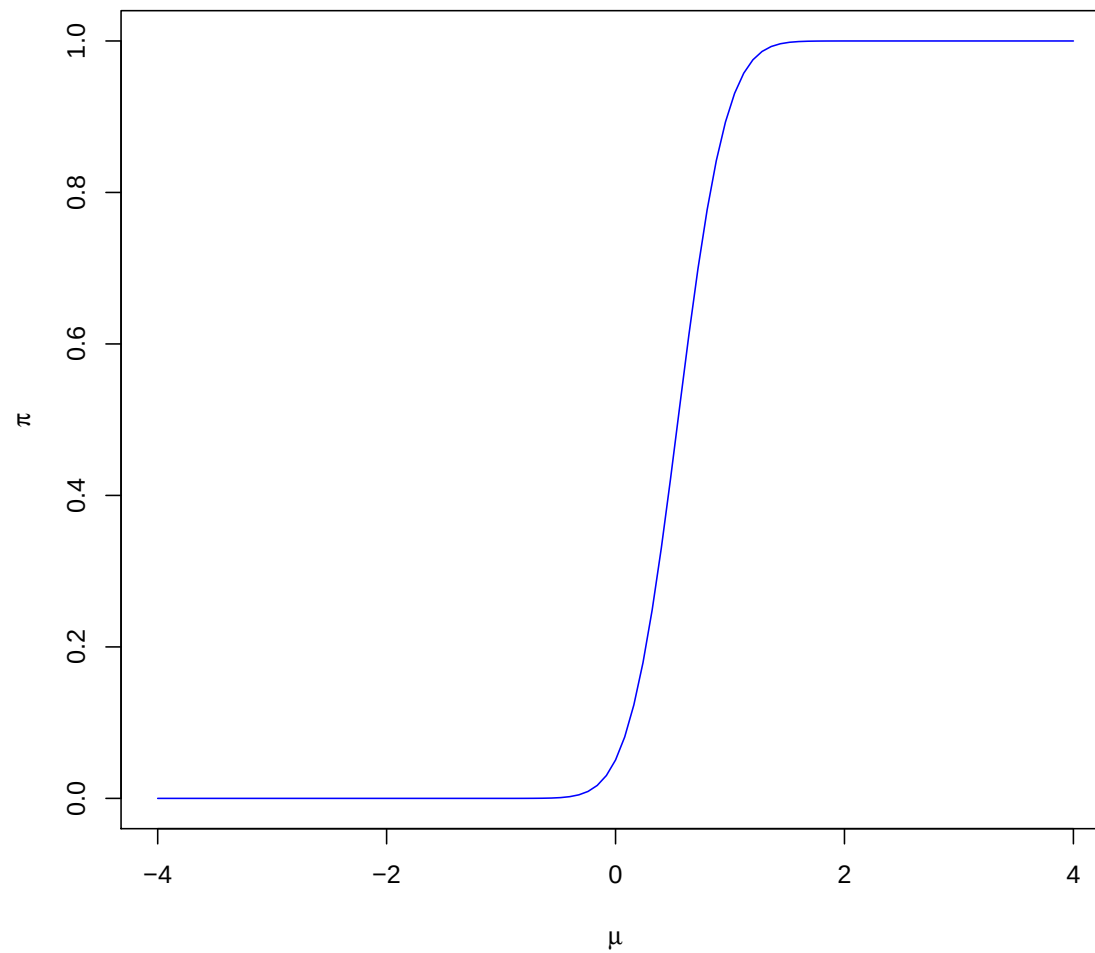


Figura 2: Função poder associada ao teste $\varphi(\mathbf{X}) : H_0 : \mu = 0$ versus $H_1 : \mu = 1$

TESTES UNIFORMEMENTE MAIS PODEROSOS

Teorema 3.1 - Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de X com função de densidade ou distribuição de probabilidade $f_X(x, \theta)$, com $\theta \in \Theta$ e sejam as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 & (\text{simples}) \\ H_1 : \theta \in \Theta_1 & (\text{composta}) \end{cases}$$

O teste $\varphi(\mathbf{X})$, de nível α , como mais poderoso para se testar $H_0 : \theta = \theta_0$ versus $H_1 : \theta = \theta_1$, para qualquer $\theta_1 \in \Theta_1$, é também o teste uniformemente mais poderoso para se testar $H_0 : \theta = \theta_0$ versus $H_1 : \theta \in \Theta_1$.

TESTES UNIFORMEMENTE MAIS PODEROSOS

Teorema 3.2 - Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de X com função de densidade ou distribuição de probabilidade $f_X(x, \theta)$, com $\theta \in \Theta$ e considere as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \theta \in \Theta_0 \text{ (composta)} \\ H_1 : \theta \in \Theta_1 \text{ (composta)} \end{cases}$$

Sem perda de generalidade admita:

$$\begin{cases} H_0 : \theta \leq \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases}$$

No caso em que $X_1, X_2, \dots, X_n$ seguem uma distribuição da família exponencial, temos que o teste $\varphi(\mathbf{X})$ de nível α dito uniformemente mais poderoso para se testar $H_0 : \theta = \theta_0$ versus $H_1 : \theta > \theta_0$, para qualquer $\theta_0 \in \Theta$, é também o teste uniformemente mais poderoso para se testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ versus $H_1 : \theta > \theta_0$.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE

Testes uniformemente mais poderosos não existem para hipóteses dos tipos:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} H_0 : \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \text{ ou } \theta > \theta_1 \end{cases}$$

Para esses casos $\Rightarrow$ teste da razão de verossimilhanças generalizada (T.R.V.G.).

4. TESTE DA RAZÃO DE VEROSSIMILHANÇAS GENERALIZADA

Definição 4.1 - Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de X com função de densidade ou distribuição de probabilidade $f_X(x, \theta)$, com $\theta \in \Theta$ e sejam as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \theta \in \Theta_0 \\ H_1 : \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

e seja a estatística:

$$\lambda(\mathbf{X}) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta, \mathbf{x})}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta, \mathbf{x})}$$

O T.R.V.G. é definido por:

$$\varphi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda(\mathbf{X}) < c \\ 0 & \text{se } \lambda(\mathbf{X}) \geq c \end{cases}$$

OBSERVAÇÕES

1. $0 \leq \lambda(\mathbf{X}) \leq 1$;
2. A constante c deve ser especificada de tal forma que o nível do teste seja α .

RESUMO

1. Encontrar E.M.V. $\hat{\theta}$ de $\theta \forall \theta \in \Theta$;
2. Encontrar E.M.V. $\tilde{\theta}$ de $\theta \forall \theta \in \Theta_0$;
3. Calcular $\lambda(\mathbf{X}) = \frac{L(\tilde{\theta}, \mathbf{x})}{L(\hat{\theta}, \mathbf{x})}$;
4. Calcular a constante c de tal forma que $\alpha = P(h(\lambda(\mathbf{X})) < c)$.

Exemplo 4.1 - (Bolfarine e Sandoval, 2002, pág 105) Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu, 1)$. Encontre o T.R.V.G. para as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

Considere neste exemplo que $\mu_0 = 0$, $\alpha = 0,05$, $n = 9$ e $\sum_{i=1}^9 X_i = 3,4$. Qual a decisão? Qual o gráfico da função poder?

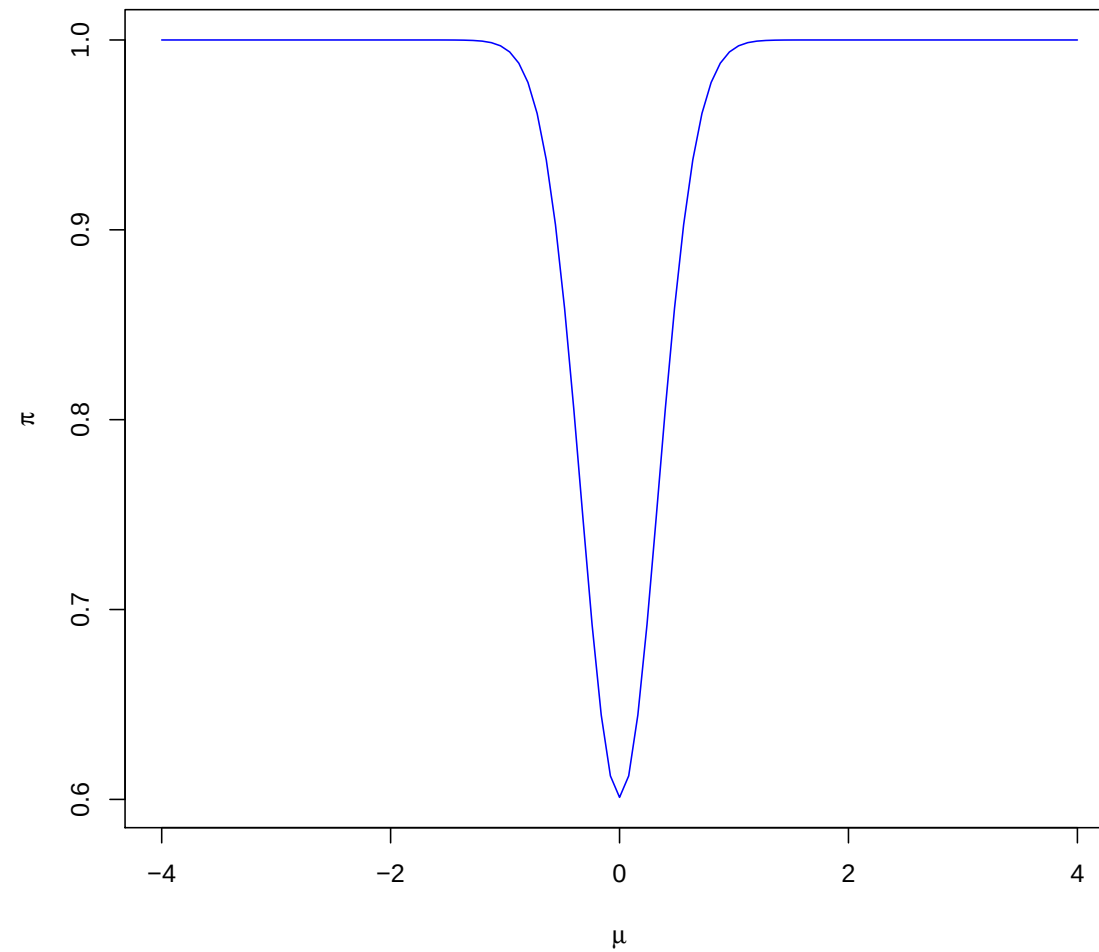


Figura 3: Função poder associada ao teste $\varphi(\mathbf{X}) : H_0 : \mu = 0$ versus $H_1 : \mu \neq 0$

Teorema 4.1 - Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória X com função de densidade ou distribuição de probabilidade $f_X(x, \theta)$, com $\theta \in \Theta$. Sob condições de regularidade e $\theta \in \Theta_0$, tem-se assintoticamente:

$$-2 \log[\lambda(\mathbf{X})] \rightarrow \chi_v^2$$

em que v é a diferença entre o número de parâmetros não especificados em Θ e o número de parâmetros não especificados em Θ_0 .

Exemplo 4.2 - Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim \text{Poisson}(\theta)$. Considere as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = 8 \\ H_1 : \theta \neq 8 \end{cases}$$

Construa um T.R.V.G. de nível α para estas hipóteses.

T.R.V.G.: CASO MULTIPARAMÉTRICO

Considere uma a.a. de $X \sim f_X(x, \boldsymbol{\theta})$, em que $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ é um vetor de parâmetros, com $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset R^k$. Suponha que se deseje testar as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \\ H_1 : \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0 \end{cases}$$

A estatística da razão de verossimilhanças é dada por:

$$\Lambda = \frac{L(\boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{x})}{L(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x})} \quad (1)$$

sendo que sob condições de regularidade, tem-se assintoticamente:

$$-2 \ln(\Lambda) = 2[\ln(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) - \ln(\boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{x})] \rightarrow \chi_v^2 \quad (2)$$

em que $v = \text{dimensão } (\Theta) - \text{dimensão } (\Theta_0)$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOLFARINE, H.; SANDOVAL, M. C. **Introdução à Inferência Estatística**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001, 125 p.

MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D. C. **Introduction to the Theory of Statistics**, 3^a ed., McGraw-Hill, 1974, 564 p.

MURTEIRA, B. J. F. **Probabilidades e Estatística**, vol. II. Lisboa: McGraw-Hill de Portugal, 2^a ed., 1990, 480 p.