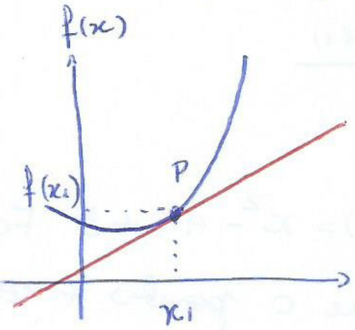
DERIVADAS

Vamos supor que $P(x_1, f(x_1))$ seja um ponto do gráfico de uma função $f(x)$ e que queremos obter a reta tangente ao gráfico em P.



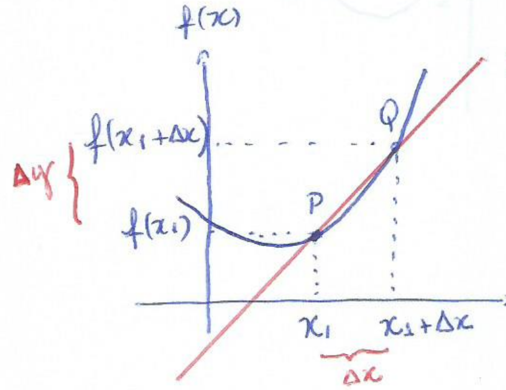
reta tangente $y - y_1 = m(x - x_1)$

ou

$y = mx + b$

m é o coeficiente angular da reta tangente

Para obter a equação da reta tangente precisamos obter o coeficiente angular da reta (m). Para isso, vamos considerar um outro ponto Q, também pertencente ao gráfico da $f(x)$, e que seja próximo ao ponto P. A reta que passa nos dois pontos (P e Q) é denominada reta secante, ou seja,



reta secante $y = m_s x + b$

$\downarrow$

coeficiente angular da reta secante

- coordenadas do Ponto P $\Rightarrow P(x_1; f(x_1))$
- coordenadas do Ponto Q $\Rightarrow Q(x_1 + \Delta x; f(x_1 + \Delta x))$

Logo, o coeficiente angular da reta secante (m_s) que passa pelos pontos P e Q é dado por:

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Se fizermos o ponto Q mover-se ao longo da curva $f(x)$ em direção ao ponto P isto implica em dizer que o Δx está ficando cada vez menor ($\Delta x \to 0$). Com isso, a reta secante tenderá para reta tangente no ponto P e o coeficiente angular (m_s) tende para o coeficiente angular da reta tangente (m). Ou seja,

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} m_s = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

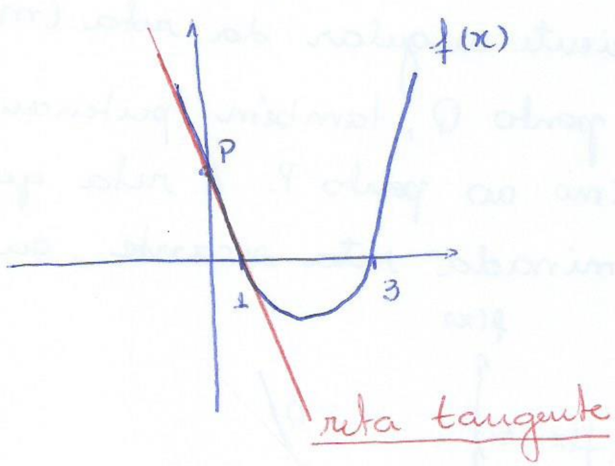
EXEMPLO: Considere a seguinte função $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Faça um esboço do gráfico da função. Marque o ponto P com coordenadas $(0;3)$ e encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto P indicado.

→ Gráfico da $f(x)$ e ponto P.

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(3) = 4$$

$$x = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x' = 3 \\ x'' = 1 \end{cases}$$



→ Coeficiente angular da tangente (m)

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Se o ponto P tem coordenadas $P(0;3)$ isso indica que:

$$x_1 = 0 \qquad f(x_1) = 3$$

$$x_1 + \Delta x \Rightarrow f(\cancel{x_1}^{0} + \Delta x) = f(\Delta x) = (\Delta x)^2 - 4(\Delta x) + 3$$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 - 4(\Delta x) + \cancel{3} - \cancel{3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}[\Delta x - 4]}{\cancel{\Delta x}} =$$

$$= 0 - 4 = \underline{-4}$$

Logo, a equação da reta tangente ao gráfico da $f(x)$ no ponto P é dada por:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = -4(x - 0)$$

$$\boxed{y = -4x + 3}$$

EXERCÍCIO: Considere a função $f(x) = 2x - x^2$.

- Faça um esboço do gráfico da função
- Marque o ponto $P(1, 1)$
- Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto P indicado.

Taxa de Variação Média e Instantânea

Todos os dias pensamos na variação de grandezas, como por exemplo, o tempo gasto para chegar à Universidade, o quanto engordamos ou emagrecemos no último mês, a variação da temperatura num dia específico, e assim por diante.

Em geral, quando uma grandeza (ou variável) y está expressa em função de uma outra (variável x), observamos que, para uma dada variação de x, ocorre, em correspondência, uma dada variação de y. Desta forma, a taxa de variação média (TVM) é dada por:

$$TVM = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

O conhecimento da TVM não nos fornece uma quantidade razoável de informações para podermos decidir como a variável dependente (variável y) se comporta em relação à variável independente (variável x) em um ponto específico. Para ~~tanto~~ tanto, o conhecimento da taxa de variação em cada ponto do domínio da $f(x)$ será muito mais eficaz e a essa taxa damos o nome de taxa de variação instantânea.

EXEMPLO: Um reservatório de água está sendo esvaziado para limpeza. A quantidade de água no reservatório, em litros, t horas após o escoamento ter ~~começado~~ é dada por:

$$V = 50(80 - t)^2.$$

a) Qual a taxa de variação média do volume de água no reservatório durante as 10 primeiras horas de escoamento?

$$TVM = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{[50(80-10)^2] - [50(80-0)^2]}{10}$$

$$TVM = \frac{-75.000}{10} = -7.500 \text{ litros/hora.}$$

Esse resultado indica que o volume de água está diminuindo (por isso o sinal negativo) a uma taxa média de 7.500 litros por hora, durante as 10 primeiras horas de escoamento.

b) Qual é a taxa de variação do volume de água no reservatório após 8 horas de escoamento?

$$T.V.Instantânea = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$x = 8h \Rightarrow f(x) = 50(80-8)^2 = 259.200$$

$$x + \Delta x = \Rightarrow f(8+\Delta x) = 50[80 - (8+\Delta x)]^2$$

$$= 50[72 - \Delta x]^2$$

$$= 50[72^2 - 2.(72)(\Delta x) + (\Delta x)^2]$$

$$= 50[5.184 - 144\Delta x + \Delta x^2]$$

$$= 259200 - 7200\Delta x + 50\Delta x^2$$

$$TVInst = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(259.200 - 7200\Delta x + 50\Delta x^2) - (259.200)}{\Delta x}$$

$$= \lim \frac{-7200\cancel{\Delta x} + 50\Delta x^{\cancel{2}}}{\cancel{\Delta x}} = \lim -7200 + 50\Delta x = -7.200 \text{ litros/}$$

c) Qual a taxa de variação do volume de água no reservatório após 2 horas de escoamento?

$x = 2h \qquad f(x) = 50(80-2)^2 = 304.200$

$x + \Delta x \Rightarrow f(2+\Delta x) = 50[80 - (2+\Delta x)]^2$

$= 50[78 - \Delta x]^2$

$= 50[78^2 - 2(78)(\Delta x) + (\Delta x)^2]$

$= 50[6.084 - 156\Delta x + \Delta x^2]$

$= 304.200 - 7800\Delta x + 50\Delta x^2$

$$\text{TVInst.} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[304.200 - 7800\Delta x + 50\Delta x^2] - [304.200]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-7.800\Delta x + 50\Delta x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (-7800 + 50\Delta x) = -7.800 \text{ litros/hora}$$

d) Qual é a quantidade de água que sai do reservatório nas 5 primeiras horas?

$\Delta y = ? \Rightarrow V(0) - V(5)$

$\Delta V = [50(80-0)^2] - [50(80-5)^2]$

$= 320.000 - 281.250 = 38.750\ l$

EXERCÍCIO: Calcula-se que a produção semanal de certa fábrica seja de $Q(x) = -x^3 + 60x^2 + 1200x$ unidades, onde x representa o número de operários da fábrica. Atualmente, há 30 operários trabalhando.

Avalie a variação que ocorrerá na produção semanal da fábrica caso se acrescente um operário à força de trabalho existente