Limites no Infinito ($x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$)

NOÇÃO INTUITIVA

Considere a função $f(x)$ definida por:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}\}$ "veja que não há restrições no domínio pois x^2+1 nunca será igual a zero"

$\Downarrow$

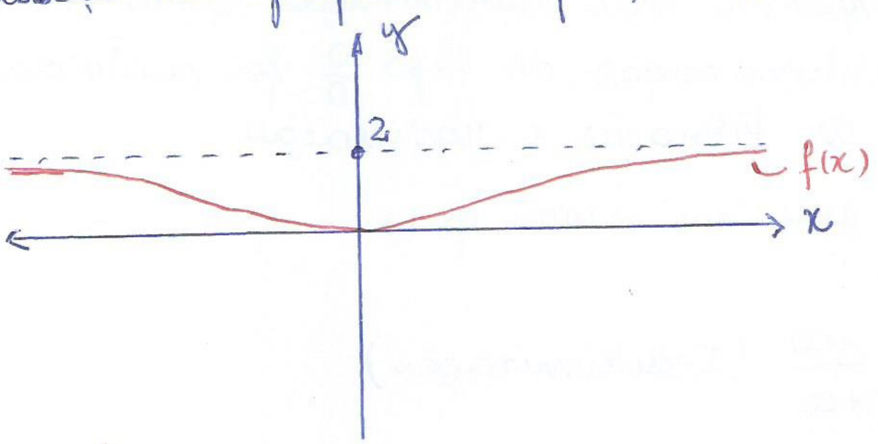
$\boxed{]-\infty; +\infty[}$

Alguns valores da função para diferentes valores de x são:

$\leftarrow -\infty$ $\qquad\qquad$ $\rightarrow +\infty$

x	-10.000	-1.000	-100	-10	-1	0	1	10	100	1.000	10.000
$f(x)$	1,9999...	1,999...	1,9998	1,98	1	0	1	1,98	1,9998	1,9999...	1,9999...

Um esboço do gráfico da função $f(x)$ é dado por:



Podemos perceber que, tanto pela tabela como pelo gráfico, que à medida que x cresce ilimitadamente ($x \to +\infty$) ou decresce ilimitadamente ($x \to -\infty$), os valores da função $f(x)$ se aproximam cada vez mais do valor 2.

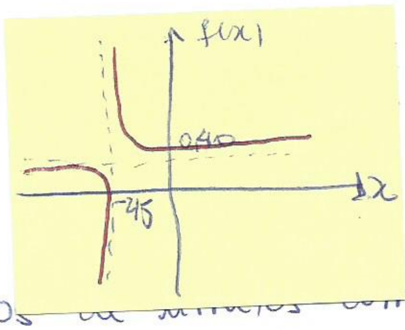
Assim, utilizando a notação de limites, podemos escrever:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2.$$

EXERCÍCIO: Calcular, de forma intuitiva, o limite da função a seguir para valores de x crescendo (e decrescendo) ilimitadamente.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{5x+2} \quad e \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x+1}{5x+2}$$

x	-10.000	-1.000	-100	-10	-1	0	1	10	100	1.000	10.000
$f(x)$	$0{,}399\ldots$			0.396	0.333	$+\frac{1}{2}$	0.42				0.4000



Resultados de limites como: $\frac{0}{0}$; $\frac{c}{0}$; $\frac{+\infty}{+\infty}$; $\frac{+\infty}{-\infty}$; $\frac{-\infty}{+\infty}$; $\frac{-\infty}{-\infty}$ são consideradas no cálculo como "indeterminações" e precisamos de artifícios para resolver essas indeterminações. Vimos na aula passada que a indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ foi resolvida utilizando as regras de fatoração e radiciação.

Para a função do exercício temos que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{5x+2} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{(Indeterminação)}$$

Para resolver esse tipo de indeterminação vamos precisar da seguinte propriedade (P4) e de um artifício que será apresentado a seguir.

P4) Para todo número natural n e para $b \in \mathbb{R}^*$, tem-se:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{b}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{b}{x^n} = 0$$

O artifício mencionado anteriormente consiste em identificar na função (no numerador e denominador) a variável x com sua maior potência e dividir todos os termos da função por este x^n. ③

EXEMPLO:

a) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 8x + 5} = \frac{+\infty}{-\infty}$$

Antifício: a variável x com a maior potência é x^3. logo, você deve dividir todos os termos por x^3.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^3} - \frac{x}{x^3} + \frac{3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{8x}{x^3} + \frac{5}{x^3}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{\frac{2}{x}}^{\to 0} - \cancel{\frac{1}{x^2}}^{\to 0} + \cancel{\frac{3}{x^3}}^{\to 0}}{1 - \cancel{\frac{8}{x^2}}_{\to 0} + \cancel{\frac{5}{x^3}}_{\to 0}} = \frac{0}{1} = 0$$

pela P4 todos esses termos são "zero"

b) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 7}{5x^2 - 8} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

Antifício: dividir todos os termos por x^2.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{x^2} + \frac{7}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2} - \frac{8}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{\frac{1}{x}}^{\to 0} + \cancel{\frac{7}{x^2}}^{\to 0}}{5 - \cancel{\frac{8}{x^2}}_{\to 0}} = \frac{0}{5} = 0$$

OBS: O Resultado sempre será zero? NÃO

c) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^4 - 7x^2 + 2}{2x^4 + 1}$$

Antifício: dividir todos os termos por x^4

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{3x^4}{x^4} - \frac{7x^2}{x^4} + \frac{2}{x^4}}{\frac{2x^4}{x^4} + \frac{1}{x^4}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3 - \cancel{\frac{7}{x^2}}^{\to 0} + \cancel{\frac{2}{x^4}}^{\to 0}}{2 + \cancel{\frac{1}{x^4}}} = \frac{3}{2}$$

EXERCÍCIOS Calcule os limites

a) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3+5x^3}{x^3} =$ R = 5

b) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^3+1}{x^4+5x^3+x+2} =$ R = 0

c) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{2x+3}{3x+2} =$ R = $\frac{2}{3}$

d) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x-1} =$ R = 1

e) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^{100}+x^{99}}{x^{101}-x^{100}} =$ R = 0

Até aqui 21:15

LIMITES INFINITOS (resultado $+\infty$ ou $-\infty$)

Quando no cálculo do limite de uma função f(x) o resultado do limite (L) cresce (ou decresce) ilimitadamente, damos a ele o nome de "limite infinito", ou seja, são limites infinitos:

$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Esses quatro últimos são chamados de limites infinitos, no infinito.

Antes de efetuar os cálculos com "limites infinitos" vejamos algumas propriedades adicionais

P5) Se $\lim_{x\to a} h(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a} w(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = c$ (constante)

então:

i) $\lim_{x\to a} [\overset{+\infty}{h(x)} + \overset{c}{g(x)}] = +\infty$

$\lim_{x\to a} [\overset{-\infty}{w(x)} + \overset{c}{g(x)}] = -\infty$

ii) se $c>0$, então

$\lim_{x\to a} [\overset{+\infty}{h(x)} \cdot \overset{c>0}{g(x)}] = +\infty$

$\lim_{x\to a} [\overset{-\infty}{w(x)} \cdot \overset{c>0}{g(x)}] = -\infty$

iii) se $c<0$, então

$\lim_{x\to a} [\overset{+\infty}{h(x)} \cdot \overset{c<0}{g(x)}] = -\infty$

$\lim_{x\to a} [\overset{-\infty}{w(x)} \cdot \overset{c<0}{g(x)}] = +\infty$

iv) $\lim_{x\to a} \left[\frac{g(x)}{h(x)}\right] = \lim_{x\to a} \left[\frac{g(x)}{w(x)}\right] = 0$

P6) Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = c$ (constante não nula), então:

Para $c>0$

- se a função $f(x)>0$, então

$\lim_{x\to a} \left[\frac{g(x)}{f(x)}\right] = +\infty$

- se a função $f(x)<0$, então

$\lim_{x\to a} \left[\frac{g(x)}{f(x)}\right] = -\infty$

Para $c<0$

- se a função $f(x)>0$, então

$\lim_{x\to a} \left[\frac{g(x)}{f(x)}\right] = -\infty$

- se a função $f(x)<0$, então:

$\lim_{x\to a} \left[\frac{g(x)}{f(x)}\right] = +\infty$

OBS: Essas propriedades (P5 e P6) continuam válidas se $x \to a$ for substituído por $x \to a^+$ e $x \to a^-$.

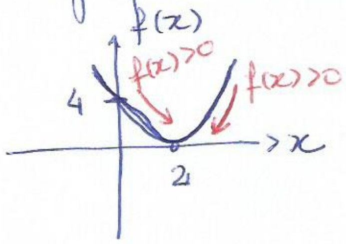
EXEMPLO Calcular o limite

$$\lim_{x \to 2} \frac{\overbrace{3}^{g(x)}}{\underbrace{(x-2)^2}_{f(x)}} = \frac{3}{0}$$

- Inicialmente, temos que notar que $\lim_{x \to 2} g(x) = 3$ $(c > 0)$

- Depois, avaliar o comportamento da função do denominador, no caso a $f(x)$. Como ela aproxima-se do zero (seu resultado), por valores positivos ($f(x) > 0$) ou negativo ($f(x) < 0$).

Fazer o gráfico da $f(x)$! $f(x) = (x-2)^2$



Como a função $f(x)$ aproxima-se de seu resultado "zero" por valores positivos temos que:

$$\lim_{x \to 2} \frac{3}{(x-2)^2} = \frac{3^{\,c>0}}{0_{\,f(x)>0}} = +\infty$$

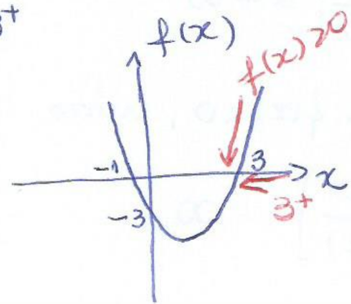
EXEMPLO Calcular o limite

$$\lim_{x \to 3^+} \left[\frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} \right] = \frac{3^2 + 3 + 2}{3^2 - 2(3) - 3} = \frac{14}{0}$$

→ Inicialmente, $\lim_{x \to 3^+} g(x) = \lim_{x \to 3^+} (x^2 + x + 2) = 14$ $(c > 0)$

→ Comportamento da $f(x)$.

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$$



Como a função $f(x)$ aproxima-se de zero por valores positivos quando $x \to 3^+$ temos que:

$$\lim_{x\to 3^+}\left[\frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3}\right] = \frac{14^{\;c>0}}{0_{\;f(x)>0}} = \boxed{+\infty}$$

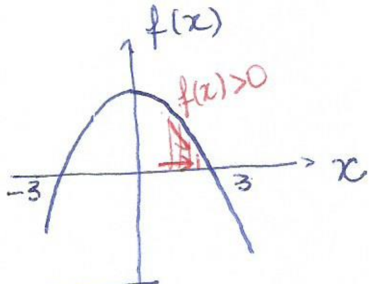
EXEMPLO: Calcule o limite

a) $$\lim_{x\to 3^-}\frac{4x^2}{9-x^2} = \frac{4(3)^2}{9-(3)^2} = \frac{36}{0}$$

$\to \lim_{x\to 3^-} 4x^2 = 36 \; (c>0)$

$\to$ Avaliar a $f(x)$ para $x \to 3^-$

$f(x) = 9 - x^2$

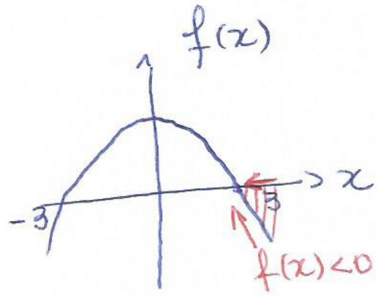


logo, $$\lim_{x\to 3^-}\frac{4x^2}{9-x^2} = \frac{36^{\;c>0}}{0_{\;f(x)>0}} = \boxed{+\infty}$$

b) $$\lim_{x\to 3^+}\frac{4x^2}{9-x^2} = \frac{4(3)^2}{9-(3)^2} = \frac{36}{0}$$

$\to \lim_{x\to 3^+} 4x^2 = 36 \; (c>0)$

$\to$ Avaliar $f(x)$ para $x \to 3^+$



Logo, $$\lim_{x\to 3^+}\frac{4x^2}{9-x^2} = \frac{36^{\;c>0}}{0_{\;f(x)<0}} = \boxed{-\infty}$$

Agora.... O $\lim_{x\to 3}\dfrac{4x^2}{9-x^2}$ existe? NÃO

Como $\lim_{x\to 3^-}\dfrac{4x^2}{9-x^2} \neq \lim_{x\to 3^+}\dfrac{4x^2}{9-x^2}$ o limite $\lim_{x\to 3}\dfrac{4x^2}{9-x^2} \nexists$

ASSÍNTOTAS

Definição: A reta $y = b$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes afirmações é verdadeira:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

"limites no infinito" for uma constante (b)

Definição: A reta $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes afirmações é verdadeira

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \text{ ou } -\infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \text{ ou } -\infty$$

os limites laterais (pelo menos 1 deles) "for um "limites infinitos"

OBS: Em geral, se $D_f = \mathbb{R}$ (função sem restrição no Domínio), então o gráfico de f $\boxed{\text{NÃO}}$ possui assíntotas verticais.

EXEMPLOS

(1) Para função a seguir achar as assíntotas horizontais e verticais do gráfico de f (se houverem) e traçar este gráfico.

$$f(x) = \frac{5x}{2x - 1}$$

1º Passo: Determinar o domínio da função para descobrir se há um valor candidato para ser uma assíntota vertical.

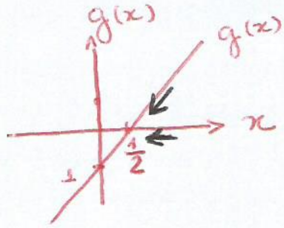
$$Df = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x-1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \tfrac{1}{2}\}$$

Logo, a reta vertical $x = \frac{1}{2}$ é uma candidata a assíntota vertical. Para confirmar, pelo menos um dos limites laterais, $(x \to \frac{1}{2}^+)$ ou $(x \to \frac{1}{2}^-)$, tem que ser um limite infinito (resultado $\pm\infty$).

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{5x}{2x-1} = \frac{5/2}{0} = \boxed{+\infty}$$

$c > 0$

$g(x) > 0$

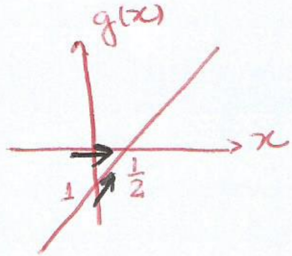


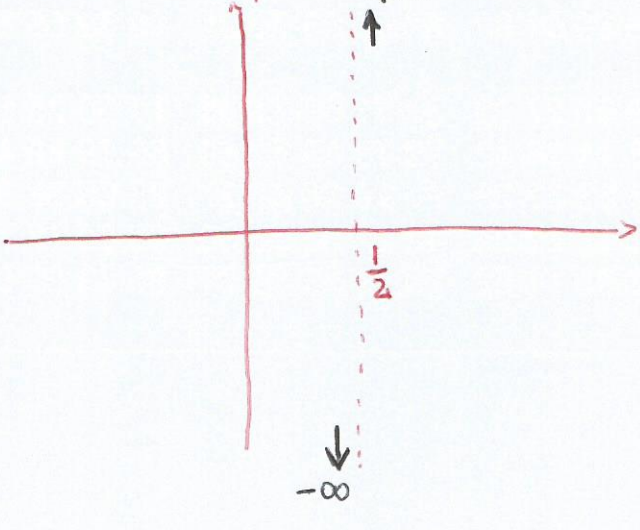
Apenas esse resultado basta para afirmarmos que a reta vertical $x = \frac{1}{2}$ é uma assíntota vertical. Faremos o outro limite lateral $(x \to \frac{1}{2}^-)$ para traçar o gráfico.

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{5x}{2x-1} = \frac{5/2}{0} = \boxed{-\infty}$$

$c > 0$

$g(x) < 0$





OBS: representação gráfica do comportamento da função $f(x) = \frac{5x}{2x-1}$ quando $x \to \frac{1}{2}^+$ e $x \to \frac{1}{2}^-$.

2º Passo: Verificar a existência de assíntotas horizontais calculando os limites no infinito ($x \to +\infty$ e $x \to -\infty$). Se o resultado desses limites for uma constante (b) significa que a reta $y = b$ é uma assíntota horizontal.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x}{2x-1} = \frac{+\infty}{+\infty}$$ (indeterminação) ⇒ divisão de todos os termos pelo x com sua maior potência.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{5x}{x}}{\frac{2x}{x} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5}{2 - \underbrace{\cancel{\frac{1}{x}}}_{0}} = \boxed{\frac{5}{2}}$$

Lembrar P4

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{b}{x^n} = 0$$

Logo, $y = \frac{5}{2}$ é uma assínto horizontal à direita ($x \to +\infty$).

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x}{2x-1} = \frac{-\infty}{-\infty}$$ (indeterminação) ⇒ divisão de todos os termos pelo x com sua maior potência

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x/x}{\frac{2x}{x} - \underbrace{\cancel{\frac{1}{x}}}_{0 (P4)}} = \boxed{\frac{5}{2}}$$

Logo, $y = \frac{5}{2}$ também é uma assíntota horizontal à esquerda ($x \to -\infty$).

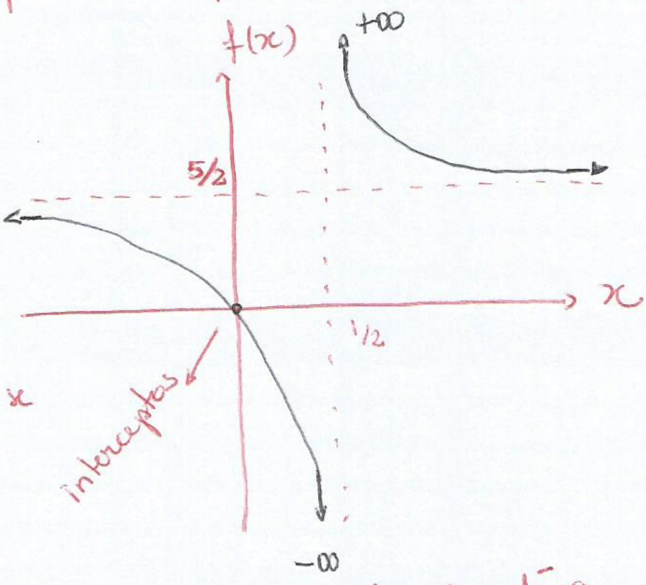
3º Passo: Fazer o gráfico da função $f(x) = \frac{5x}{2x-1}$. Para isso juntar as informações dos passos 1 e 2. e acrescentar as informações de interceptos da função.

intercepto - x : qual o valor de ~~[illegible]~~ x quando $f(x) = 0$?

$$f(x) = \frac{5x}{2x-1} \Rightarrow 0 = \frac{5x}{2x-1} \Rightarrow 0 = 5x \Leftrightarrow \boxed{x=0}$$

Logo, quando $x = 0$; $y = 0$ → a função passa na origem dos eixos.

Gráfico da função. → quando $x \to \frac{1}{2}^+$ a função vai para $+\infty$.



quando $x \to +\infty$ a função estabiliza-se no valor $y = \frac{5}{2}$

quando $x \to -\infty$ a função estabiliza-se em $\frac{5}{2}$

quando $x \to \frac{1}{2}^-$ a função vai para $-\infty$.

EXERCÍCIOS: Para as funções a seguir encontre as assíntotas e trace o gráfico da função.

a) $f(x) = \dfrac{5x}{3x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{2-3x}{3+5x}$

c) $f(x) = \dfrac{-3}{(x+2)^2}$

d) $f(x) = \dfrac{2x^2}{9-x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{2x^2-3x}$

EXERCÍCIO: O custo para remover $x\%$ de resíduos tóxicos num aterro é dado por:

$S(x) = \dfrac{0.8x}{100-x}$ para $0 < x < 100$.

a) Calcule $\lim\limits_{x \to 100^-} S(x)$

b) Interprete o resultado obtido.