Método de Simpson

Integração Numérica

Dado $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$,

obter uma aproximação de:

$$\int_a^b f(x)dx$$

com precisão ϵ.

O Método de Simpson para obter aproximações do valor numérico de integrais definidas,

$$\int_a^b f(x)dx$$

consiste em considerar uma aproximação da forma:

$$f(x) \approx p_2(x)$$

onde $p_2(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual a 2 e, a partir desta aproximação considerar:

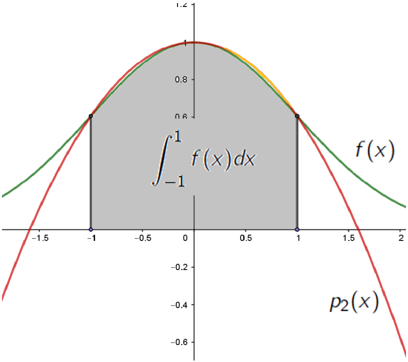
$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_2(x)dx$$

Temos então que o polinômio $p_2(x)$ que interpola estes pontos é:

$$p_2(x) =$$

$$f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} +$$

$$+f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$


$\int_{-1}^{1} f(x)dx$
$f(x)$
$p_2(x)$
1.2
1
0.8
0.6
−0.2
−0.4
−0.6
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2

Temos também que,

$$| E(x) |=| f(x) - p_2(x) | \leq$$

$$\frac{1}{(2+1)!} \max_{\xi \in [a,b]} \left| f^{(2+1)}(\xi) \right| \left| (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \right|$$

Podemos então considerar a aproximação

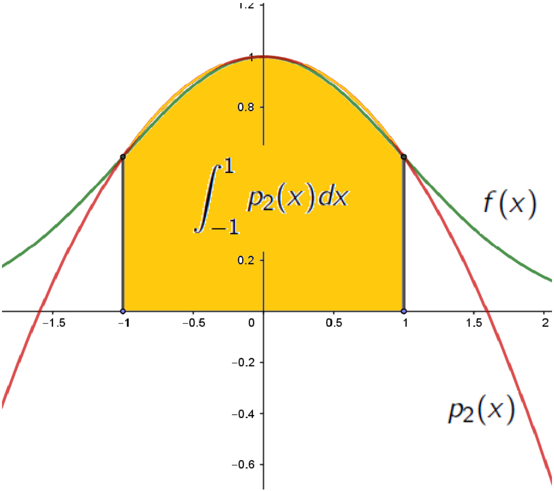
$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_2(x)dx = S_1$$

E a precisão desta aproximação pode ser estimada por:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S_1 \right| = \left| \int_a^b f(x) - \int_a^b p_2(x)dx \right| \leq$$

$$\int_a^b \Big| f(x) - p_2(x) \Big| dx \leq$$

$$\int_a^b \frac{1}{(2+1)!} \max_{\xi \in [a,b]} \left| f^{(2+1)}(\xi) \right| \Big| (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \Big| dx$$


1.2
1
0.8
0.2
−0.2
−0.4
−0.6
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
$\int_{-1}^{1} p_2(x)dx$
$f(x)$
$p_2(x)$

$$S_1 = \int_a^b p_2(x)dx =$$

$$\int_a^b \left\{ f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \right.$$

$$\left. + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} dx \right\} \Longrightarrow$$

$$S_1 = \frac{h}{3}\{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\} \qquad \text{ou}$$

$$\boxed{S_1 = \frac{b-a}{6}\left\{ f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b) \right\}}$$

E para a precisão da aproximação de $\int_a^b f(x)dx$ por S_1 temos a estimativa:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b p_2(x)dx\right| \leq \frac{1}{3!}\max_{\xi\in[a,b]}\left|f^{(3)}(\xi)\right|\times$$

E para a precisão da aproximação de $\int_a^b f(x)dx$ por S_1 temos a estimativa:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b p_2(x)dx \right| \leq \frac{1}{3!} \max_{\xi \in [a,b]} \left| f^{(3)}(\xi) \right| \times$$

$$\left\{ \int_a^{a+h} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)dx + \right.$$

$$\left. - \int_{a+h}^{a+2h} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)dx \right\} =$$

$$\frac{1}{3!} \max_{\xi \in [a,b]} \left| f^{(3)}(\xi) \right| \left\{ \int_0^h y(y-h)(y-2h)dy - \int_0^h (y+h)y(y-h)dy \right\} =$$

$$\frac{1}{12} \max_{\xi \in [a,b]} \left| f^{(3)}(\xi) \right| h^4$$

Exemplo

Exemplo

Obter uma aproximação de:

$$\int_1^3 x^3 dx$$

Exemplo

Obter uma aproximação de:

$$\int_1^3 x^3 dx$$

com precisão $\epsilon = 10^{-5}$.

Exemplo

Obter uma aproximação de:

$$\int_1^3 x^3 dx$$

com precisão $\epsilon = 10^{-5}$.

- $$h = \frac{b-a}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$$

- $$\int_1^3 x^3 dx \approx \frac{h}{3}\{f(1)+4f(2)+f(3)\} = \frac{1}{3}\left\{1^3+4\cdot 2^3+3^3\right\}$$

  $$\int_1^3 x^3 dx \approx 20$$

  Neste exemplo nós podemos estimar a precisão comparando o resultado obtido para a aproximação acima com o valor exato:

  $$\int_1^3 x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 20!!!!$$

A observação importante relacionada a este cálculo é que não se trata de coincidência que a aproximação neste caso é de fato o valor exato. Isto pode ser verificado através do seguinte exercício:

Mostre que:

$$\int_a^b x^3 dx = \frac{x^4}{4}\bigg|_a^b = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4} = \frac{b-a}{6}\left\{a^3 + 4(\frac{a+b}{2})^3 + b^3\right\}$$

Em vista deste fato e de que a fórmula de Simpson fornece o valor exato da integral quando o integrando é um polinômio de grau menor ou igual a 2,

A observação importante relacionada a este cálculo é que não se trata de coincidência que a aproximação neste caso é de fato o valor exato. Isto pode ser verificado através do seguinte exercício:

Mostre que:

$$\int_a^b x^3 dx = \frac{x^4}{4}\bigg|_a^b = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4} = \frac{b-a}{6}\left\{a^3 + 4(\frac{a+b}{2})^3 + b^3\right\}$$

Em vista deste fato e de que a fórmula de Simpson fornece o valor exato da integral quando o integrando é um polinômio de grau menor ou igual a 2, podemos concluir que a fórmula de Simpson resulta no valor exato se o integrando é um polinômio de grau menor ou igual a 3.

A observação importante relacionada a este cálculo é que não se trata de coincidência que a aproximação neste caso é de fato o valor exato. Isto pode ser verificado através do seguinte exercício:

Mostre que:

$$\int_a^b x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_a^b = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4} = \frac{b-a}{6}\left\{a^3 + 4(\frac{a+b}{2})^3 + b^3\right\}$$

Em vista deste fato e de que a fórmula de Simpson fornece o valor exato da integral quando o integrando é um polinômio de grau menor ou igual a 2, podemos concluir que a fórmula de Simpson resulta no valor exato se o integrando é um polinômio de grau menor ou igual a 3.

Estas observações sugerem que a estimativa de precisão para a aproximação obtida pelo Método de Simpson pode ser modificada.

Estimativa da precisão para o Método de Simpson

Considere a seguinte aproximação:

$$\int_{x_m-h}^{x_m+h} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_m-h)+4f(x_m)+f(x_m+h)\right)$$

$$E(h) =$$

$$= \int_{x_m-h}^{x_m+h} f(x)dx - \frac{h}{3}\left(f(x_m-h)+4f(x_m)+f(x_m+h)\right)$$

- $$E(0) = 0$$
- $$\frac{dE}{dh}(h) =$$

$$\frac{d}{dh}\left\{\int_{x_m-h}^{x_m+h} f(x)dx - \frac{h}{3}\left[f(x_m-h)+4f(x_m)+f(x_m+h)\right]\right\} =$$

$$= f(x_m+h)+f(x_m-h)-\frac{1}{3}\left[f(x_m-h)+4f(x_m)+f(x_m+h)\right] -$$

$$-\frac{h}{3}\left[f'(x_m+h)-f'(x_m-h)\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left[f(x_m+h)+f(x_m-h)\right] - \frac{h}{3}\left[f'(x_m+h)-f'(x_m-h)\right] - \frac{4}{3}f(x_m)$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{dE}{dh}(0) = 0$$

- $$\frac{d^2E}{dh^2}(h) =$$

$$\frac{d}{dh}\left\{\frac{2}{3}\left[f(x_m+h)+f(x_m-h)\right]-\frac{h}{3}\left[f'(x_m+h)-f'(x_m-h)\right]\right\} =$$

$$= \frac{2}{3}\left[f'(x_m+h)-f'(x_m-h)\right] +$$

$$-\frac{1}{3}\left[f'(x_m+h)-f'(x_m-h)\right]-\frac{h}{3}\left[f''(x_m+h)+f''(x_m-h)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[f'(x_m + h) - f'(x_m - h)\right] - \frac{h}{3}\left[f''(x_m + h) + f''(x_m - h)\right]$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{d^2E}{dh^2}(0) = 0$$

- $$\frac{d^3E}{dh^3}(h) =$$

$$\frac{d}{dh}\left\{\frac{1}{3}\left[f'(x_m+h) - f'(x_m-h)\right] - \frac{h}{3}\left[f''(x_m+h) + f''(x_m-h)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left[f''(x_m+h) + f''(x_m-h)\right] +$$

$$-\frac{1}{3}\left[f''(x_m+h) + f''(x_m-h)\right] - \frac{h}{3}\left[f'''(x_m+h) - f'''(x_m-h)\right] =$$

$$= -\frac{h}{3}\left[f'''(x_m + h) - f'''(x_m - h)\right] =$$

$\Longrightarrow$ (TVM)

$$\frac{d^3E}{dh^3}(h) = -\frac{2h^2}{3}\frac{f'''(x_m + h) - f'''(x_m - h)}{2h}$$

$\Longrightarrow$

existe $\xi_h \in [x_m - h, x_m + h]$ tal que:

$$\frac{d^3E}{dh^3}(h) = -\frac{2h^2}{3}f^{(iv)}(\xi_h)$$

$$\frac{d^2E}{dh^2}(h) = \int_0^h \frac{d^3E}{dh^3}(z)dz$$

$\Longrightarrow$

$$\left|\frac{d^2E}{dh^2}(h)\right| = \left|\int_0^h \frac{d^3E}{dh^3}(z)dz\right| \le$$

$$\int_0^h \left|\frac{2}{3}z^2 f^{(iv)}(\xi_z)\right| dz \le \frac{2}{3}\max_{\xi\in[0,h]}\left|f^{(iv)}(\xi)\right| \int_0^h z^2 dz$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{d^2E}{dh^2}(h)\right| \le \frac{2}{9}\max_{\xi\in[0,h]}\left|f^{(iv)}(\xi)\right| h^3$$

$$\frac{dE}{dh}(h) = \int_0^h \frac{d^2E}{dh^2}(z)dz$$

$$\Longrightarrow$$

$$\left|\frac{dE}{dh}(h)\right| = \left|\int_0^h \frac{d^2E}{dh^2}(z)dz\right| \leq$$

$$\int_0^h \left|\frac{d^2E}{dh^2}(z)\right| dz \leq \frac{2}{9} \max_{\xi\in[0,h]} \left|f^{(iv)}(\xi)\right| \int_0^h z^3 dz$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{dE}{dh}(h)\right| \leq \frac{1}{18} \max_{\xi\in[0,h]} \left|f^{(iv)}(\xi)\right| h^4$$

$$E(h) = \int_0^h \frac{dE}{dh}(z)dz$$

$$\Longrightarrow$$

$$|E(h)| = \left| \int_0^h \frac{dE}{dh}(z)dz \right| \leq$$

$$\int_0^h \left| \frac{dE}{dh}(z) \right| dz \leq \frac{1}{18} \max_{\xi \in [0,h]} \left| f^{(iv)}(\xi) \right| \int_0^h z^4 dz$$

$$\Longrightarrow \ |E(h)| \leq \frac{1}{90} \max_{\xi \in [0,h]} \left| f^{(iv)}(\xi) \right| h^5$$

Para $a = x_m - h$; $b = x_m + h$, temos:

$$x_m = \frac{a+b}{2}$$

$$h = \frac{b-a}{2}$$

$\Longrightarrow$

$$|E(h)| = \left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6}\left\{ f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b) \right\} \right| =$$

$$\boxed{\left| \int_a^b f(x)dx - S_1 \right| \leq \frac{1}{2880} \max_{\xi \in [0,h]} \left| f^{(iv)}(\xi) \right| (b-a)^5}$$