Integração Numérica

Integração Numérica

Dado $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$,

obter uma aproximação de:

$$\int_a^b f(x)dx$$

com precisão ϵ.

Para tanto vamos desenvolver algoritmos baseados na aproximação do integrando $f(x)$ por polinômios interpoladores.

Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^2[a, b]$, o polinômio

$$p_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

interpola os pontos $\{(a, f(a)); (b, f(b))\}$ e,

$$\mid E(x) \mid = \mid f(x) - p_1(x) \mid \leq$$

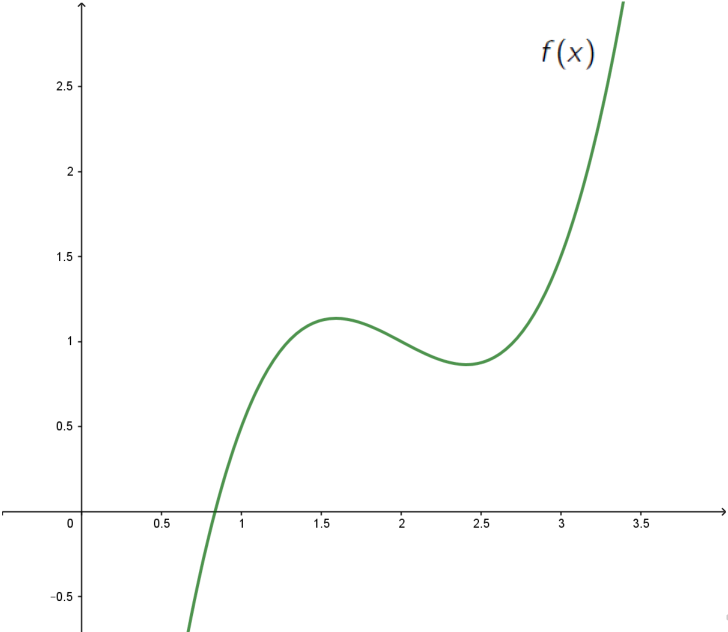
$$\frac{1}{2!} \max_{\xi \in [a,b]} \mid f^{(2)}(\xi) \mid\mid (x - a)(x - b) \mid$$

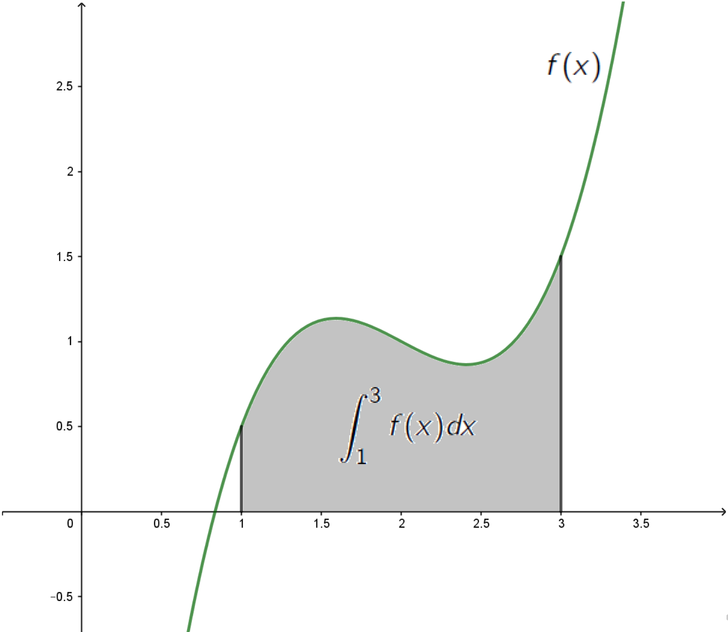
A partir da aproximação:

$$f(x) \approx p_1(x)$$

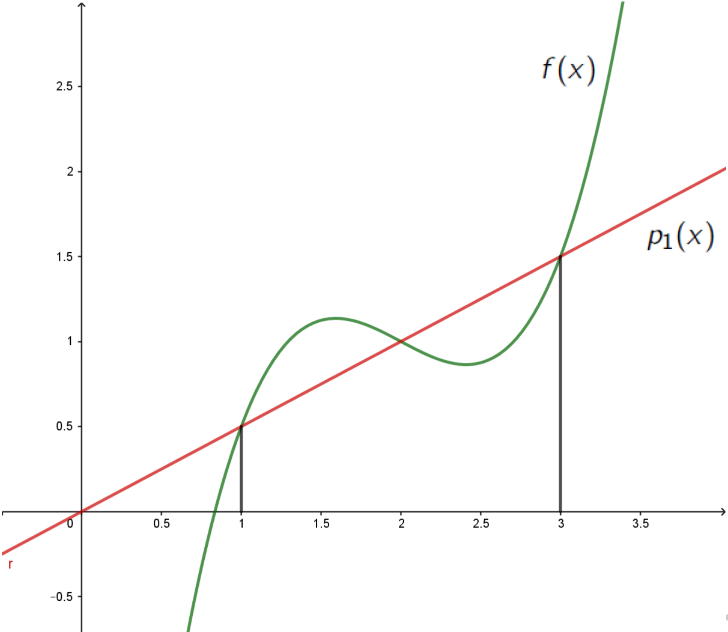
Podemos considerar a seguinte aproximação para $\int_a^b f(x)dx$,

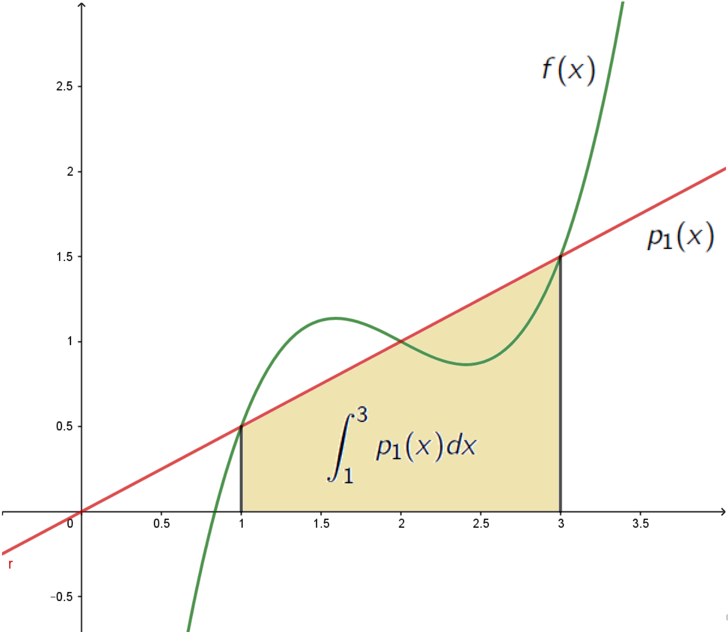
$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_1(x)dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) = T_1$$


f(x)
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5

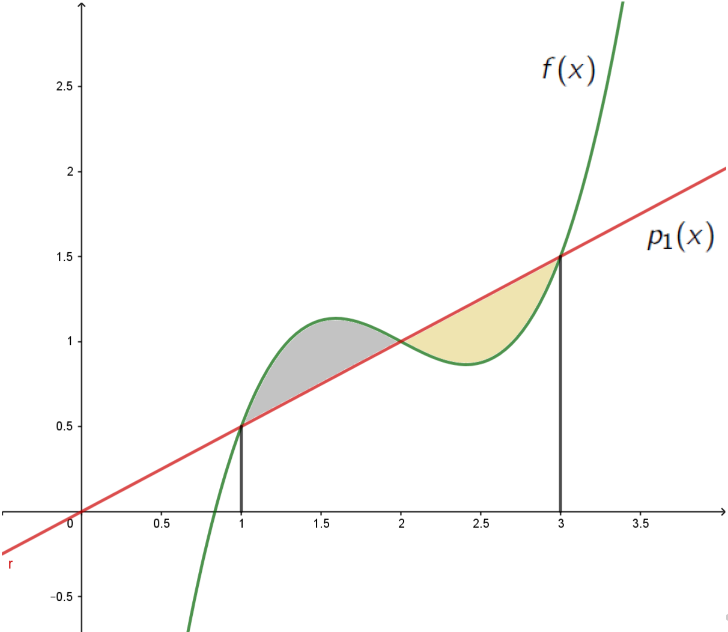


f(x)
$\int_1^3 f(x)dx$
2.5
2
1.5
1
0.5
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5


$f(x)$
$p_1(x)$
r
2.5
2
1.5
1
0.5
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5



$f(x)$
$p_1(x)$
$\int_1^3 p_1(x)dx$
r
2.5
2
1.5
1
0.5
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5



f(x)
p1(x)
r
2.5
2
1.5
1
0.5
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5

e a precisão desta aproximação pode ser estimada por:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - T_1 \right| = \left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b p_1(x)dx \right| \leq$$

$$\left| \int_a^b [f(x) - p_1(x)]dx \right| \leq \int_a^b \left| f(x) - p_1(x) \right| dx \leq$$

$$\int_a^b \left| E(x) \right| dx \leq \int_a^b \frac{1}{2!} \max_{\xi \in [a,b]} \left| f^{(2)}(\xi) \right| \left| (x-a)(x-b) \right| dx =$$

$$\frac{1}{2!} \max_{\xi \in [a,b]} \left| f^{(2)}(\xi) \right| \int_a^b \left| (x-a)(x-b) \right| dx =$$

Para calcular $\int_a^b \left|(x-a)(x-b)\right| dx$ efetuamos a mudança de variável

$$y = x - a; \implies (x-a)(x-b) = y(y - \overbrace{(b-a)}^{=h}); \quad dy = dx$$

$$\begin{cases} a & \rightarrow & 0 & & \\ b & \rightarrow & b-a & = & h \end{cases}$$

$$\frac{1}{2!} \max_{\xi \in [a,b]} \left| f^{(2)}(\xi) \right| \int_0^h -y(y-h)dy = \frac{1}{2!} \max_{\xi \in [a,b]} \left| f^{(2)}(\xi) \right| [-\frac{h^3}{3} + \frac{h^2}{2} h]$$

Concluimos então que:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - T_1 \right| \leq \frac{1}{12} \max_{\xi \in [a,b]} \left| f^{(2)}(\xi) \right| h^3$$

$$h = b - a$$

A observação importante na estimativa da precisão é o expoente 3 de h na expressão:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - T_1 \right| \leq \frac{1}{12} \max_{\xi \in [a,b]} \left| f^{(2)}(\xi) \right| h^3$$

Quando $h = b - a < 1$, h^3 é significativamente menor que 1.

Nós podemos explorar esta propriedade na estimativa da precisão para a aproximação da integral da função f pelo polinômio que interpola $\{(a, f(a)); (a + h, f(a + h))\}$ e introduzir um parâmetro adicional com objetivo de desenvolver um procedimento de aproximações em que seja possível *ajustar* a precisão.

Aproximaçoes com Repetições

Dado o intervalo de integração $[a, b]$ e $n \in \mathbb{N}$ definimos:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a+h} f(x)dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)dx + ... + \int_{a+(n-1)h}^{a+nh} f(x)dx$$

Para cada uma das integrais $\int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f(x)dx$ temos a aproximação

$$\int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f(x)dx \approx \int_{a+kh}^{a+(k+1)h} p_1^{(k)}(x)dx$$

onde $p_1^{(k)}(x)$ é o polinômio que interpola os pontos

$$\Big(a+kh, f(a+kh)\Big) \text{ e } \Big(a+(k+1)h, f(a+(k+1)h)\Big)$$

Temos que:

$$p_1^{(k)}(x) = f(a+kh) + \frac{f(a+(k+1)h) - f(a+kh)}{h}(x-(a+kh)) \implies$$

$$\int_{a+kh}^{a+(k+1)h} p_1^{(k)}(x)dx = h\frac{f(a+kh)+f(a+(k+1)h)}{2}$$

$\Longrightarrow$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\frac{f(a)+f(a+h)}{2} + h\frac{f(a+h)+f(a+2h)}{2} +$$

$$\ldots + h\frac{f(a+(n-1)h)+f(b)}{2} \quad \Longrightarrow$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \overbrace{\frac{h}{2}\{1f(a)+2f(a+h)+\ldots+2f(a+(n-1)h)+1f(b)\}}^{=T_n}}$$

$$\int_a^b f(x)dx - T_n = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a+ih}^{a+(i+1)h} [f(x) - p_1^{(k)}(x)]dx$$

Porque:

$$\left| \int_{a+ih}^{a+(i+1)h} [f(x) - p_1^{(k)}(x)]dx \right| \leq \frac{1}{12} \max_{\xi \in [a+ih, a+(i+1)h]} \left| f^{(2)}(\xi) \right| h^3 \leq$$

$$\frac{1}{12} \max_{\xi \in [a,b]} \left| f^{(2)}(\xi) \right| h^3$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx - T_n\right| \leq n\frac{1}{12}\max_{\xi\in[a,b]}\left|f^{(2)}(\xi)\right|h^3$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx - T_n\right| \leq n\frac{1}{12}\max_{\xi\in[a,b]}\left|f^{(2)}(\xi)\right|\left(\frac{b-a}{n}\right)^3$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)dx - T_n\right| \leq \frac{1}{12}\max_{\xi\in[a,b]}\left|f^{(2)}(\xi)\right|\frac{(b-a)^3}{n^2}}$$

Método dos Trapezios

Dado $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$, uma aproximação para:

$$\int_a^b f(x)dx$$

com precisão ϵ é obtida pelo seguinte procedimento:

- Escolha n_ϵ como o menor inteiro tal que:

$$\frac{1}{12} \max_{\xi \in [a,b]} \left| f^{(2)}(\xi) \right| \frac{(b-a)^3}{n_\epsilon^2} \leq \epsilon$$

- Defina $h_\epsilon = \frac{b-a}{n_\epsilon}$;

- A aproximação:

$$\int_a^b f(x)dx \approx$$

$$\frac{h}{2}\{1f(a) + 2f(a+h_\epsilon) + \ldots + 2f(a+(n_\epsilon - 1)h_\epsilon) + 1f(b)\} = T_{n_\epsilon}$$

satisfaz:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - T_{n_\epsilon} \right| \leq \epsilon$$

Exemplo

Considere a função

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

definida no intervalo $[0, 1]$. Obter uma aproximação para

$$\int_0^1 f(x)dx$$

com precisão $\epsilon = 10^{-3}$.

- Determinar o número de repetições:

$$\frac{1}{12}\max_{\xi\in[a,b]}\left|f^{(2)}(\xi)\right|\frac{(b-a)^3}{n_\epsilon^2}\leq\epsilon$$

$$f^{(2)}(x)=(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}\implies$$

$$\max_{\xi\in[0,1]}\left|f^{(2)}(\xi)\right|=1$$

e o número de repetições n_ϵ é fixado como o menor inteiro tal que:

$$\frac{1}{12}\frac{(1-0)^3}{n_\epsilon^2}\leq 10^{-3}\implies n_\epsilon\geq\left\{\frac{10^3}{12}\right\}^{\frac{1}{2}}\implies n_\epsilon=10$$

- Definição de h_ϵ

$$h_\epsilon = \frac{b-a}{n_\epsilon} = \frac{1-0}{10} = 0.1$$

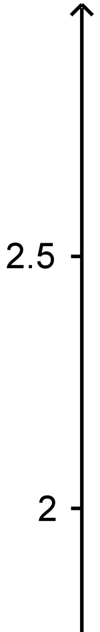
- Aproximação da Integral

$$\int_a^b f(x)dx \approx$$

$$\frac{h}{2}\{1f(a)+2f(a+h_\epsilon)+\ldots+2f(a+(n_\epsilon-1)h_\epsilon)+1f(b)\}=T_{n_\epsilon}$$

$$\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx \approx \frac{0.1}{2}\left\{e^{-\frac{(0.0)^2}{2}}+2e^{-\frac{(0.1)^2}{2}}+\ldots+2e^{-\frac{(0.9)^2}{2}}+e^{-\frac{(1.0)^2}{2}}\right\}$$

$$\boxed{\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx \approx 0.855}$$


2.5
2


2.5
2


2.5
2


2.5
2