Um problema de Interpolação Polinômial pode ser enunciado da seguinte forma:

Dado $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,\ldots,n}$; $x_k \in \mathbb{R}, y_k \in \mathbb{R}$, $x_k \neq x_j$ *se* $k \neq j$, *determinar o polinômio,* $p_n(x)$ *de grau menor ou igual a* n *que satizfaz*

$$p_n(x_k) = y_k \quad k = 0, 1, 2\ldots, n$$

Observe que destacamos o artigo definido o, indicando a existência e unicidade do polinômio interpolador $p_n(x)$.

Considerando que $p_n(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual a n,

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

e o problema de determinar $p_n(x)$ é resolvido determinando os coeficientes $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$.

A partir das equações:

$$p_n(x_k) = y_k; \quad k = 0, ..., n$$

obtemos:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a_0 & + & a_1x_0 & + & a_2x_0^2 & + & \dots & + & a_nx_0^n & = & y_0 \\
a_0 & + & a_1x_1 & + & a_2x_1^2 & + & \dots & + & a_nx_1^n & = & y_1 \\
a_0 & + & a_1x_2 & + & a_2x_2^2 & + & \dots & + & a_nx_2^n & = & y_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \dots & & \vdots & & \vdots \\
a_0 & + & a_1x_n & + & a_2x_n^2 & + & \dots & + & a_nx_n^n & = & y_n
\end{array}
$$

ou

$$
\begin{pmatrix}
1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\
1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\
1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n
\end{pmatrix}
$$

o Determinante da Matriz de Vandermonde

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

é

$$\mid V \mid = \prod_{i \leq k < j \leq n} (x_j - x_k)$$

e como consequência de $x_k \neq x_j$ se $k \neq j$; $\mid V \mid \neq 0$, assegurando a existência e unicidade de solução para o sistema linear que define os coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$.

Portanto resolvendo sistema linear:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

obtemos o polinômio que interpola os pontos $\{(x_j, y_j)\}_{j=0,\dots,n}$.

Exemplo

Considere os pontos:

$$\begin{array}{rcl}(x_0, y_0) & = & (-0.5, -4.0) \\ (x_1, y_1) & = & (\ \ 0.0, -2.0) \\ (x_2, y_2) & = & (\ \ 0.5, -0.5) \\ (x_3, y_3) & = & (\ \ 1.0, \ \ 2.0)\end{array}$$

Determinar o polinômio $p_3(x)$, de grau menor ou igual a 3, que interpola estes pontos.

Temos que $p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ com a_0, a_1, a_2 e a_3 determinados por:

$$\begin{pmatrix} 1.0 & -0.5 & 0.25 & -0.125 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.5 & 0.25 & 0.125 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.0 \\ -2.0 \\ -0.5 \\ 2.0 \end{pmatrix}$$

Da segunda equação obtemos que $a_0 = -2.0$. E portanto os valores de a_1, a_2 e a_3 são determinados por:

$$\begin{pmatrix} -0.5 & 0.25 & -0.125 \\ 0.5 & 0.25 & 0.125 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.0 \\ 1.5 \\ 4.0 \end{pmatrix}$$

Utilizando o Algoritmo de Gauss para obter a solução do Sistema Linear,

$$\begin{pmatrix} -0.5 & 0.25 & -0.125 & -2.0 \\ 0.5 & 0.25 & 0.125 & 1.5 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 4.0 \end{pmatrix} \xrightarrow{p_{13}}$$

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 & 4.0 \\ 0.5 & 0.25 & 0.125 & 1.5 \\ -0.5 & 0.25 & -0.125 & -2.0 \end{pmatrix}$$

$$m_{21} = \frac{0.5}{1} = 0.5 \qquad m_{31} = \frac{-0.5}{1} = -0.5$$

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 & 4.0 \\ \color{red}{0.5} & -0.25 & -0.375 & -0.5 \\ \color{red}{-0.5} & 0.75 & 0.375 & 0.0 \end{pmatrix} \xrightarrow{p_{23}}$$

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 & 4.0 \\ \color{red}{-0.5} & 0.75 & 0.375 & 0.0 \\ \color{red}{0.5} & -0.25 & -0.375 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$m = \frac{-0.25}{0.75} = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 & 4.0 \\ \color{red}{-0.5} & 0.75 & 0.375 & 0.0 \\ \color{red}{0.5} & \color{red}{-\frac{1}{3}} & -0.25 & -0.5 \end{pmatrix}$$

De onde obtemos:

$$a_3 = \frac{-0.5}{-0.25} = 2.0$$

$$0.75a_2 + 0.375a_3 = 0 \implies 0.75a_2 + 0.375(2.0) = 0 \implies a_2 = -1.0$$

$$1.0a_1 + 1.0a_2 + 1.0a_3 = 4.0 \implies 1.0a_1 + 1.0(-1.0) + 1.0(2.0) = 4.0$$

$$\implies a_1 = 3.0$$

$$p_3(x) = -2.0 + 3.0x - 1.0x^2 + 2.0x^3$$

Um segundo algoritmo que podemos utilizar para determinar o polinômio interpolador é o Método dos Mínimos Quadrados. No exemplo, considerando o ajuste de um polinômio de grau menor ou igual a 3 aos pontos dados e com produto interno definido por:

$$\langle f \mid g \rangle = \sum_{k=0}^{3} f(x_k) g(x_k)$$

Com este produto interno, a diferença entre duas funções f e g depende apenas dos valores assumidos nos pontos x_0, x_1, x_2 e x_3. Nestes pontos temos $y_k - p_3(x_k) = 0$ e portanto

$$\langle y - p_3(x) \mid y - p_3(x) \rangle = 0$$

Assim o mínimo de $EQ(a_0, a_1, a_2, a_3) = \langle y - p_3(x) \mid y - p_3(x) \rangle = \sum_{k=0}^{3} [y_k - p_n(x_k)]^2$ ocorre quando $p_3(x)$ é o polinômio que interpola os pontos $\{(x_j, y_j)\}_{j=0,\ldots,n}$.

De fato, se consideramos a família de funções $\{g_0(x), g_1(x), g_2(x), g_3(x)\}$, com

$$g_0(x) = 1; \quad g_1(x) = x; \quad g_2(x) = x^2; \quad \text{e} \quad g_3(x) = x^3;$$

os pontos:

$$\begin{array}{rcl} (x_0, y_0) & = & (-0.5, -4.0) \\ (x_1, y_1) & = & (\ \ 0.0, -2.0) \\ (x_2, y_2) & = & (\ \ 0.5, -0.5) \\ (x_3, y_3) & = & (\ \ 1.0, \ \ 2.0) \end{array}$$

e o produto interno

$$\langle f \mid g \rangle = \sum_{k=0}^{3} f(x_k) g(x_k)$$

O polinômio de grau menor ou igual a 3 que melhor se ajusta estes pontos é $p_3(x) = a_0g_0(x) + a_1g_1(x) + a_2g_2(x) + a_3g_3(x)$ com a_0, a_1, a_2 ea_3 solução do seguinte sistema normal:

$$\begin{pmatrix} \langle g_0 \mid g_0\rangle & \langle g_0 \mid g_1\rangle & \langle g_0 \mid g_2\rangle & \langle g_0 \mid g_3\rangle \\ \langle g_1 \mid g_0\rangle & \langle g_1 \mid g_1\rangle & \langle g_1 \mid g_2\rangle & \langle g_1 \mid g_3\rangle \\ \langle g_2 \mid g_0\rangle & \langle g_2 \mid g_1\rangle & \langle g_2 \mid g_2\rangle & \langle g_2 \mid g_3\rangle \\ \langle g_3 \mid g_0\rangle & \langle g_3 \mid g_1\rangle & \langle g_3 \mid g_2\rangle & \langle g_3 \mid g_3\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g_0 \mid y\rangle \\ \langle g_1 \mid y\rangle \\ \langle g_2 \mid y\rangle \\ \langle g_3 \mid y\rangle \end{pmatrix}$$

$$\langle g_0 \mid g_0 \rangle = \sum_{k=0}^{3} g_0(x_k) g_0(x_k) = \sum_{k=0}^{3} 1 \cdot 1 = 4$$

$$\langle g_0 \mid g_1 \rangle = \sum_{k=0}^{3} g_0(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=0}^{3} 1 \cdot x_k = 1$$

$$\langle g_0 \mid g_2 \rangle = \sum_{k=0}^{3} g_0(x_k) g_2(x_k) = \sum_{k=0}^{3} 1 \cdot x_k^2 = 1.5$$

$$\langle g_0 \mid g_3 \rangle = \sum_{k=0}^{3} g_0(x_k) g_3(x_k) = \sum_{k=0}^{3} 1 \cdot x_k^3 = 1$$

$$\langle g_1 \mid g_1 \rangle = \sum_{k=0}^{3} g_1(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=0}^{3} x_k \cdot x_k = 1.5$$

$$\langle g_1 \mid g_2 \rangle = \sum_{k=0}^{3} g_1(x_k) g_2(x_k) = \sum_{k=0}^{3} x_k \cdot x_k^2 = 2$$

$$\langle g_1 \mid g_3 \rangle = \sum_{k=0}^{3} g_1(x_k) g_3(x_k) = \sum_{k=0}^{3} x_k \cdot x_k^3 = 1.125$$

$$\langle g_2 \mid g_2 \rangle = \sum_{k=0}^{3} g_2(x_k) g_2(x_k) = \sum_{k=0}^{3} x_k^2 \cdot x_k^2 = 1.09375$$

$$\langle g_2 \mid g_3 \rangle = \sum_{k=0}^{3} g_2(x_k) g_3(x_k) = \sum_{k=0}^{3} x_k^2 \cdot x_k^3 = 1.0$$

$$\langle g_3 \mid g_3 \rangle = \sum_{k=0}^{3} g_3(x_k) g_3(x_k) = \sum_{k=0}^{3} x_k^3 \cdot x_k^3 = 1.03125$$

$$\langle g_0 \mid y \rangle = \sum_{k=0}^{3} g_0(x_k) y_k = \sum_{k=0}^{3} 1 \cdot y_k = -4.5$$

$$\langle g_1 \mid y \rangle = \sum_{k=0}^{3} g_1(x_k) y_k = \sum_{k=0}^{3} x_k^1 \cdot y_k = 3.75$$

$$\langle g_2 \mid y \rangle = \sum_{k=0}^{3} g_2(x_k) y_k = \sum_{k=0}^{3} x_k^2 \cdot y_k = 0.875$$

$$\langle g_3 \mid y \rangle = \sum_{k=0}^{3} g_3(x_k) y_k = \sum_{k=0}^{3} x_k^3 \cdot y_k = 2.4375$$

Substituindo os valores no Sistema Normal,

$$\begin{pmatrix} 4.00000 & 1.00000 & 1.50000 & 1.00000 \\ 1.00000 & 1.50000 & 2.00000 & 1.12500 \\ 1.50000 & 2.00000 & 1.09375 & 1.00000 \\ 1.00000 & 1,12500 & 1.00000 & 1.03125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.50000 \\ 3.75000 \\ 0.87500 \\ 2.4375 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema linear obtemos:

$$a_0 = -2.00000; a_1 = 3.00000; a_2 = -1.00000 \quad \text{e} \quad a_3 = 2.00000$$

$\Longrightarrow$

$$p_3(x) = -2.0 + 3.0x - 1.0x^2 + 2.0x^3$$