Gram Schmidt

Considere um Espaço Vetorial V de dimensão $n \geq m+1$ e um produto interno $\langle u \mid v \rangle$ definido em V. Dados $\left\{u^0, u^1, ..., u^m\right\}$ vetores linermente independentes, uma base ortonormal $\left\{v^0, v^1, ..., v^m\right\}$ para o subespaço de V gerado pelas combinações lineares da forma:

$$v = a_0 u^0 + a_1 u^1 + ... + a_m u^m$$

pode ser obtida pelo seguinte processo recursivo:

1.
$$v^0 = \frac{1}{\|u^0\|} u^0; \quad \|u^0\| = \langle u^0 \mid u^0 \rangle^{1/2}$$

observe que

$$\langle v^0 \mid v^0 \rangle = \langle \frac{1}{\|u^0\|} u^0 \mid \frac{1}{\|u^0\|} u^0 \rangle = \frac{1}{\langle u^0 \mid u^0 \rangle} \langle u^0 \mid u^0 \rangle = 1$$

2.
$$\tilde{v}^1 = u^1 - \langle u^1 \mid v^0 \rangle v^0$$

$$v^1 = \frac{1}{\|\tilde{v}^1\|} \tilde{v}^1; \quad \|\tilde{v}^1\| = \langle \tilde{v}^1 \mid \tilde{v}^1 \rangle^{1/2}$$

observe que

$$\langle v^1 \mid v^1 \rangle = \langle \frac{1}{\|\tilde{v}^1\|}\tilde{v}^1 \mid \frac{1}{\|\tilde{v}^1\|}\tilde{v}^1 \rangle = \frac{1}{\langle \tilde{v}^1 \mid \tilde{v}^1 \rangle}\langle \tilde{v}^1 \mid \tilde{v}^1 \rangle = 1$$

$$\langle v^1 \mid v^0 \rangle = \langle \frac{1}{\|\tilde{v}^1\|}\left(u^1 - \langle u^1 \mid v^0 \rangle v^0\right) \mid v^0 \rangle =$$

$$\frac{1}{\|\tilde{v}^1\|}\langle u^1 - \langle u^1 \mid v^0 \rangle v^0 \mid v^0 \rangle =$$

$$\frac{1}{\|\tilde{v}^1\|}\left\{\langle u^1 \mid v^0 \rangle - \langle u^1 \mid v^0 \rangle \cancelto{1}{\langle v^0 \mid v^0 \rangle}\right\} = 0$$

Obtidos $\left\{v^0, v^1, ..., v^k\right\}$ definimos:

$$\tilde{v}^{k+1} = u^{k+1} - \langle u^{k+1} \mid v^0 \rangle v^0 - \langle u^{k+1} \mid v^1 \rangle v^1 - ... - \langle u^{k+1} \mid v^k \rangle v^k$$

e

$$v^{k+1} = \frac{1}{\|\tilde{v}^{k+1}\|} \tilde{v}^{k+1}$$

Exercício: Verifique que $\langle v^{k+1} \mid v^{k+1} \rangle = 1$ e $\langle v^{k+1} \mid v^j \rangle = 0$ para $j = 0, 1..., k$.

Polinômios de Legendre

Para um dado $n \in \mathbb{N}$, considere o conjunto dos polinômios $\{p(x)\}$ tais que o grau de $p(x)$ é menor ou igual a n. Este conjunto constitue um espaço vetorial quando consideramos soma e multiplicação usuais.
Considere também o seguinte produto interno definido neste Espaço Vetorial:

$$\langle p \mid q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

Nós podemos obter uma base ortogonal neste Espaço Vetorial utilizando o procedimento descrito a seguir.

Considere o conjunto dos polinômios $\{p_j(x)\}_{0\leq j\leq n}$, onde $p_j(x)$ são polinômios mônicos de grau j:

$$p_j(x) = x^j + a_{j-1}^{(j)}x^{j-1} + a_{j-2}^{(j)}x^{j-2} + \ldots + a_1^{(j)}x + a_0^{(j)}$$

com os coeficientes $a_0^{(j)}, a_1^{(j)}, \ldots, a_{j-2}^{(j)}, a_{j-1}^{(j)}$ definidos pelo seguinte procedimento recursivo:

$$p_0(x) = 1$$

$$p_1(x) = x + a_0^{(1)}$$

onde $a_0^{(1)}$ é definido pela equação:

$$\langle p_1 \mid p_0 \rangle = \int_{-1}^{1} p_1(x) p_0(x) dx = 0 \implies$$

$$\int_{-1}^{1} p_1(x) p_0(x dx = \int_{-1}^{1} [x + a_0^{(1)}] \cdot 1 dx = 2a_0^{(1)} = 0 \implies a_0^{(1)} = 0$$

portanto

$$p_1(x) = x$$

$$p_2(x) = x^2 + a_1^{(2)} x + a_0^{(2)}$$

com $a_0^{(2)}$ e $a_1^{(2)}$ definidos pelas equações:

$$\langle p_2 \mid p_1 \rangle = \int_{-1}^{1} p_2(x) p_1(x) dx = 0$$

$$\langle p_2 \mid p_0 \rangle = \int_{-1}^{1} p_2(x) p_0(x) dx = 0$$

$\Longrightarrow$

$$\int_{-1}^{1} p_2(x)p_1(x)dx = \int_{-1}^{1} \left(x^2 + a_1^{(2)}x + a_0^{(2)}\right) xdx = 0$$

$$\cancelto{0}{\int_{-1}^{1} x^2 xdx} + \int_{-1}^{1} a_1^{(2)}x \cdot xdx + \cancelto{0}{\int_{-1}^{1} a_0^{(2)} xdx} =$$

$$\int_{-1}^{1} a_1^{(2)}x^2dx = a_1^{(2)} = 0$$

$$\int_{-1}^{1} p_{2}(x)p_0(x)dx = \int_{-1}^{1} \left(x^2 + a_1^{(2)}x + a_0^{(2)}\right) \cdot 1dx = 0$$

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx + \cancelto{0}{\int_{-1}^{1} a_1^{(2)} xdx} + \int_{-1}^{1} a_0^{2} dx =$$

$$\frac{2}{3} + a_0^{(2)} \int_{-1}^{1} dx \implies a_0^{(2)} = -\frac{1}{3}$$

$$p_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

Obtidos os polinômios $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_j(x)$ os coeficientes

$$a_0^{(j+1)}, a_1^{(j+1)}, \ldots, a_j^{(j+1)}$$

de

$$p_{j+1} = x^{j+1} + a_j^{(j+1)} x^j + \ldots + a_1^{(j+1)} x + a_0^{(j+1)}$$

são definidos por:

$$\langle p_{j+1} \mid p_k \rangle = \int_{-1}^{1} p_{j+1}(x) p_k(x) dx = 0; \quad 0 \leq k \leq j$$

Observe que os polinômios definidos pelo procedimento descrito não satisfzem a condição:

$$\langle p_k \mid p_k \rangle = 1$$

Isto porque a condição de "normalização"fixada no procedimento acima foi impor que os polinômios sejam mônicos (*coeficiente do monômio de maior grau igual a 1*). Para obter os polinômios gerados pelo procedimento de Gram Schmidt basta multiplicar $p_k(x)$ por $\frac{1}{\sqrt{\langle p_k | p_k \rangle}}$

Um Conjunto de polinômios $\{p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x), ...\}$; com $p_k(x)$ polinômio de grau k, tais que se $k \neq j$, $p_k(x)$ e $p_j(x)$ são ortogonais com respeito ao produto interno

$$\langle p \mid q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

são chamados de Polinômios de Legendre. Diferentes conjuntos de Polinômios de Legendre diferem por condições de "normalização" Em geral fixado um conjunto de Polinômios de Legendre, existem relações de recorrência (envolvendo 3 polinômios de grau consecutivos) que podem ser utilizados para definir os polinômios.

No caso dos polinômios mônicos, temos:

$$p_{n+1}(x) = xp_n(x) - \frac{n^2}{4n^2-1}p_{n-1}(x)$$

$$p_3(x) = x(x^2 - \frac{1}{3}) - \frac{4}{15}x = x^3 - \frac{9}{15}x = x^3 - \frac{3}{5}x$$

$$p_4(x) = x(x^3 - \frac{3}{5}x) - \frac{9}{35}(x^2 - \frac{1}{3}) = x^4 - \frac{3}{5}x^2 - \frac{9}{35}x^2 + \frac{3}{35} =$$

$$x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}$$

Um outro conjunto de polinômios de Legendre pode ser obtido a partir da condição:

$$\langle \tilde{p}_k \mid \tilde{p}_j \rangle = \int_{-1}^{1} \tilde{p}_k(x)\tilde{p}_j(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad k \neq j \\ \frac{2}{2k+1} & \text{se} \quad k = j \end{cases}$$

Neste caso temos:

$$\tilde{p}_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x\tilde{p}_n(x) - \frac{n}{n+1}\tilde{p}_{n-1}(x)$$

Considerando

$$p_0(x) = 1; \quad p_1(x) = x$$

$$\tilde{p}_2(x) = \frac{3}{2}x \cdot x - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\left\{x^2 - \frac{1}{3}\right\}$$

$$\tilde{p}_3(x) = \frac{5}{3}x \cdot \frac{3}{2}[x^2 - \frac{1}{3}] - \frac{2}{3}x = \frac{5}{2}\left\{x^3 - \frac{3}{5}x\right\}$$

$$\tilde{p}_4(x) = \frac{7}{4}x \cdot [\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)] - \frac{3}{4} \cdot [\frac{3}{2}(x^2 - \frac{1}{3})] =$$

$$\frac{35}{8}x^4 - \frac{21}{8}x^2 - \frac{9}{8}x^2 + \frac{3}{8} = \frac{35}{8}\left\{x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}\right\}$$

Aproximação de Funções por Polinômios

Considere o seguinte problema:

Dada uma função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ obter a melhor aproximação de $f(x)$ no intervalo $[-1, 1]$ por um polinômio, $\bar{p}_n(x)$ de grau menor ou igual a n, onde por "melhor aproximação"entendemos como sendo o polinômio $\bar{p}_n(x)$ para o qual:

$$\langle f - \bar{p}_n \mid f - \bar{p}_n \rangle = \int_{-1}^{1} [f(x) - \bar{p}_n(x)][f(x) - \bar{p}_n(x)]dx$$

é mínimo.

Para resolver este problema consideramos a família de funções $\{\tilde{p}_0(x), \tilde{p}_1(x), ..., \tilde{p}_n(x)\}$. A solução é um polinômio

$$\bar{p}_n(x) = a_0\tilde{p}_0(x) + a_1\tilde{p}_1(x) + ... + a_n\tilde{p}_n(x)$$

onde os valores de $a_0, a_1, ..., a_n$ são tais que:

$$EQ(a_0, a_1, ..., a_n) =$$

$$\langle f(x) - a_0\tilde{p}_0(x) + a_1\tilde{p}_1(x) + ... + a_n\tilde{p}_n(x) \mid f(x) - a_0\tilde{p}_0(x) + a_1\tilde{p}_1(x) + ... + a_n\tilde{p}_n$$

$$\int_{-1}^{1} \{f(x) - a_0\tilde{p}_0(x) + a_1\tilde{p}_1(x) + ... + a_n\tilde{p}_n(x)\}^2 \, dx$$

é mínimo

Exemplo

$$f(x) = \cos(\pi x); \quad n = 4$$

A solução é obtida resolvendo o sistema normal

$$A \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f \mid \tilde{p}_0 \rangle \\ \vdots \\ \langle f \mid \tilde{p}_n \rangle \end{pmatrix}$$

Onde A é a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \langle \tilde{p}_0 \mid \tilde{p}_0 \rangle & \langle \tilde{p}_0 \mid \tilde{p}_1 \rangle & \langle \tilde{p}_0 \mid \tilde{p}_2 \rangle & \langle \tilde{p}_0 \mid \tilde{p}_3 \rangle & \langle \tilde{p}_0 \mid \tilde{p}_4 \rangle \\ \langle \tilde{p}_1 \mid \tilde{p}_0 \rangle & \langle \tilde{p}_1 \mid \tilde{p}_1 \rangle & \langle \tilde{p}_1 \mid \tilde{p}_2 \rangle & \langle \tilde{p}_1 \mid \tilde{p}_3 \rangle & \langle \tilde{p}_1 \mid p_4 \rangle \\ \langle \tilde{p}_2 \mid \tilde{p}_2 \rangle & \langle \tilde{p}_2 \mid \tilde{p}_1 \rangle & \langle \tilde{p}_2 \mid \tilde{p}_2 \rangle & \langle \tilde{p}_2 \mid \tilde{p}_3 \rangle & \langle \tilde{p}_2 \mid \tilde{p}_4 \rangle \\ \langle \tilde{p}_3 \mid \tilde{p}_0 \rangle & \langle \tilde{p}_3 \mid \tilde{p}_1 \rangle & \langle \tilde{p}_3 \mid \tilde{p}_2 \rangle & \langle \tilde{p}_3 \mid \tilde{p}_3 \rangle & \langle \tilde{p}_3 \mid \tilde{p}_4 \rangle \\ \langle \tilde{p}_4 \mid \tilde{p}_0 \rangle & \langle \tilde{p}_4 \mid \tilde{p}_1 \rangle & \langle \tilde{p}_4 \mid \tilde{p}_2 \rangle & \langle \tilde{p}_4 \mid \tilde{p}_3 \rangle & \langle \tilde{p}_4 \mid \tilde{p}_4 \rangle \end{pmatrix}$$

Porque

$$\langle \tilde{p}_k \mid \tilde{p}_j \rangle = \int_{-1}^{1} \tilde{p}_k(x)\tilde{p}_j x dx = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad k \neq j \\ \frac{2}{2k+1} & \text{se} \quad k = j \end{cases}$$

a matriz A é diagonal e a solução do sistema normal é:

$$a_k = \frac{1}{\langle \tilde{p}_k \mid \tilde{p}_k \rangle} \langle f \mid \tilde{p}_k \rangle = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\tilde{p}_k(x) dx$$

Como $\cos(\pi x)$ é uma função par e $p_1(x)$ e $p_3(x)$ são funções impares,

$$a_1 = 0; \quad a_3 = 0$$

$$\langle f \mid p_0 \rangle = \int_{-1}^{1} \cos(\pi x) dx = 0$$

$$\langle f \mid p_2 \rangle = \int_{-1}^{1} [\frac{3}{2}(x^2 - \frac{1}{3})] \cos(\pi x) dx =$$

$$\frac{3}{2} \int_{-1}^{1} x^2 \cos(\pi x) dx - \underbrace{\cancel{\frac{3}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{3} \cos(\pi x) dx}}_{0} =$$

$$\int_{-1}^{1} x^2 \cos(\pi x) dx = \underbrace{\cancel{x^2 \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) \Big|_{-1}^{1}}}_{0} - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} x \sin(\pi x) dx =$$

$$\frac{2}{\pi^2} x \cos(\pi x) \Big|_{-1}^{1} + \underbrace{\cancel{\frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^{1} \cos(\pi x) dx}}_{0} = -\frac{4}{\pi^2}$$

$$\langle f \mid p_4 \rangle = \int_{-1}^{1} [\frac{35}{8}(x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35})] \cos(\pi x) dx =$$

$$\int_{-1}^{1} x^4 \cos(\pi x) dx = \cancelto{0}{\frac{1}{\pi} x^4 \sin(\pi x) \Big|_{-1}^{1}} - \frac{4}{\pi} \int_{-1}^{1} x^3 \sin(\pi x) dx =$$

$$\frac{4}{\pi^2} x^3 \cos(\pi x) \Big|_{-1}^{1} - \frac{12}{\pi^2} \int_{-1}^{1} x^2 \cos(\pi x) dx$$

$$-\frac{8}{\pi^2} - \frac{12}{\pi^2} \left(-\frac{4}{\pi^2} \right) = -\frac{8}{\pi^2} + \frac{48}{\pi^4}$$

$$a_0 = 0$$

$$a_2 = \left\{\frac{2 \cdot 2 + 1}{2}\right\}\left\{\frac{3}{2}\left(-\frac{4}{\pi^2}\right)\right\} = -\frac{15}{\pi^2}$$

$$a_4 = \left\{\frac{2 \cdot 4 + 1}{2}\right\}\left\{\frac{35}{8}[(-\frac{8}{\pi^2} + \frac{48}{\pi^4}) - \frac{6}{7}(-\frac{4}{\pi^2})]\right\} =$$

$$= \frac{9}{2}\left\{-\frac{20}{\pi^2} + \frac{210}{\pi^4}\right\}$$

$$f(x) \approx$$

$$\left\{\frac{9}{2}\left(-\frac{20}{\pi^2}+\frac{210}{\pi^4}\right)\right\}\left\{\frac{35}{8}\left(x^4-\frac{6}{7}x^2+\frac{3}{35}\right)\right\}-\left\{\frac{15}{\pi^2}\right\}\left\{\frac{3}{2}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\right\}$$