Obter o *melhor ajuste* no sentido do Método dos Mínimos Quadrados é equivalente a obter a *projeção ortogonal* de u no subespaço V definido pelas combinações lineares dos vetores $\{v^j\}_{j=0,\ldots m}$ ou determinar o vetor $v \in V$ mais próximo de u.

A interpretação do Método dos Mínimos Quadrados tanto como uma problema de projeção ortogonal ou determinar o vetor $v \in V$ mais próximo de u permite generalizar o Método no sentido de que no contexto das ideias de Algebra Linear podemos considerar as questões envolvidas em um nível abstrato sem a necessidade de especificar o espaço vetorial ou produto interno envolvidos.

Análise Harmônica

Considere o Método dos Mínimos Quadrados no segunte contexto:

Modelo: Considere o conjunto $V_{2\pi}$ cujos elementos são funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(x+2\pi) = f(x)$ (*conjunto das funções períodicas com período* 2π*). Em* $V_{2\pi}$ *considere a família de funções* $\mathscr{F}_n = \{g_0(x), g_1(x), ..., g_n(x), g_{n+1}(x), ..., g_{2n}(x)\}$, *com:*

$$g_0(x) = 1; \quad g_1(x) = \cos(x); \quad ... \quad g_n(x) = \cos(nx)$$
$$g_{n+1}(x) = \sin(x); \quad ... \quad g_{2n}(x) = \sin(nx)$$

e o subespaço vetorial, $V_{2\pi}^n \subset V_{2\pi}$ *definido pelas combinações lineares das funções em* $\mathscr{F}_n$.

$$g(x) \in V_{2\pi}^n \iff g(x) = a_0 + a_1\cos(x) + ... + a_n\cos(nx) +$$
$$a_{n+1}\sin(x) + ... + a_{2n}\sin(nx).$$

Resultados Empíricos Consiste do conjunto de pontos $\{(x, f(x))\}_{x \in \mathbb{R}}$ para uma dada função $f(x) \in V_{2\pi}$.

O objetivo é obter a melhor aproximação (*em um sentido a ser definido*) de $f(x)$ por uma função $g(x) \in V_{2\pi}^{n}$.

Noção de Melhor Aproximação

Considerando em $V_{2\pi}$ o produto interno:

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$$

A melhor aproximação de $f(x)$ por uma função $g(x) \in V_{2\pi}^{n}$ é definida pelos valores $a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n}$ para os quais:

$$EQ(a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n}) = \langle f - g \mid f - g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - g(x)]^2 dx$$

assume seu valor mínimo.

$$EQ(a_0, a_1, ..., a_n, a_{n+1}, ..., a_{2n}) =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - \{a_0 + a_1 \cos(x) + ... + a_n \cos(nx) +$$

$$a_{n+1} \sin(x) + ... + a_{2n} \sin(nx)\}]^2 dx$$

Portanto para determinar os valores de $a_0, a_1, ..., a_n, a_{n+1}, ..., a_{2n}$ que definem a melhor aproximação devemos resolver:

$$\frac{\partial EQ}{\partial a_0}(a_0, a_1, ..., a_n, a_{n+1}, ..., a_{2n}) = 0$$

$$\frac{\partial EQ}{\partial a_1}(a_0, a_1, ..., a_n, a_{n+1}, ..., a_{2n}) = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial EQ}{\partial a_n}(a_0, a_1, ..., a_n, a_{n+1}, ..., a_{2n}) = 0$$

$$\frac{\partial EQ}{\partial a_{n+1}}(a_0, a_1, ..., a_n, a_{n+1}, ..., a_{2n}) = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial EQ}{\partial a_2 n}(a_0, a_1, ..., a_n, a_{n+1}, ..., a_{2n}) = 0$$

O que resulta no sistema linear:

$$A \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g_0 \mid f \rangle \\ \vdots \\ \langle g_n \mid f \rangle \\ \langle g_{n+1} \mid f \rangle \\ \vdots \\ \langle g_{2n} \mid f \rangle \end{pmatrix}$$

com

$$A =$$

$$\begin{pmatrix}
\langle g_0 \mid g_0 \rangle & \cdots & \langle g_0 \mid g_n \rangle & \langle g_0 \mid g_{n+1} \rangle & \cdots & \langle g_0 \mid g_{2n} \rangle \\
\langle g_1 \mid g_0 \rangle & \cdots & \langle g_1 \mid g_n \rangle & \langle g_1 \mid g_{n+1} \rangle & \cdots & \langle g_1 \mid g_{2n} \rangle \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\langle g_n \mid g_0 \rangle & \cdots & \langle g_n \mid g_n \rangle & \langle g_n \mid g_{n+1} \rangle & \cdots & \langle g_n \mid g_{2n} \rangle \\
\langle g_{n+1} \mid g_0 \rangle & \cdots & \langle g_{n+1} \mid g_n \rangle & \langle g_{n+1} \mid g_{n+1} \rangle & \cdots & \langle g_{n+1} \mid g_{2n} \rangle \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\langle g_{2n} \mid g_0 \rangle & \cdots & \langle g_{2n} \mid g_n \rangle & \langle g_{2n} \mid g_{n+1} \rangle & \cdots & \langle g_{2n} \mid g_{2n} \rangle
\end{pmatrix}$$

Temos que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 dx = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos(jx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin(jx) dx = 0; \quad \forall j$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(jx) \cos(kx) dx = 0; \quad \text{se} \quad j \neq k$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(jx) \sin(kx) dx = 0; \quad \forall j, k$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(jx) \sin(kx) dx = 0; \quad \text{se} \quad j \neq k$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(jx) \cos(jx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(jx) \sin(jx) dx = \pi; \quad \forall j$$

Utilizando estes resultados nas entradas da matriz A,

$$A =$$

$$\begin{pmatrix} 2\pi & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pi & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \pi & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \pi & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \pi \end{pmatrix}$$

Assim para obtermos os valores desejados de $a_0, a_1, ..., a_n, a_{n+1}, ..., a_{2n}$ devemos resolver:

$$\begin{pmatrix} 2\pi & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pi & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \pi & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \pi & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g_0 \mid f \rangle \\ \langle g_1 \mid f \rangle \\ \vdots \\ \langle g_n \mid f \rangle \\ \langle g_{n+1} \mid f \rangle \\ \vdots \\ \langle g_{2n} \mid f \rangle \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} 1 \cdot f(x)dx$$

para $1 \leq j \leq n$

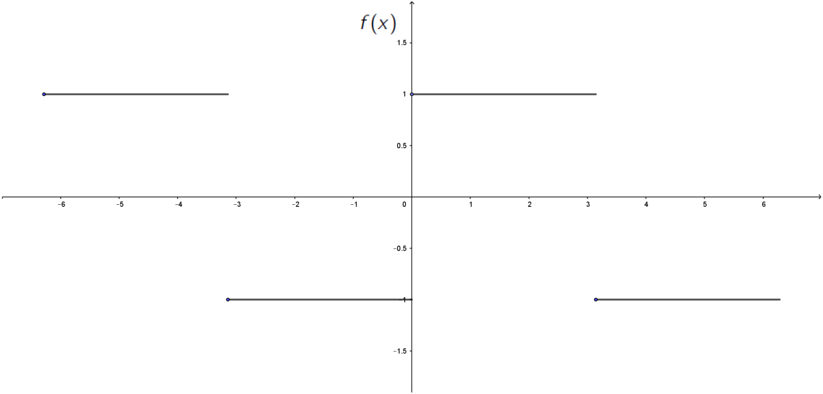
$$a_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(jx) f(x)dx$$

para $n+1 \leq j \leq 2n$

$$a_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(jx) f(x)dx$$

Exemplo

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad ; \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$



$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot f(x)dx =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} 1 \cdot f(x)dx + \int_{0}^{\pi} 1 \cdot f(x)dx\right\} =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} 1 \cdot (-1)dx + \int_{0}^{\pi} 1 \cdot 1dx\right\} = 0$$

Para $1 \leq j \leq n$

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(jx) \cdot f(x)dx =$$

$$\frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{0} \cos(jx) \cdot f(x)dx + \int_{0}^{\pi} \cos(jx) \cdot f(x)dx \right\} = 0$$

Para $n+1 \leq n+k \leq 2n$

$$a_{n+k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cdot f(x)dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} \sin(kx)\cdot f(x)dx + \int_{0}^{\pi} \sin(kx)\cdot f(x)dx\right\} =$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(kx)\cdot f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(kx)\cdot 1dx = \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{1}{k}\cos(kx)\ \Big|_{0}^{\pi}\right\} \implies$$

$$a_{n+k} = \begin{cases} \frac{4}{k\pi} & \text{se} \quad k \quad \text{impar} \\ 0 & \text{se} \quad k \quad \text{par} \end{cases}$$

$$f(x) \approx \frac{4}{\pi}\left\{\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \ldots + \frac{1}{2\ell+1}\sin((2\ell+1)x)\right\}$$

$n = 20$ $(\ell = 9)$