Dinâmica Populacional

Como uma aplicação do Método dos Mínimos Quadrados, vamos buscar uma resposta à questão de *prever* o comportamento dinâmico de populações em ambientes isolados , ou seja, nosso objetivo é obter uma função $P(t) : [0, \infty) \to \mathbb{R}^+$ que descreve a evolução de uma população em função do tempo t. Tendo como base algumas considerações de natureza heurística vamos propor um modelo e posteriormente calibrar os parâmetros do modelo em uma situação específica utilizando o Método dos Mínimos Quadrados.

Começamos assumindo que a taxa de crescimento de uma dada população pode ser expressa como uma função do tempo e da população:

$$\frac{dP}{dt}(t) = f(t, P(t))$$

- Em uma situação em que o ambiente proporciona condições de sobrevivência igual para todos os indivíduos, é razoável considerar que tanto a capacidade de reproduçao como de sobrevivência são homogeneas de forma que para um dada população $P(t)$, os números de nascimentos e mortes em um intervalo de tempo δt devem ser proporcionais ao valor de $P(t)$.

De forma que:

$$P(t+\delta t) - P(t) = c_t(\delta t, P(t))\ P(t)$$

- Assumindo uma descrição para variações da população como a proposta acima, temos que $c_t(0, P(t)) = 0$ e:

$$P(t+\delta t) - P(t) = [c_t(\delta t, P(t)) - c_t(0, P(t))]\ P(t) \implies$$

$$\frac{P(t+\delta t) - P(t)}{\delta t} = \frac{c_t(\delta t, P(t)) - c_t(0, P(t))}{\delta t} P(t)$$

- Assumindo diferenciabilidade das funções $P(\cdot)$ e $c_t(\cdot, P(t))$, obtemos:

$$\lim_{\delta t \longrightarrow 0} \frac{P(t+\delta t) - P(t)}{\delta t} = \lim_{\delta t \longrightarrow 0} \frac{c_t(\delta t, P(t)) - c_t(0, P(t))}{\delta t} P(t)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\frac{dP}{dt}(t) = \alpha(t, P(t))P(t)$$

onde

$$\alpha(t, P(t)) = \lim_{\delta t \longrightarrow 0} \frac{c_t(\delta t, P(t)) - c_t(0, P(t))}{\delta t} = \frac{dc_t}{d\tau}(\tau, P(t))\Big|_{\tau=0}$$

- Enquanto o tamanho da população é *pequeno*, e por isso o impacto no ambiente não deve provocar alterações significativas nas capacidades de reprodução e sobrevivência, é razoável supor que $\alpha(t, P(t))$ é aproximadamente constante.

$$\frac{dP}{dt}(t) = \bar{\alpha} P(t)$$

onde portanto $P(t)$ é da forma:

$$P(t) = P_0 e^{\bar{\alpha}(t - t_0)}$$

e P_0 é o valor da população no tempo t_0.

O crescimento exponencial descrito acima (quando $\bar{\alpha} > 0$) não é possível em um ambiente *finito* porque eventualmente a população esgotaria os recursos existentes, necessários para a reprodução e sobrevivência dos indivíduos. De fato, em situações nas quais a população inicial P_0 é levada artificialmente a um nível muito alto, observa-se que com o decorrer do tempo a população diminui indicando valores negativos para $\alpha(t, P(t))$. Por outro lado para valores *pequenos* de P_0, em geral, observa-se um crescimento populacional indicando valores positivos para $\alpha(t, P(t))$.

Isto sugere uma dependência de $\alpha(t, P(t))$ em função de $P(t)$ tal que que se P_0 é uma valor muito alto, $P(t)$ deve ser uma função decrescente enquanto que se P_0 for um valor pequeno, $P(t)$ é uma função crescente. Esta observação pode ser incorporada na proposta do modelo considerando existe um valor M tal que

$\alpha(t, P(t))$ é uma função com as seguintes propriedades

- $\alpha(t, P(t)) < 0$ se $P(t) > M$
- $\tilde{\alpha}(t, P(t)) > 0$ se $P(t) < M$.

Como uma proposta simples que incorpore estas observações, podemos considerar:

$$\alpha(t, P(t)) = \alpha_0[M - P(t)]$$

com α_0 e M constantes. Temos então:

$$\frac{dP}{dt}(t) = \alpha(t, P(t))P(t) = \alpha_0[M - P(t)]P(t)$$

Considerando conhecida a população P_0 no tempo t_0, a função $P(t)$ deve ser tal que:

$$\frac{dP}{dt}(t) = \alpha_0[M - P(t)]P(t) \tag{1}$$

$$P(t_0) = P_0 \tag{2}$$

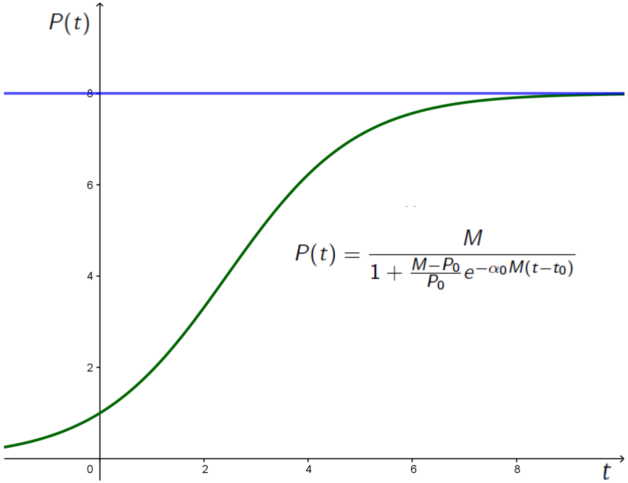
Assim devemos encontrar uma função $P(t)$ tal que (1) e (2) estejam satisfeitos.

Equações da forma $\frac{dy}{dx}(x) = f(x, y(x))$ são chamadas de equações diferenciais ordinárias e o problema acima é chamado de problema de valor inicial para a equação diferencial dada.

Para o problema de valor inicial definido por (1) e (2), a solução $P(t)$ pode ser obtida explicitamente e, no caso em que $P_0 < M$ é dada por:

$$P(t) = \frac{M}{1 + \frac{M - P_0}{P_0} e^{-\alpha_0 M (t - t_0)}}$$

Função Logística



Solução da Equação Logística

$$\frac{dP}{dt}(t) = \alpha_0(M - P(t))P(t)$$

$$\frac{1}{(M-P)P}dP = \alpha_0 dt$$

Sob um ponto de vista heurístico, a igualdade acima tem a interpretação de que as variações dP da variável $P(t)$ quando escalonadas pelo fator $\frac{1}{(M-P)P}$ são iguais às variações dt da variável t escalonadas pelo fator α_0. "Somando"as variações acima obtemos:

$$\int_{P_0}^{P(t)} \frac{1}{(M-P)P}dP = \int_{t_0}^{t} \alpha_0 dt$$

Utilizando a igualdade:

$$\frac{1}{(M-P)P} = \frac{1}{M}\left\{\frac{1}{M-P} + \frac{1}{P}\right\}$$

obtemos:

$$\frac{1}{M}\int_{P_0}^{P(t)}\left\{\frac{1}{M-P} + \frac{1}{P}\right\} dP = \alpha_0(t - t_0)$$

As integrais no lado esquerdo da igualdade acima podem ser calculadas e quando $P_0 < M$ obtemos:

$$\int_{P_0}^{P(t)} \frac{1}{M-P} dP = -\ln(M-P(t)) + \ln(M-P_0) = \ln\left\{\frac{M-P_0}{M-P(t)}\right\}$$

$$\int_{P_0}^{P(t)} \frac{1}{P} dP = \ln P(t) - \ln P_0 = \ln\left\{\frac{P(t)}{P_0}\right\}$$

$$\int_{P_0}^{P(t)} \frac{1}{M-P} dP + \int_{P_0}^{P(t)} \frac{1}{P} dP = \ln\left\{\frac{M-P_0}{M-P(t)}\right\} + \ln\left\{\frac{P(t)}{P_0}\right\} =$$

$$= \ln\left\{\frac{(M-P_0)P(t)}{(M-P(t))P_0}\right\}$$

Substituindo o resultado das integrais obtemos:

$$\frac{1}{M}\ln\left\{\frac{(M-P_0)P(t)}{(M-P(t))P_0}\right\} = \alpha_0(t-t_0) \implies$$

$$\ln\left\{\frac{(M-P_0)P(t)}{(M-P(t))P_0}\right\} = \alpha_0 M(t-t_0) \implies$$

$$\left\{\frac{(M-P_0)P(t)}{(M-P(t))P_0}\right\} = e^{\alpha_0 M(t-t_0)} \implies$$

$$\left\{\frac{P(t)}{M-P(t)}\right\} = \frac{P_0}{M-P_0}e^{\alpha_0 M(t-t_0)} \implies$$

$$P(t) = (M - P(t))\frac{P_0}{M - P_0}e^{\alpha_0 M(t-t_0)} \implies$$

$$P(t) + P(t)\frac{P_0}{M - P_0}e^{\alpha_0 M(t-t_0)} = M\frac{P_0}{M - P_0}e^{\alpha_0 M(t-t_0)} \implies$$

$$P(t)\left\{1 + \frac{P_0}{M - P_0}e^{\alpha_0 M(t-t_0)}\right\} = M\left\{\frac{P_0}{M - P_0}e^{\alpha_0 M(t-t_0)}\right\} \implies$$

$$P(t) = \frac{M\left\{\frac{P_0}{M-P_0}e^{\alpha_0 M(t-t_0)}\right\}}{1+\left\{\frac{P_0}{M-P_0}e^{\alpha_0 M(t-t_0)}\right\}} \Longrightarrow$$

$$P(t) = \frac{M}{1+\frac{M-P_0}{P_0}e^{-\alpha_0 M(t-t_0)}}$$

Quando $P_0 > M$ obtemos:

$$\int_{P_0}^{P(t)} \frac{1}{M-P} dP = \int_{P(t)}^{P_0} \frac{1}{P-M} dP$$

$$\ln\left(P_0 - M\right) - \ln\left(P(t) - M\right) = \ln\left\{\frac{P_0 - M}{P(t) - M}\right\}$$

$$\int_{P_0}^{P(t)} \frac{1}{P} dP = \ln P(t) - \ln P_0 = \ln\left\{\frac{P(t)}{P_0}\right\}$$

$$\int_{P_0}^{P(t)} \frac{1}{M-P} dP + \int_{P_0}^{P(t)} \frac{1}{P} dP = \ln\left\{\frac{P_0 - M}{P(t) - M}\right\} + \ln\left\{\frac{P(t)}{P_0}\right\} =$$

$$= \ln\left\{\frac{(P_0 - M)P(t)}{(P(t) - M)P_0}\right\}$$

Substituindo o resultado das integrais obtemos:

$$\frac{1}{M}\ln\left\{\frac{(P_0-M)P(t)}{(P(t)-M)P_0}\right\} = \alpha_0(t-t_0) \implies$$

$$\ln\left\{\frac{(P_0-M)P(t)}{(P(t)-M)P_0}\right\} = \alpha_0 M(t-t_0) \implies$$

$$\left\{\frac{(P_0-M)P(t)}{(P(t)-M)P_0}\right\} = e^{\alpha_0 M(t-t_0)} \implies$$

$$\left\{\frac{P(t)}{P(t)-M}\right\} = \frac{P_0}{P_0-M}e^{\alpha_0 M(t-t_0)} \implies$$

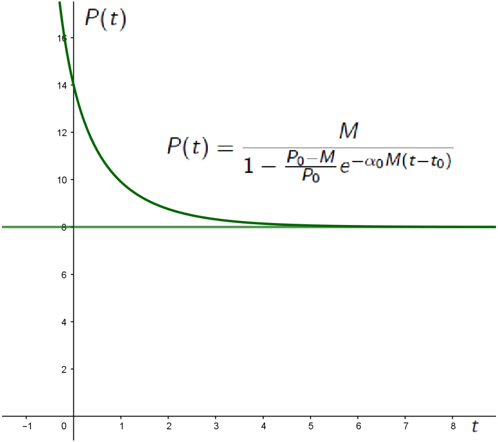
$$P(t) = (P(t) - M)\frac{P_0}{P_0 - M}e^{\alpha_0 M(t-t_0)} \implies$$

$$P(t) - P(t)\frac{P_0}{P_0 - M}e^{\alpha_0 M(t-t_0)} = -M\frac{P_0}{P_0 - M}e^{\alpha_0 M(t-t_0)} \implies$$

$$P(t)\left\{1 - \frac{P_0}{P_0 - M}e^{\alpha_0 M(t-t_0)}\right\} = -M\left\{\frac{P_0}{P_0 - M}e^{\alpha_0 M(t-t_0)}\right\} \implies$$

$$P(t) = \frac{-M\left\{\frac{P_0}{P_0-M}e^{\alpha_0 M(t-t_0)}\right\}}{1-\left\{\frac{P_0}{P_0-M}e^{\alpha_0 M(t-t_0)}\right\}} \Longrightarrow$$

$$P(t) = \frac{M}{1-\frac{P_0-M}{P_0}e^{-\alpha_0 M(t-t_0)}}$$


$P(t)$
$P(t) = \dfrac{M}{1 - \frac{P_0 - M}{P_0} e^{-\alpha_0 M (t - t_0)}}$
16
14
12
10
8
6
4
2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
t