Questões:

- A condição $\phi'(\bar{x}) = 0$ não assegura que $\max_{\chi \in [a,b]} \mid \phi'(\chi) \mid < 1$. Existe alguma alternativa a esta condição que assegure $x_k \longrightarrow \bar{x}$?

- Em caso afirmativo, qual seria uma escolha de x_0?

- Sem a condição $\max_{\chi \in [a,b]} \mid \phi'(\chi) \mid < 1$, como estimar $\mid \bar{x} - x_k \mid$?

Dada uma função $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$, a sequência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ definida a partir de uma escolha de $x_0 \in [a, b]$, por:

$$x_k = \phi(x_{k-1}) = x_{k-1} - \frac{1}{f'(x_{k-1})} f(x_{k-1})$$

converge para $\bar{x} \in [a, b]$, solução de $f(x) = 0$, quando as seguintes hipóteses estão satisfeitas:

- $\bar{x} \in [a, b]$ é a única solução de $f(x) = 0$ em $[a, b]$
- $f(x) \in C^2[a, b]$ (i.e. em $[a, b]$ a primeira e a segunda derivadas de $f(x)$ estão definidas e são funções contínuas).
- A primeira e segunda derivadas de $f(x)$ satisfazem:

$$f'(x) \neq 0 \quad \text{e} \quad f''(x) \neq 0; \quad \forall x \in [a, b]$$

  ou seja, no intervalo $[a, b]$ a função $f(x)$ é estritamente crescente ou estritamente decrescente e tem concavidade definida.
- x_0 é o extremo de $[a, b]$ onde $f(x)f''(x) > 0$

Para entendermos porque estas hipóteses implicam na convergência de $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, primeiro observamos que:

$$\phi'(x) = \frac{d}{dx}\left\{x - \frac{1}{f'(x)}f(x)\right\} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Considerando que $f''(x) \neq 0; \quad \forall x \in [a,b]$, o produto $f(x)f''(x)$ satisfaz:

- Em $[a,b]$, $\bar{x}$ é o único valor para o qual $f(\bar{x})f''(\bar{x}) = 0$

e portanto, em $[a,b]$, $\phi'(x)$ tem uma única mudança de sinal, a qual ocorre em $\bar{x}$

Temos que:

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{f'(x_0)} f(x_0)$$

Escohendo x_0 como o extremo de $[a, b]$ onde $f(x)f''(x) > 0$:

- Se $x_0 = a$ e $f(x_0) < 0$
  temos

$$f'(x_0) > 0 \quad \frac{1}{f'(x_0)} f(x_0) < 0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{f'(x_0)} f(x_0) > x_0$$

Temos também que

$$x_0 < x_1 < \bar{x}$$

onde a última desigualdade é consequência de que $\exists \eta \in [a, \bar{x}]$ tal que:

$$\bar{x} - x_1 = \phi'(\eta)(\bar{x} - x_0)$$

Como em $[a, \bar{x}]$, $\phi'(x) > 0$ temos

$$\phi'(\eta)(\bar{x} - x_0) > 0$$

e portanto

$$\bar{x} - x_1 > 0$$

- Se $x_0 = a$ e $f(x_0) > 0$
  temos

$$f'(x_0) < 0 \quad \frac{1}{f'(x_0)} f(x_0) < 0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{f'(x_0)} f(x_0) > x_0$$

Temos também que

$$x_0 < x_1 < \bar{x}$$

onde a última desigualdade é consequência de que $\exists \eta \in [a, \bar{x}]$ tal que:

$$\bar{x} - x_1 = \phi'(\eta)(\bar{x} - x_0)$$

Como em $[a, \bar{x}]$, $\phi'(x) > 0$ temos

$$\phi'(\eta)(\bar{x} - x_0) > 0$$

e portanto

$$\bar{x} - x_1 > 0$$

- Se $x_0 = b$ e $f(x_0) < 0$
  temos

$$f'(x_0) < 0 \quad \frac{1}{f'(x_0)} f(x_0) > 0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{f'(x_0)} f(x_0) < x_0$$

Temos também que

$$\bar{x} < x_1 < x_0$$

onde a última desigualdade é consequência de que $\exists \eta \in [\bar{x}, b]$ tal que:

$$\bar{x} - x_1 = \phi'(\eta)(\bar{x} - x_0)$$

Como em $[\bar{x}, b]$, $\phi'(x) > 0$ temos

$$\phi'(\eta)(\bar{x} - x_0) < 0$$

e portanto

$$x_1 - \bar{x} > 0$$

- Se $x_0 = b$ e $f(x_0) > 0$
  temos

$$f'(x_0) > 0 \quad \frac{1}{f'(x_0)} f(x_0) > 0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{f'(x_0)} f(x_0) < x_0$$

Temos também que

$$\bar{x} < x_1 < x_0$$

onde a última desigualdade é consequência de que $\exists \eta \in [\bar{x}, b]$ tal que:

$$\bar{x} - x_1 = \phi'(\eta)(\bar{x} - x_0)$$

Como em $[\bar{x}, b]$, $\phi'(x) > 0$ temos

$$\phi'(\eta)(\bar{x} - x_0) < 0$$

e portanto

$$\bar{x} < x_1$$

A seguir verificamos que com as hipóteses consideradas, no algoritmo de Newton Raphson a convergência é quadrática

$$\bar{x} - x_k = \phi(\bar{x}) - \phi(x_{k-1}) =$$

Devido ao fato de que $f(x) \in C^2\,[a,b]$ e $f'(x) \neq 0$;
$\phi(x) \in C^2\,[a,b]$ e portanto existe $\xi \in [a,b]$ tal que:

$$\phi(x_{k-1}) = \left\{\phi(\bar{x}) + \cancelto{0}{\phi'(\bar{x})}(x_{k-1} - \bar{x}) + \frac{1}{2}\phi''(\xi)(x_{k-1} - \bar{x})^2\right\}$$

$\Longrightarrow$

$$\phi(\bar{x}) - \phi(x_{k-1}) = -\frac{1}{2}\phi''(\xi)(\bar{x} - x_{k-1})^2$$

$\Longrightarrow$

$$\mid \bar{x} - x_k \mid = \frac{1}{2} \mid \phi''(\xi) \mid\mid \bar{x} - x_{k-1} \mid^2$$

Com as hipóteses:

- A primeira e segunda derivadas de $f(x)$ satisfazem:

$$f'(x) \neq 0 \quad \text{e} \quad f''(x) \neq 0; \quad \forall x \in [a, b]$$

  ou seja, no intervalo $[a, b]$ a função $f(x)$ é estritamente crescente ou estritamente decrescente e tem concavidade definida.
- x_0 é o extremo de $[a, b]$ onde $f(x)f''(x) > 0$

nós verificamos que a sequência $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é tal que todos os valores de x_k estão localizados entre x_0 e $\bar{x}$ e, no intervalo definido por estes dois valores temos $\phi'(x) > 0; \forall x \neq \bar{x}$.

A partir desta observação, no caso em que $x_0 = a$ nós modificamos o procedimento iterativo definindo:

$$x_k = \phi(x_{k-1} + 2\epsilon)$$

Ao consideramos o argumento $x_{k-1} + 2\epsilon$ temos duas possibilidades:

1. $x_{k-1} + 2\epsilon < \bar{x}$

   ou

2. $x_{k-1} + 2\epsilon > \bar{x}$

Caso 1.
Devemos continuar o nosso processo iterativo como a certeza de que $x_k = \phi(x_{k-1} + 2\epsilon) < \bar{x}$.

Caso 2
Temos a situação em que $x_{k-1} < \bar{x}$ e $x_{k-1} + 2\epsilon > \bar{x}$ e portanto,

$$\bar{x} \in [x_{k-1}, x_{k-1} + 2\epsilon]$$

podemos então concluir que $\tilde{x} = x_{k-1} + \epsilon$, e o ponto médio de $[x_{k-1}, x_{k-1} + 2\epsilon]$, é uma solução numérica de $f(x) = 0$ com precisão ϵ.

Concluimos então que no caso do algoritmo de Newton Raphson, quando as hipóteses enunciadas anteriormente estiverem satisfeitas e considerando uma precisão ϵ, no caso em que a escolha de x_0 é o valor a, definimos os valores de x_k por:

$$x_k = \phi(x_{k-1} + 2\epsilon)$$

e o processo deve ser iterado enquanto $\phi(x_{k-1} + 2\epsilon) > x_{k-1} + 2\epsilon$. Quando for observada a desigualdade $\phi(x_{k-1} + 2\epsilon) < x_{k-1} + 2\epsilon$, temos a indicação de que $x_{k-1} < \bar{x} < x_{k-1} + 2\epsilon$ indicando que $\bar{x} \in [x_{k-1}, x_{k-1} + 2\epsilon]$

Um argumento equivalente pode ser feito quando $x_0 = b$. Neste caso devemos definir

$$x_k = \phi(x_{k-1} - 2\epsilon)$$

e o processo deve ser iterado enquanto $\phi(x_{k-1} - 2\epsilon) < x_{k-1} - 2\epsilon$. Quando for observada a desigualdade $\phi(x_{k-1} - 2\epsilon) > x_{k-1} - 2\epsilon$, temos a indicação de que $x_{k-1} - 2\epsilon < \bar{x} < x_{k-1}$ indicando que $\bar{x} \in [x_{k-1} - 2\epsilon, x_{k-1}]$ de onde podemos concluir que $\tilde{x} = x_{k-1} - \epsilon$ é uma solução nimérica de $f(x) = 0$ com precisão ϵ.