Dicotomia

Dicotomia

Na aula anterior, consideramos a função

$$f(x) = e^{-x} - x$$

Dicotomia

Na aula anterior, consideramos a função

$$f(x) = e^{-x} - x$$

Fizemos também as seguintes observações

Dicotomia

Na aula anterior, consideramos a função

$$f(x) = e^{-x} - x$$

Fizemos também as seguintes observações

- $$\frac{df}{dx}(x) = -e^{-x} - 1 < 0; \forall x \in \mathbb{R}$$

  portanto $f(x)$ é monótona decrescente para $x \in \mathbb{R}$.

Dicotomia

Na aula anterior, consideramos a função

$$f(x) = e^{-x} - x$$

Fizemos também as seguintes observações

- $$\frac{df}{dx}(x) = -e^{-x} - 1 < 0; \forall x \in \mathbb{R}$$

  portanto $f(x)$ é monótona decrescente para $x \in \mathbb{R}$.

- $$f(0)f(1) = -0.63212 < 0$$

Dicotomia

Na aula anterior, consideramos a função

$$f(x) = e^{-x} - x$$

Fizemos também as seguintes observações

- $$\frac{df}{dx}(x) = -e^{-x} - 1 < 0; \forall x \in \mathbb{R}$$

  portanto $f(x)$ é monótona decrescente para $x \in \mathbb{R}$.
- $$f(0)f(1) = -0.63212 < 0$$

E, com estas observações, concluimos que

$$\exists ! \bar{x} \in [0.0, 1.0] \mid f(\bar{x}) = 0$$

Considerando o intervalo $[a_0, b_0] = [0.0, 1.0]$ temos que:

$$\exists! \bar{x} \in [a_0, b_0] \mid f(\bar{x}) = 0$$

Considerando o intervalo $[a_0, b_0] = [0.0, 1.0]$ temos que:

$$\exists! \bar{x} \in [a_0, b_0] \mid f(\bar{x}) = 0$$

assim podemos afirmar que para

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

Considerando o intervalo $[a_0, b_0] = [0.0, 1.0]$ temos que:

$$\exists! \bar{x} \in [a_0, b_0] \mid f(\bar{x}) = 0$$

assim podemos afirmar que para

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

é uma aproximação de $\bar{x}$ com precisão $\epsilon_0 = \frac{b_0 - a_0}{2}$ pois

Considerando o intervalo $[a_0, b_0] = [0.0, 1.0]$ temos que:

$$\exists ! \bar{x} \in [a_0, b_0] \mid f(\bar{x}) = 0$$

assim podemos afirmar que para

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

é uma aproximação de $\bar{x}$ com precisão $\epsilon_0 = \frac{b_0 - a_0}{2}$ pois

$$[a_0, b_0] = [x_0 - \epsilon_0, x_0 + \epsilon_0]$$

No exemplo

$$[a_0, b_0] = [0.0, 1.0] \implies \epsilon_0 = \frac{1.0 - 0.0}{2} = 0.5$$

e não podemos afirmar que $x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ é uma solução numérica de $f(x) = 0$ com precisão $\epsilon = 10^{-3}$.

No exemplo

$$[a_0, b_0] = [0.0, 1.0] \implies \epsilon_0 = \frac{1.0 - 0.0}{2} = 0.5$$

e não podemos afirmar que $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$ é uma solução numérica de $f(x) = 0$ com precisão $\epsilon = 10^{-3}$.

Porém como $f(x)$ muda de sinal no intervalo $[a_0, b_0]$ uma única vez nós temos que:

No exemplo

$$[a_0, b_0] = [0.0, 1.0] \implies \epsilon_0 = \frac{1.0 - 0.0}{2} = 0.5$$

e não podemos afirmar que $x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ é uma solução numérica de $f(x) = 0$ com precisão $\epsilon = 10^{-3}$.

Porém como $f(x)$ muda de sinal no intervalo $[a_0, b_0]$ uma única vez nós temos que:

- ou $f(x)$ muda se sinal no intervalo $[a_0, x_0]$ e portanto $\bar{x} \in [a_0, x_0]$

No exemplo

$$[a_0, b_0] = [0.0, 1.0] \implies \epsilon_0 = \frac{1.0 - 0.0}{2} = 0.5$$

e não podemos afirmar que $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$ é uma solução numérica de $f(x) = 0$ com precisão $\epsilon = 10^{-3}$.

Porém como $f(x)$ muda de sinal no intervalo $[a_0, b_0]$ uma única vez nós temos que:

- ou $f(x)$ muda se sinal no intervalo $[a_0, x_0]$ e portanto $\bar{x} \in [a_0, x_0]$
- ou $f(x)$ muda se sinal no intervalo $[x_0, b_0]$ e portanto $\bar{x} \in [x_0, b_0]$

Verificando o sinal de $f(a_0)f(x_0)$ podemos decidir qual das alternativas,

Verificando o sinal de $f(a_0)f(x_0)$ podemos decidir qual das alternativas,

- $\bar{x} \in [a_0, x_0]$

  ou

Verificando o sinal de $f(a_0)f(x_0)$ podemos decidir qual das alternativas,

- $\bar{x} \in [a_0, x_0]$

  ou

- $\bar{x} \in [x_0, b_0]$

é verdadeira.

Se $\bar{x} \in [a_0, x_0]$ for verdadeira, nós definimos:

$$a_1 = a_0; \quad b_1 = x_0$$

Se $\bar{x} \in [a_0, x_0]$ for verdadeira, nós definimos:

$$a_1 = a_0; \quad b_1 = x_0$$

e a partir de a_1 e b_1 nós definimos

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}; \quad \epsilon_1 = \frac{b_1 - a_1}{2}$$

Se $\bar{x} \in [a_0, x_0]$ for verdadeira, nós definimos:

$$a_1 = a_0; \quad b_1 = x_0$$

e a partir de a_1 e b_1 nós definimos

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}; \quad \epsilon_1 = \frac{b_1 - a_1}{2}$$

com estas definições temos que

$$\bar{x} \in [a_1, b_1] = [x_1 - \epsilon_1, x_1 + \epsilon_1]$$

Alternativamente, se $\bar{x} \in [x_0, b_0]$ for verdadeira, nós definimos:

$$a_1 = x_0; \quad b_1 = b_0$$

Alternativamente, se $\bar{x} \in [x_0, b_0]$ for verdadeira, nós definimos:

$$a_1 = x_0; \quad b_1 = b_0$$

e a partir de a_1 e b_1 nós definimos

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}; \quad \epsilon_1 = \frac{b_1 - a_1}{2}$$

Alternativamente, se $\bar{x} \in [x_0, b_0]$ for verdadeira, nós definimos:

$$a_1 = x_0; \quad b_1 = b_0$$

e a partir de a_1 e b_1 nós definimos

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}; \quad \epsilon_1 = \frac{b_1 - a_1}{2}$$

com estas definições temos que

$$\bar{x} \in [a_1, b_1] = [x_1 - \epsilon_1, x_1 + \epsilon_1]$$

Podemos então iterar este procedimento com os seguintes passos:

Podemos então iterar este procedimento com os seguintes passos:

Obtidos a_k, b_k e definidos $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$ e $\epsilon_k = \frac{b_k-a_k}{2}$

Podemos então iterar este procedimento com os seguintes passos:

Obtidos a_k, b_k e definidos $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$ e $\epsilon_k = \frac{b_k-a_k}{2}$

- Verifique se $f(a_k)f(x_k) < 0$.

Podemos então iterar este procedimento com os seguintes passos:

Obtidos a_k, b_k e definidos $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$ e $\epsilon_k = \frac{b_k-a_k}{2}$

- Verifique se $f(a_k)f(x_k) < 0$.
- Se verdadeiro defina

$$a_{k+1} = a_k; \quad b_{k+1} = x_k$$

Podemos então iterar este procedimento com os seguintes passos:

Obtidos a_k, b_k e definidos $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$ e $\epsilon_k = \frac{b_k-a_k}{2}$

- Verifique se $f(a_k)f(x_k) < 0$.
- Se verdadeiro defina

$$a_{k+1} = a_k; \quad b_{k+1} = x_k$$

- caso contrário, $(f(a_k)f(x_k) > 0)$, defina

$$a_{k+1} = x_k; \quad b_{k+1} = b_k$$

Este procedimento deve ser iterado até que

$$\epsilon_k = \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}} \leq \epsilon$$

Assim se n é o menor inteiro tal que:

$$n \geq \log_2^{\frac{b_0 - a_0}{\epsilon}} - 1$$

$\tilde{x} = x_n$ é um solução numérica de $f(x) = 0$ com precisão ϵ

Dicotomia

Aproximações Sucessivas

Aproximações Sucessivas

$$f(x) = e^{-x} - x = 0 \iff x = e^{-x} = \phi(x)$$

Aproximações Sucessivas

$$f(x) = e^{-x} - x = 0 \iff x = e^{-x} = \phi(x)$$

Aproximações Sucessivas