

Lista 21 MAT-206 e MAP-216

(1) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável.

(i) Prove que se $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

(ii) Dê exemplo de uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\int_a^b |f(x)|dx = 0$, mas f não é identicamente nula.

(iii) Prove que se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $\int_a^b |f(x)|dx = 0$ então $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$.

(2) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua.

Prove que existe $c \in [a, b]$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$ (Teorema do Valor Médio para Integrais).

Mostre, com um exemplo, que a propriedade enunciada pode não valer se f não for contínua.

(3) Calcule a derivada das seguintes funções:

(a) $F(x) = \int_2^x e^{t^2} dt$

(b) $F(x) = \int_{10}^x e^{t^2} dt$

(c) $F(x) = \int_x^4 \cos(t^3) dt$

(d) $F(x) = \int_0^{x^5} \operatorname{sen}(t^3) dt$

(e) $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sqrt{1 + t^4} dt$

(4) Seja $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t < 0 \\ t & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$

Determine e esboce o gráfico da função $F(x) = \int_2^x f(t)dt, \forall x \in \mathbb{R}$.

(5) Prove que toda função monótona $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável.