Lista 18 - MAT-206 e MAP-216

(I) Considere a sequência (f_n) de funções, sendo $f_n(x) = \dfrac{1}{nx^2}$, $\forall\ n \geq 1$

(i) Determine o domínio da função f dada por $f(x) = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x)$.

(ii) Estude a convergência uniforme da sequência em $[1, +\infty[$ e em $]0, +\infty[$.

(II) Para cada $n \geq 1$, seja $f_n(x) = \dfrac{n}{nx^2 + 1}$.

(i) Determine o domínio da função f dada por $f(x) = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x)$.

(ii) Estude a convergência uniforme da sequência em $[\frac{1}{2}, +\infty[$ e em $]0, +\infty[$.

(III) Em cada caso, prove que a convergência não é uniforme:

(a) $f_n(x) = (senx)^n$, $\forall\ x \in [0, \pi]$

(b) $f_n(x) = \sqrt[n]{senx}$, $\forall\ x \in [0, \pi]$

(c) $f_n(x) = \dfrac{sennx}{1 + n^2x^2}$

(d) $f_n(x) = \dfrac{n}{x + n}$

(IV) Seja $f(x) = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x)$, com $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $\forall\ x \in [0, 1]$.

Calcule $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ e $\int_0^1 f(x)dx$. A convergência é uniforme ?

(V) Seja $(f_n : D \longrightarrow \mathbb{R})$ uma sequência de funções que converge uniformemente para uma função f. Se f é limitada então existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$, $\forall\ n \geq 1$, $\forall\ x \in D$. (isto é, a sequência (f_n) é uniformemente limitada).

(VI) Sejam $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ e (f_n) e (g_n) duas sequências de funções definidas em D tais que $f_n \stackrel{u}{\rightarrow} f$ e $g_n \stackrel{u}{\rightarrow} g$.

(i) Prove que $(f_n + g_n) \stackrel{u}{\rightarrow} (f + g)$.

(ii) Prove que se f e g forem funções limitadas então a sequência $(f_n g_n)$ converge uniformemente para $f.g$. (Você vai precisar do resultado do exercício (VI).)

(iii) Dê exemplo de duas sequêcias de funções que convergem uniformemente, mas o produto, embora seja convergente, não é uniformemente convergente.

(VII) Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função uniformemente contínua e (f_n) uma sequência de funções que converge uniformemente para f. Prove que $g \circ f_n \rightarrow g \circ f$ e a convergência é uniforme. Analise também a questão de convergência da sequência $(f_n \circ g)$.