Lista 17 - MAT-206 e MAP-216

(I) Seja $f(x) = ln(1+x)$.

(i) Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 da função f em torno do ponto $x_0 = 0$.

(ii) Calcule um valor aproximado para $ln(1,2)$ usando o polinômio do item (i) e avalie o erro cometido nesta estimativa.

(II) Seja $f(x) = e^x$.

(i) Determine o polinômio de Taylor $p(x)$ de ordem n da função f em torno do ponto $x_0 = 0$ e avalie o erro cometido quando se substitui a função f pelo polinômio no intervalo $[0, 1]$.

(ii) Calcule um valor aproximado para a integral $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, com erro inferior a 10^{-3}, utilizando o polinômio do item (i).

(III) Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

(i) $|senx - (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!})| \leq \dfrac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$

(ii) Calcule $\int_0^1 sen(x^2) dx$ com erro inferior a 10^{-3}.

(IV) Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} (1+4x)^{\frac{1}{x}}$

(b) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} (\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{senx})$

(c) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} (5x^2 + x)^x$

(d) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (\dfrac{3x}{3x+4})^{x+1}$

(V) A função $f(x) = x^3$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, é bijetora e derivável, mas a função inversa de f, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, não é derivável em zero.

Seja $f : I \longrightarrow J$ uma funçâo derivável e bijetora definida no intervalo I, e $a \in I$ com $f(a) = b$. Prove que se $f'(a) \neq 0$ então a função $g = f^{-1}$ é derivável em b e $f'(a).g'(b) = 1$.

(VI) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável com $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, e $g = f^{-1}$ a sua inversa. Sabe-se que $f(5) = 3$ e $f'(5) = 9$. Considere $u(x) = g(x^3 + 3x^2 - x)$. Calcule $u'(1)$.

(VII) A função $f(x) = \begin{cases} x^2 sen(\dfrac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

é derivável em $\mathbb{R}$, mas não existe $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f'(x)$.

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $\mathbb{R}$, e derivável em $\mathbb{R} - \{x_0\}$. Suponhamos que existe $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f'(x) = l$. Prove que $f'(x_0) = l$.