EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS (EDO)

MAP 3121 JULHO DE 2021

ANDRÉ SALLES DE CARVALHO

$\boxed{\text{AULA 1}}$

A TEORIA

- EDO's foram inventadas por Newton, junto com o cálculo e várias outras coisas.

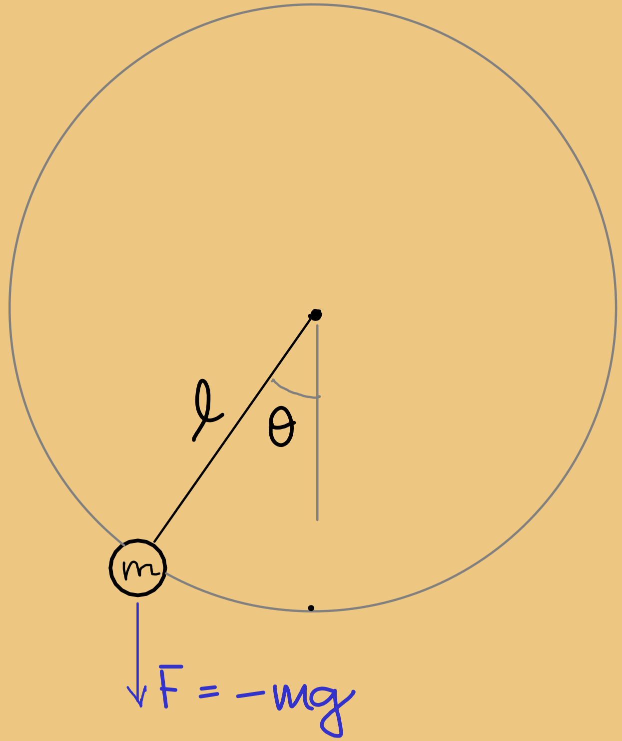
- O objetivo não era infernizar a vida dos estudantes de todo o mundo pelos séculos vindouros.

- EDO's são uma das principais ferramentas usadas em ciência para entender, modelar e descrever a realidade.

- Além de matemática, EDO's são usadas em física, engenharia, química, biologia, etc.

- Veremos um exemplo de modelagem de doenças infecciosas.

O PÊNDULO SIMPLES



- Posição : $s(t) = \ell\,\theta(t)$
- Velocidade : $v(t) = \dfrac{d}{dt}s(t) = \ell\,\theta'(t)$
- Aceleração : $a(t) = \dfrac{d}{dt}v(t) = \ell\,\theta''(t)$

- Lei de Newton $\quad ma = F$

- Só que aqui devemos considerar apenas a componente tangencial $-mg\,\mathrm{sen}\,\theta$ da força (devido à restrição do movimento pela haste)

$$\cancel{m}\,\ell\,\theta''(t) = -\cancel{m}g\,\mathrm{sen}\,\theta \iff \boxed{\theta'' = -\frac{g}{\ell}\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

Equação Diferencial Ordinária

EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA

Tem um sinal $=$

Envolve derivadas

Essas derivadas são todas em relação a uma única variável

Pêndulo Simples

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$\neq$

Equação Diferencial PARCIAL

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

A TEORIA

- Vamos estudar equações da forma

(*) $$\boxed{y' = f(t,y)} \iff \boxed{\frac{dy}{dt} = f(t,y)}$$

onde

- f é uma <u>função dada</u> que depende das variáveis t, y

- y é, ela própria, uma função da variável t que <u>queremos encontrar</u> : $y(t)$ é a <u>INCÓGNITA</u> de (*)

- Isto é, estamos procurando uma função $y(t)$ tal que

$$\boxed{\frac{d}{dt}\, y(t) = f(t, y(t))} \quad \forall t \text{ em um intervalo } (a,b) \subset \mathbb{R}$$

- No caso do pêndulo simples, tínhamos $\theta'' = -\frac{g}{\ell}\,\text{sen}\,\theta$ e a incógnita é o ângulo θ como função de t.

- Essa equação <u>parece</u> com a $(*)$ da página anterior $(y' = f(t,y))$, mas é um pouco diferente. <u>Por quê</u>?

- Na equação do pêndulo, temos uma <u>derivada segunda</u>.

<u>Adiantando</u>: $\begin{cases} \theta = x \\ \theta' = y \end{cases}$ $\quad \theta'' = y' \quad$ $Y = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$Y' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -\frac{g}{\ell}\,\text{sen}\,x \end{bmatrix} = F(Y) = F(t,Y)$$

Alguns Exemplos

$$(*) \quad \boxed{y' = f(t,y)}$$

f uma função real (de duas variáveis)
y é a incógnita, função real
da variável t.

Ex-1: $y' = 0$ ← Nesse caso, $f(t,y) \equiv 0$

P: Qual função $y(t)$ tem derivada = zero?

PAROU!

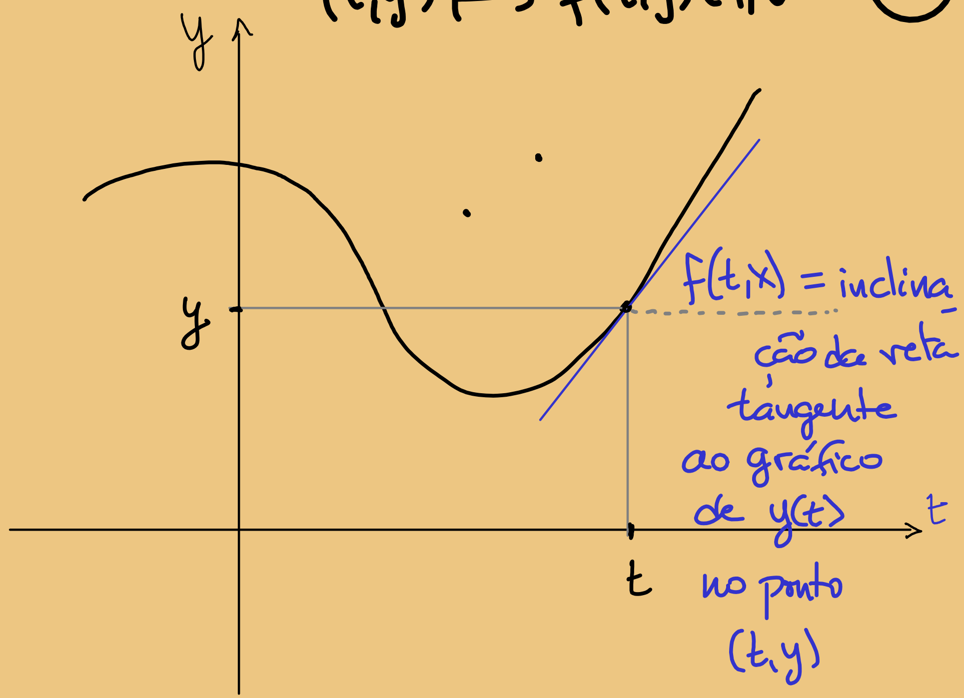
R: $y(t) = C$ = constante

Ex 0: $y' = f(t)$ ← Nesse caso, f depende apenas da variável t e não depende da variável y.

$$\frac{dy}{dt} = f(t) \overset{TFC}{\Longrightarrow} \qquad y(t) = C + \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt$$

- Antes de continuar, vejamos o que a equação (*) $\underline{y' = f(t,y)}$ quer dizer.

$$(t,y) \xmapsto{f} f(t,y) \in \mathbb{R}$$



- A cada ponto no plano (t,y) a função f associa um número $f(t,y)$.

- Esses números são interpretados como <u>inclinações</u> na equação $y' = f(t,y)$.

- Resolver a equação (*) consiste em encontrar funções $y(t)$ cujos gráficos têm tangentes com as inclinações prescritas por $f(t,x)$.

- $f(t,x)$ define um CAMPO DE TANGENTES no plano (t,y) ⑨

- As soluções de $\boxed{y' = f(t,y)}$ têm gráficos que são tangentes a esse campo, como mostra a figura (troque x por y).

O campo de tangentes é dado por $f(t,y) = f(y) = ay(1-y)$, $a > 0$.

6 Chapter 1 First-Order Equations

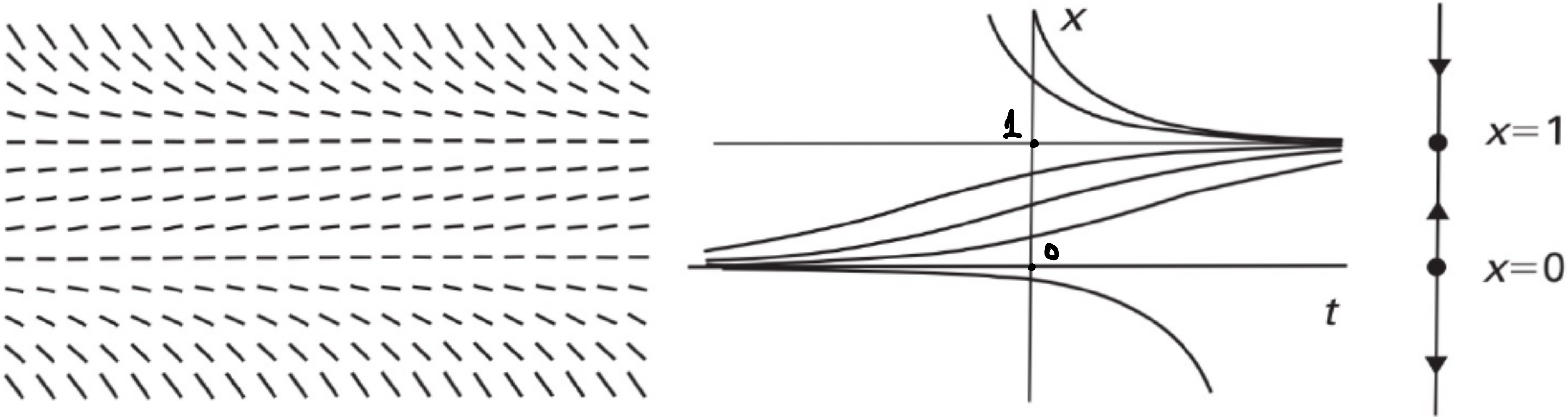


Figure 1.3 The slope field, solution graphs, and phase line for $x' = ax(1-x)$.

Do livro Hirsch, Smale, Devaney de EDO.

• Finalmente chegamos ao

Equação AUTÔNOMA : f não depende (explicitamente) da variável t.

Ex 1 : $y' = y$ (isto é, $\underbrace{f(t,y) = f(y)}$ $= y$)

Em palavras, resolver essa equação quer dizer encontrar uma função $y(t)$ cuja derivada é ela própria.

Qual função é esta? $y(t) = C e^{t} \Rightarrow y'(t) = C e^{t} = y(t)$.

Ex 2 : $y' = -ty$

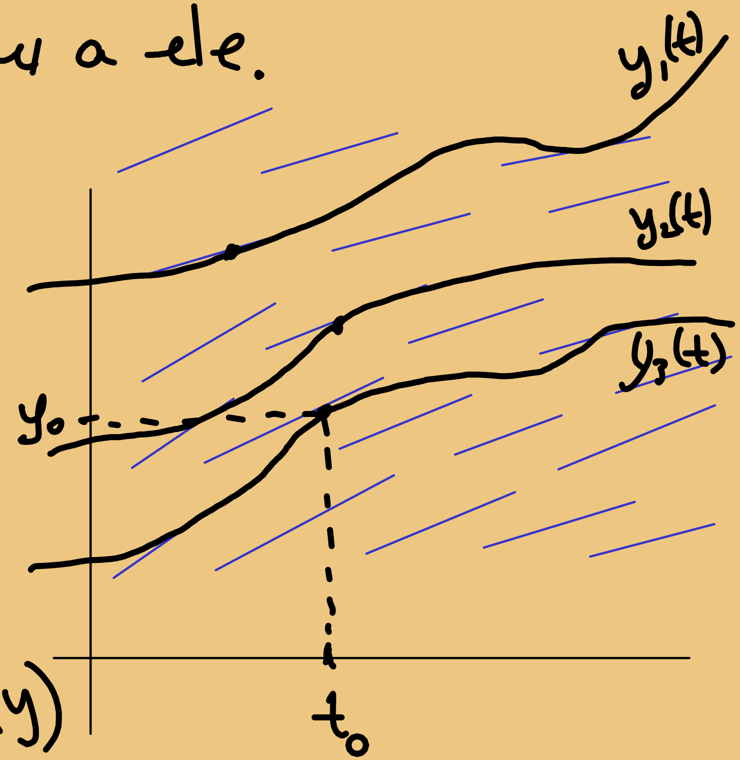
Soluções : $y(t) = \underline{e^{-t^2/2 + C}}$, onde C é uma constante.

Verifique : Derive em relação a t (use a regra da cadeia!).

PROBLEMA DE VALOR INICIAL

- Em todos os exemplos acima (-1, 0, 1, 2) as soluções tinham uma constante indeterminada.

- Isso é natural: se $f(t,x)$ é um campo de tangentes no plano, devemos esperar que haja vários gráficos tangentes a ele.



- Para eliminar essa "ambiguidade", damos um VALOR INICIAL, isto é, especificamos que $y(t_0) = y_0$, onde t_0 e y_0 são dados.

- O PROBLEMA DE VALOR INICIAL (PVI)

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Ex -1: $\begin{cases} y' = 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \Longrightarrow \quad y(t) \equiv y_0$

Ex 0 $\begin{cases} y' = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \Longrightarrow \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt$

Ex 1: $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = y_0 \end{cases} \Longrightarrow \quad y(t) = y_0 e^t$ $\qquad \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad y(t) = e^t$

Ex 2 $\begin{cases} y' = -ty \\ y(0) = 5 \end{cases} \Longrightarrow \quad y(t) = ?$ (Exercício)

FIM da Aula 1