Lista 16 MAT-206 e MAP-216

Definição: Uma função $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua (u.c.) se verifica a seguinte condição:

para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para $x, y \in D_f$, se $|x - y| < \delta$ então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Propriedades de funções uniformemente contínuas:

Proposição 1: A imagem de uma sequência de Cauchy por uma função u.c. é uma sequência de Cauchy.

Demonstração: seja $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função u.c., e suponhamos (x_n) uma sequência de Cauchy em D_f. Vamos provar que $(f(x_n))$ é uma sequência de Cauchy.

Seja $\epsilon > 0$. Como f é u.c., existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \epsilon \qquad (*)$$

Como (x_n) é uma seqência de Cauchy, existe $n_0 \geq 1$ tal que, para $m, n \geq n_0$, tem-se que $|x_n - x_m| < \delta$. Logo, por (*), resulta que, para $m, n \geq n_0$, obtemos $|f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon$, e portanto, $(f(x_n))$ é uma sequência de Cauchy. $\triangle$

Proposição 2: Se $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e K é compacto então f é u.c.

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$. Vamos provar que existe $\delta > 0$ tal que, para $x, y \in K$, se $|x - y| < \delta$ então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Como f é contínua, para cada $x \in K$, existe $\delta_x > 0$ tal que

$$|y - x| < \delta_x \Rightarrow \ |f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Vamos designar $\theta_x =]x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2}[, \ \forall \ x \in K$.

Temos então a seguinte cobertura aberta de K:

$K \subseteq \bigcup\{\theta_x : x \in K\}$

Como K é compacto, K admite uma subcobertura finita: existem $x_1, x_2, \ldots, x_m \in K$ tais que $K \subseteq \bigcup\{\theta_{x_j} : 1 \leq j \leq m\} = \theta_{x_1} \cup \ \theta_{x_2} \cup \ldots \cup \theta_{x_m}$

Seja $0 < \delta < min\{\frac{\delta_{x_j}}{2} : 1 \leq j \leq m\}$. Vamos provar que, para $x, y \in K$, se $|x - y| < \delta$ então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Considere, pois $|x - y| < \delta$. Como $K \subseteq \bigcup\{\theta_{x_j} : 1 \leq j \leq m\}$, existe i, $1 \leq i \leq m$ tal que $x \in \theta_{x_i} =]x_i - \frac{\delta_{x_i}}{2}, x_i + \frac{\delta_{x_i}}{2}[$. Então $|x - x_i| < \frac{\delta_{x_i}}{2}$.

Por sua vez, $|y - x_i| \leq |y - x| + |x - x_i| < \delta + \frac{\delta_{x_i}}{2} \leq \frac{\delta_{x_i}}{2} + \frac{\delta_{x_i}}{2} = \delta_{x_i}$. Logo, $|f(y) - f(x_i)| < \frac{\epsilon}{2}$.

Dessa forma,

$$|f(x)-f(y)| \leq \ |f(x)-f(x_i| + |f(x_i)-f(y)| < \tfrac{\epsilon}{2}+\tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon. \text{ Logo, } f \text{ é u.c.} \qquad \triangle$$

Proposição 3: Se $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função u.c. e D é um conjunto limitado então a imagem $f(D)$ de f também é um conjunto limitado.

Demonstração: Suponhamos, sem perda de generalidade, que f não seja limitada superiormente. Então, para todo $n \geq\ 1$, existe $x_n \in D$ tal que $f(x_n) > n$.

Como D é um conjunto limitado e (x_n) é uma sequência de pontos de D, (x_n) é uma sequência limitada, e portanto, tem subsequência (x_{n_j}) convergente.
Sendo convergente, (x_{n_j}) é uma sequência de Cauchy. Como f é u.c., $(f(x_{n_j}))$ é de Cauchy, e portanto, deve ser limitada: contradição, pois $f(x_{n_j}) > n_j$, e portanto, $(f(x_{n_j}))$ é ilimitada. Analogamente provamos que $f(D)$ é limitada inferiormente. Logo, $f(D)$ é limitada. $\triangle$

Proposição 4: Seja $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ uma função u.c. Entã é possível extender f a uma função u.c. em $[a,b]$, isto é:

existe $\tilde{f} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ u.c. tal que $\tilde{f}(x) = f(x)$, $\forall\ x \in\ ]a,b[$.
Esta extensão é única.

(I) Prove que cada uma das funções dadas é uniformemente contínua (u.c.) pela definição:

(a) $f(x) = x^3$, $\forall\ x \in [0,2]$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\forall\ x \in [2,+\infty[$

(c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $\forall\ x \in [0,+\infty[$.

(II) Prove que a função $f(x) = \sqrt{x}$ é u.c. em $[0,+\infty[$.

(III) Sejam $f,g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ funções u.c. em D, e $g(x) \neq 0$, $\forall\ x \in D$. Mostre, com um exemplo, que a função $\dfrac{f}{g}$ pode não ser u.c. em D.

(IV) (a) Dê exemplo de duas funções u.c. cujo produto não é u.c.

(b) Prove que se f e g são funções u.c. e limitadas então fg é u.c.

(V) Prove que se $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função u.c. e D é um conjunto limitado então f é limitada.

(VI) Uma função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita lipschtiziana se existe $M > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$, $\forall\ x, y \in D$.

(i) Prove que toda função lipschtiziana é u.c.

(ii) Verifique que a função $f(x) = \sqrt{x}$ não é lipschtiziana em $[0, +\infty[$. Portanto, a recíproca da propriedade enunciada em (i) não é verdadeira.