Sobre sequências de Cauchy e a Completude de $\mathbb{R}$

Dizemos que uma sequência (x_n) de números reais é uma sequência de Cauchy se:

$$\forall\ \epsilon > 0\, \exists\ n_0 \geq 1\, (\forall\ m, n \geq n_0 \Rightarrow\ |x_m - x_n| < \epsilon)$$

Os próximos dois resultados listam propriedades importantes das sequências de Cauchy.

Proposição: Toda sequência de Cauchy é limitada.

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Então existe $n_0 \geq 1$ tal que

$$\forall\ m, n \geq n_0 \Rightarrow\ |x_m - x_n| < 1.$$

Em particular, para todo $n \geq n_0$, $\ |x_n - x_{n_0}| < 1$.

Seja $M = \max\{|x_1 - x_{n_0}|, \cdots |x_{n_0-1} - x_{n_0}|, 1\}$.

Então $|x_n - x_{n_0}| \leq\ M$, $\forall n \geq 1$, e portanto, $x_{n_0} - M \leq x_n \leq x_{n_0} + M$, $\forall n \geq 1$. $\triangle$

Proposição: Se uma sequência (x_n) é de Cauchy e possui subsequência convergente então (x_n) é convergente.

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy e (x_{n_j}) uma subsequência de (x_n) que converge para um número $l \in \mathbb{R}$. Vamos provar que $x_n \longrightarrow l$.

Seja $\epsilon\ > 0$. Como $x_{n_j} \longrightarrow l$, existe $j_0 \geq 1$ tal que

$$\forall j \geq j_0, \quad |x_{n_j} - l| < \tfrac{\epsilon}{2}$$

Por sua vez, sendo (x_n) uma sequência de Cauchy, existe $k_0 \geq 1$ tal que

$$\forall m, n \geq k_0, \quad |x_m - x_n| < \tfrac{\epsilon}{2}$$

Seja r_0 tal que $n_{r_0} \geq \max\{n_{j_0}, k_0\}$. Então, para $n \geq n_{r_0}$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} |x_n - x_{n_{r_0}}| < \frac{\epsilon}{2} \\ \\ |x_{n_{r_0}} - l| < \frac{\epsilon}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow\ |x_n - l|\ \leq\ |x_n - x_{n_{r_0}}| + |x_{n_{r_0}} - l|\ <\ \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}\ =\ \epsilon.$$

Logo, $x_n\ \longrightarrow\ l.$

$\triangle$

Teorema: Em $\mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) Axioma da Completude (AC): Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio e limitado superiormente possui supremo.

(2) Princípio dos Intervalos Encaixantes (PIE): Seja (I_n) uma sequência de intervalos fechados e limitados, $I_n = [a_n, b_n]$, $\forall\ n \geq 1$, tais que $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$. Então $\bigcap_{n\geq 1} I_n \neq \emptyset$.

Se, além disso, tivermos $(b_n - a_n) \longrightarrow 0$ então existe um único elemento $l \in \mathbb{R}$ tal que $\bigcap_{n\geq 1} I_n = \{l\}$.

(3) Toda sequência limitada possui subsequência convergente.

(4) Toda sequência de Cauchy é convergente.

No que segue, convencionaremos chamar o comprimento de um intervalo $I = [a, b]$ por $l(I)$. No caso, $l(I) = b - a$.

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2) :Seja (I_n), com $I_n = [a_n, b_n]$, $\forall\ n \geq 1$, uma sequência de intervalos encaixantes, isto é, $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots$. Então vale que $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots\ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1$.

Considere $A = \{a_n : n \geq 1\}$ e $B = \{b_n : n \geq 1\}$

Temos que $a_n \leq b_1$, $\forall\, n \geq 1$, e portanto, A é limitado superiormente. Pelo Axioma da Completude, existe $\alpha = supA$. Analogamente, B é limitado por a_1, e poretanto, existe $\beta = infB$.

$a_n \leq b_1$, $\forall\ n \geq 1$. Como $\alpha = supA$, resulta que $\alpha \leq b_1$.

De modo geral, para todo $j \geq 1$, temos que

$a_n \leq b_j$, $\forall\ n \geq 1$, e portanto, $\alpha \leq b_j$.

Por sua vez, se $\alpha \leq b_j$, $\forall\ j \geq 1$, como $\beta = infB$, resulta que $\beta \leq b_n$, $\forall\ n \geq 1$.

Concluimos que $a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n$, $\forall\ n \geq 1$, e portanto, $\bigcap_{n\geq 1} I_n \neq \emptyset$.

(2)$\Rightarrow$ (3) : Seja (x_n) uma sequẽncia limitada. Então existem a_0, $b_0 \in \mathbb{R}$ tais que $a_0 \leq x_n \leq b_0$, $\forall\ n \geq 1$. Considere $A = \{x_n : n \geq 1\}$.

Temos dois casos a considerar:

Caso 1: A é finito. Então existe $l \in A$ e existe uma sequência de números naturais $n_1 < n_2 < \cdots$ tal que $x_{n_j} = l$, $\forall\ j \geq 1$. Assim, (x_{n_j}) é uma subsequência convergente para l.

Caso 2: A é infinito. Seja $I_0 = [a_0, b_0]$. Então $l(I_0) = b_0 - a_0$. Considere $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Se $[a_0, c_0] \bigcap A$ é infinito, denotamos $a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$, e $I_1 = [a_1, b_1]$. Caso contrário, fazemos $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$ e $I_1 = [a_1, b_1]$. De qualquer maneira, $I_1 \bigcap A$ é infinito e $l(I_1) = \frac{b_0-a_0}{2}$. Além disso, $I_0 \supseteq I_1$.

Por indução, suponhamos obtidos $I_1 \supseteq I_2 \cdots \supseteq I_n$, com $I_j = [a_j, b_j]$, $l(I_j) = \frac{b_0-a_0}{2^j}$ e $I_j \bigcap A$ infinito, $1 \leq j \leq n$. Seja $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. Se $[a_n, c_n] \bigcap A$ é infinito, fazemos $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$, e $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$. Caso contrário, tomamos $a_{n+1} = c_n$, $b_{n+1} = b_n$ e $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$. De qualquer forma, $l(I_{n+1}) = \frac{b_n-a_n}{2} = \frac{b_0-a_0}{2^n}$, $I_n \supseteq I_{n+1}$ e $I_{n+1} \bigcap A$ é infinito.

Pelo PIE, existe um único número $l \in \mathbb{R}$ tal que $\bigcap_{n\geq 0} I_n = \{l\}$.

Seja $n_1 < n_2 < \cdots < n_j < \cdots$ uma sequência de números naturais tal que $x_{n_j} \in I_j$, $\forall\ j \geq 1$. Então (x_{n_j}) é uma subsequência de (x_n). Vamos provar que $x_{n_j} \longrightarrow l$.

Seja $\epsilon > 0$. Pela arquimedianidade de $\mathbb{R}$, existe $n_0 \geq 1$ tal que $\frac{b_0 - a_0}{2^{n_0}} < \epsilon$ (prove!). Considere $j_0 \geq 1$ tal que $n_{j_0} > n_0$. Assim, para $j \geq j_0$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} I_{n_j} \subseteq I_{n_{j_0}} \\ \\ x_{n_j} \in I_{n_j} \\ \\ l \in I_{n_j} \end{array}\right\} \Rightarrow\ x_{n_j} \in I_{n_{j_0}},\ l \in I_{n_{j_0}} \Rightarrow\ |x_{n_j} - l| < \frac{b_0 - a_0}{2^{n_0}} < \epsilon$$

Logo, $x_{n_j} \longrightarrow l$, e vale a propriedade.

$(3) \Rightarrow (4)$: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Conforme as propriedades de tais sequências, temos:

(x_n) é de Cauchy $\Rightarrow$ (x_n) é limitada $\Rightarrow$

(x_n) possui subsequência convergente $\Rightarrow$ (x_n) é convergente.

$(4) \Rightarrow (1)$: Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não vazio e limitado superiormente por β. Considere $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $[\alpha, \beta] \cap A \neq \emptyset$, e seja $c_0 = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

Se $[c_0, \beta] \cap A \neq \emptyset$, fazemos $a_1 = c_0$ e $b_1 = \beta$. Se $[c_0, \beta] \cap A = \emptyset$, fazemos $a_1 = \alpha$ e $b_1 = c_0$. Designamos $I_1 = [a_1, b_1]$, e vale que:

$$\left\{\begin{array}{l} I_1 \cap A \neq \emptyset \\ b_1 \text{ é limitante superior de } A \\ l(I_1 = \frac{\beta - \alpha}{2} \end{array}\right.$$

Considere $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$. Se $[c_1, b_1] \cap A \neq \emptyset$, fazemos $a_2 = c_1$ e $b_2 = b_1$. Se $[c_1, b_1] \cap A = \emptyset$, fazemos $a_2 = a_1$ e $b_2 = c_1$. Considere o intervalo $I_2 = [a_2, b_2]$. Temos:

$$\left\{\begin{array}{l} I_2 \cap A \neq \emptyset \\ b_2 \text{ é limitante superior de } A \\ l(I_2 = \frac{\beta - \alpha}{2^2} \end{array}\right.$$

Prosseguindo por indução, obtemos uma sequência de intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ verificando as seuintes propriedades:

$$\left\{\begin{array}{l} I_n \cap A \neq \emptyset \\ b_n \text{ é limitante superior de } A \\ l(I_n = \frac{\beta - \alpha}{2^n} \end{array}\right.$$

Como $l(I_n) = \frac{\beta - \alpha}{2^n}$, vale que $l(I_m) \longrightarrow 0$: dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \geq 1$ tal que, para $n \geq n_0$, tem-se que $l(I_n) < \epsilon$. Dessa forma,dados $m, n \geq n_0$, com $m > n$, temos que $a_{n_0} \leq a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n \leq b_{n_0}$, e portanto, $|b_m - b_n| \leq (b_{n_0} - a_{n_0}) < \epsilon$, e $(b_n$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Por (4), existe $l \in \mathbb{R}$ e $b_n \longrightarrow l$. Sendo (b_n) uma sequência decrescente, resulta que $l \geq b_n$, $\forall\ n \geq 1$ (prove esta afirmação).

Vamos provar que $l = supA$.

Seja $x \in A$, e suponhamos $l < x$. Como $b_n \longrightarrow l$, existe $n \geq 1$ tal que $b_n < x$: contradição, pois b_n é um limitante superior de A. Logo $x \leq l$, $\forall\, x \in A$.

Seja agora $t \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq t$, $\forall\, x \in A$, isto é, t é um limitante superior de A. Suponhamos $t < l$.

Como t é majorante de A e $[a_n, b_n] \cap A \neq \emptyset$, vale que $a_n \leq t$, $\forall\, n \geq 1$. Como $t < l \leq b_n$, $\forall\, n \geq 1$, concluimos que $a_n \leq t < l \leq b_n$, e portanto, $l(I_n) > l - t$, o que contradiz o fato de que $l(I_n) \longrightarrow 0$. Concluimos que $l \leq t$, e l é supremo do conjunto A. $\triangle$