limite superior e limite inferior de sequências de números reais

Seja (x_n) uma sequência limitada de números reais. Considere o conjunto

$$A = \{z \in \mathbb{R} \ : \exists (x_{n_j}) \text{ subsequência de } (x_n) \text{ com } x_{n_j} \to z \ \}$$

Como (x_n) é limitada em $\mathbb{R}$, A é limitado e, pelo Axioma da Completude, existe $l_1 = \inf A$ e $l_2 = \sup A$.

Proposição: Existe (x_{r_j}) tal que $x_{r_j} \to l_1$ e existe (x_{s_j}) tal que $x_{s_j} \to l_2$.

Demonstração: Como $l_1 = \inf A$, existe $z \in A$ tal que $l_1 \leq z < l_1 + 1$ (e portanto, $z \in \,]l_1 - 1, l_1 + 1[$), e existe $(x_{n_j}) \to z$. Assim, conseguimos $n_1 \geq 1$ tal que $l_1 - 1 < x_{n_1} < l_1 + 1$.

Novamente, como $l_1 = \inf A$, existe $z \in A$ tal que $l_1 \leq z < l_1 + \frac{1}{2}$, e obtemos $z \in \,]l_1 - \frac{1}{2}, l_1 + \frac{1}{2}[$. Existe uma subsequência x_{n_j} de (x_n) tal que $x_{n_j} \to z$. Assim, obtemos $n_2 > n_1$ com $l_1 - \frac{1}{2} < x_{n_2} < l_1 + \frac{1}{2}$.

Dessa forma, definimos $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ tal que $l_1 - \frac{1}{k} < x_{n_k} < l_1 + \frac{1}{k}$, $\forall k \geq 1$, de maneira que $x_{n_k} \to l_1$.

Analogamente provamos que existe uma subsequência (x_{m_k}) de (x_n) tal que $x_{m_k} \to l_2$.

Proposição:

$$\begin{cases} l_1 = \sup_{n\geq 1}\{\inf\{x_k : k \geq n\}\} \\ \\ l_2 = \inf_{n\geq 1}\{\sup\{x_k : k \geq n\}\} \end{cases}$$

Demonstração:

Fixemos $\epsilon > 0$, e considere $I_\epsilon = \{n \geq 1 : \ x_n < l_1 - \epsilon \ \}$. Se I_ϵ é infinito então existe $x_{n_j} \to x \leq \ l_1 - \epsilon$ (lembre-se que (x_n) é sequência limitada). Temos então $x \in A$ e $x \leq \ l_1 - \epsilon$: contradição, pois $l_1 = \inf A$.

Logo, $\exists \ n_\epsilon \geq 1 : \forall \ k \geq n_\epsilon, \ x_k \geq l_1 - \epsilon$. Assim,

$$l_1 - \epsilon \ \leq \ \inf\{x_k : \ k \geq n_\epsilon\}$$

Por sua vez, $n \geq n_\epsilon \ \Rightarrow \ \inf\{x_k : \ k \geq n_\epsilon\} \leq \inf\{x_k : \ k \geq n\}$

$$\Rightarrow \ l_1 - \epsilon \ \leq \ \sup_{n\geq 1} \{\inf \{x_k : \ k \geq n\}\}, \quad \forall \epsilon > 0$$

$$\Rightarrow l_1 \ \leq \ \sup_{n\geq 1}\{\inf \{x_k : \ k \geq n\}\}$$

Vamos designar $l_1' = \sup_{n\geq 1}\{\inf\{x_k : \ k \geq n\}\}$.

Suponhamos que $l_1 \ < \ l_1'$. Então

$\exists \ n_0 \geq 1$ tal que $l_1 \ < \ \inf\{x_k : \ k \geq n_0\} \ \Rightarrow \ \exists \ l_1'' : l_1 < l_1'' \leq \inf\{x_k : \ k \geq n_0\}$.

Neste caso, toda subsequência convergente de (x_n) possui, como limite, um número maior ou igual a l_1'' : contradição, pois $l_1 = infA$ e l_1 é limite de uma subsequência de (x_n). Concluimos que $l_1 = \sup_{n\geq 1}\{\inf \{x_k : \ k \geq n\}\}$.

Analogamente provamos que $l_2 = \inf_{n \geq 1}\{sup\{x_k : k \geq n\}\}$.

Definição: Dada uma sequência $x_n)$ em $\mathbb{R}$, definimos

$$\liminf x_n = \sup_{n\geq 1}\{\inf\ \{x_k : k \geq n\}\}$$

$$\limsup x_n = \inf_{n\geq 1}\{\sup\ \{x_k : k \geq n\}\}$$

Proposição: Dada uma sequência (x_n) de números reais, são equivalentes:

(i) (x_n) é convergente em $\mathbb{R}$.

(ii) (x_n) é limitada e $\liminf x_n = \limsup x_n$.

Observação: Se (x_n) é uma sequência ilimitada superiormente então $\limsup x_n = +\infty$.
Da mesma forma, se (x_n) é ilimitada inferiormente então $\liminf x_n =$ - ∞.

Calcule $\liminf x_n$ e $\limsup x_n$:

(i) $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

(ii) x_n - $(-1)^n(2 + \frac{2}{n})$

(iii) $x_n = \frac{n+(-1)^n(2n+1)}{n}$

(iv) $x_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}$