

Lista 6 - MAT-206 - MAP-216 - 2023

Definição: Dado um número $a \in \mathbb{R}$, definimos o módulo de a ou o valor absoluto de a - e denotamos por $|a|$ - por

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Exemplo: $\begin{cases} |4| = 4 \\ |-4| = -(-4) = 4 \end{cases}$

(I) Prove que valem as seguintes propriedades:

(1) $\forall a \in \mathbb{R} (|a| = 0 \leftrightarrow a = 0)$.

(2) $\forall a \in \mathbb{R} (|a| \geq 0)$.

(3) $\forall a \in \mathbb{R} (|-a| = |a|)$.

(4) Dados $\alpha \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}$, se $x \leq \alpha$ e $(-x) \leq \alpha$ então $|x| \leq \alpha$.

(5) $\forall a, b \in \mathbb{R} (|ab| = |a||b|)$.

(6) $\forall a \in \mathbb{R} (-|a| \leq a \leq |a|)$.

(7) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0 (|a| < \epsilon \leftrightarrow -\epsilon < a < \epsilon)$.

(8) $\forall a, b \in \mathbb{R} (|a + b| \leq |a| + |b|)$.

Dê exemplo que ilustre a desigualdade estrita.

(9) $\forall a, b \in \mathbb{R} (||a| - |b|| \leq |a - b|)$.

(10) $\forall a, b \in \mathbb{R} (||a| - |b|| \leq |a - b|)$.

(11) $\forall x \in \mathbb{R} (x \neq 0 \rightarrow |\frac{1}{x}| = \frac{1}{|x|})$.

(12) $\forall x, y \in \mathbb{R} (y \neq 0 \rightarrow |\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|})$.

(13) $\forall a \in \mathbb{R} (\sqrt{a^2} = |a|)$.