Lista 5 - MAT-206 - MAP-216 - 2023

Seja K um conjunto não vazio, e considere uma relação binária em K, isto é, um subconjunto $R \subseteq K \times K$. Neste caso, dados $a, b \in K$, se $(a, b) \in R$, costumamos escrever aRb.

Dizemos que R é uma relação reflexiva se

(O1) $\forall\ a \in K\ (aRa)$

R é uma relação anti-simétrica se

(O2) $\forall\ a, b \in K\ (aRb$ e $bRa \rightarrow a = b)$

R é uma relação transitiva se

(O3) $\forall\ a, b, c \in K (aRb$ e $bRc \rightarrow aRc)$

R é uma relação de ordem se é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Se, além disso R verifica a condição

(O4) $\forall\ a, b \in K$ (aRb ou bRa)

então dizemos que a ordem R é total.

É usual a representação da relação de ordem por $\leq$ ao invés de R. Dessa forma, reescrevendo as condições acima, obtemos:

(O1) $\forall\ a \in K\ (a \leq a)$ (lei reflexiva)

(O2) $\forall\ a, b \in K\ (a \leq b$ e $b \leq a \rightarrow a = b)$ (lei anti-simétrica)

(O3) $\forall\ a, b, c \in K\ (a \leq b$ e $b \leq c \rightarrow a \leq c)$ (lei transitiva)

(O4) $\forall\ a, b \in K($ou $a \leq b$ ou $b \leq a)$ (lei da ordem total)

Agora suponhamos que $(K, +, .)$ é um corpo e que $\leq$ é uma ordem em K. Dizemos que essa ordem é compatível com as operações + e - do corpo se verifica as seguintes propriedades:

(OA) $\forall\ a, b, c \in K\ (aRb \rightarrow (a + c)R(b + c))$ (compatibilidade da ordem com a operação de adição)

(OM) $\forall\ a, b, c \in K\ (aRb$ e $0Rc \rightarrow (ac)R(bc))$ (compatibilidade da ordem com a operação de multiplicação)

Então dizemos que $(K, +, ., \leq)$ é um corpo ordenado.

Seja K um corpo ordenado (estamos simplificando a notação).

Dados $x, y \in K$, definimos

$x < y$ se $x \leq y$ e $x \neq y$

$x > y$ se $y < x$, isto é, $y \leq x$ e $y \neq x$.

Observe que, dados $a, b \in K$, se $a < b$ então $a \leq b$, e se $a > b$ então $a \geq b$.

Seja $(K, +, ., \leq)$ um corpo ordenado. Prove:

(P13) Dados $a, b \in K$, não ocorre simultaneamente $a < b$ e $b < a$.

(P14) $\forall\, a, b, c \in K\ (a < b \text{ e } b < c \;\rightarrow\; a < c)$.

(P15) $\forall\, a, b \in K\ (a < b \text{ ou } a = b \text{ ou } b < a)$.

(P16) $\forall\, a, b, c \in K\ (a < b \;\rightarrow\; a + c < b + c)$.

(P17) $\forall\, a, b, c \in K\ (a < b \text{ e } 0 < c \;\rightarrow\; ac < bc)$.

(P18) $\forall\, x \in K \begin{cases} x \geq 0 \rightarrow -x \leq 0 \\ x > 0 \rightarrow -x < 0 \end{cases}$

(P19) $\forall\, a, b, c, d \in K \begin{cases} a \leq b \;\; e \;\; c \leq d \rightarrow a + c \leq b + d \\ a < b \;\; e \;\; c < d \rightarrow a + c < b + d \end{cases}$

(P20) $\forall\, a, b \in K\ \{\, a \geq 0 \;\; e \;\; b \geq 0 \rightarrow a + b \geq 0$
$a > 0 \;\; e \;\; b > 0 \rightarrow a + b > 0$

(P21) $\forall\, a, b, c \in K\ (a + c \leq b + c \;\rightarrow\; a \leq b)$ (Vale propriedade análoga para a relação estrita $<$.)

(P22) $\forall\, a, b, c \in K\ (a.c \leq b.c \text{ e } c > 0 \;\rightarrow\; a \leq b)$.

(P23) $\forall\, a, b, c \in K\ (a.c \leq b.c \text{ e } c < 0 \;\rightarrow\; a \geq b)$.

(P24) Dados $a, b \in K$ $(a \geq 0 \text{ e } b \geq 0 \rightarrow a + b \geq 0)$ e $(a > 0 \text{ e } b > 0 \;\rightarrow\; a + b > 0)$.

(P25) (A regra de sinais para a multiplicação) Sejam $a, b \in K$. Então:

(i) $(a \geq 0 \text{ e } b \geq 0 \rightarrow ab \geq 0)$ e $(a > 0 \text{ e } b > 0 \;\rightarrow\; ab > 0)$.

(ii) $(a \geq 0 \text{ e } b \leq 0 \rightarrow ab \leq 0)$ e $(a > 0 \text{ e } b < 0 \;\rightarrow\; ab < 0)$.

(iii) $(a \leq 0 \text{ e } b \leq 0 \rightarrow ab \geq 0)$ e $(a < 0 \text{ e } b < 0 \;\rightarrow\; ab > 0)$.

(P26) $\forall\ x \in K\ (x^2 \geq 0)$.

(P27) $1 > 0$.

(P28) Não existe nenhuma ordem em $\mathcal{C}$ que seja compatível com sua estrutura de corpo.

(P29) $\forall\ x \in K \begin{cases} x > 0 \rightarrow x^{-1} > 0 \\ \\ x < 0 \rightarrow x^{-1} < 0 \end{cases}$