Lista 4 - MAT-206 - MAP-216 - 2023

Seja K um conjunto com pelo menos dois elementos distintos, e suponhamos que estejam definidas em K duas operações, denotadas respectivamente por adição (+) e multiplicação (.), verificando as seguintes propriedades:

(A1) $(\forall\ a, b, c \in K)((a + b) + c = a + (b + c))$ (propriedade associativa da adição)

(A2) $(\forall\ a, b \in K)(a + b = b + a)$ (propriedade comutativa da adição)

(A3) $(\exists\ 0 \in K)\ (\forall\ a \in K(a + 0 = a))$ (existência de elemento neutro da adição)

(A4) $(\forall\ a \in K)(\exists\ a' \in K)\ (a + a' = 0)$ (existência de elemento oposto)
a' chama-se elemento oposto de a.

(M1) $(\forall\ a, b, c \in K)((a.b).c = a.(b.c))$ (propriedade associativa da multiplicação)

(M2) $(\forall\ a, b \in K(a.b = b.a)$ (propriedade comutativa da multiplicação)

(M3) $(\exists\ 1 \in K)\ \forall a \in K(a.1 = a)$ (existência de elemento unidade da multiplicação)

(M4) $(\forall\ a \in K)(a \neq 0 \rightarrow\ (\exists\ a'' \in K)\ (a.a'' = 1))$ (existência de elemento inverso)
a'' chama-se elemento inverso de a.

(D) $(\forall\ a, b, c \in K)(a(b + c) = a.b + a.c)$ (propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição)

Então dizemos que $(K, +, .)$ é um corpo. As propriedades (A1) - (D) denominam-se axiomas de corpo.

Exemplo 1: $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são exemplos de corpos, com as operações usuais de adição e multiplicação.

Exemplo 2: Se p é um número primo então o conjunto $\mathbb{Z}_p$ do inteiros módulo p, com as operações correspondentes de adição e multiplicação, é um corpo. Lembramos que $\mathbb{Z}_p = \{0,\ 1,\ \ldots$ p-1$\}$ e, dados $a, b \in \mathbb{Z}_p$, definimos $a + b$ como o resto da divisão de $a + b$ por p e $a.b$ como o resto da divisão de $a.b$ por p.

Verifique que, com essas operações, $(\mathbb{Z}_p\ ,\ +,\ .)$ é corpo.

Exemplo 3: Seja $\mathbb{Q}(x) = \{\dfrac{p(x)}{q(x)}$: $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios com coeficientes em $\mathbb{Q}$ e $q(x)$ não é o polinômio identicamente nulo$\}$. Em $\mathbb{Q}(x)$, considere as seguintes operações:

$$\begin{cases} \dfrac{p(x)}{q(x)} + \dfrac{r(x)}{s(x)} = \dfrac{p(x)s(x) + r(x)q(x)}{q(x)s(x)} \\ \\ \dfrac{p(x)}{q(x)} . \dfrac{r(x)}{s(x)} = \dfrac{p(x).r(x)}{q(x)}.s(x) \end{cases}$$

$(\mathbb{Q}(x), +, .)$ é um corpo.

Os exercícios enunciados a seguir são afirmações que verdadeiras em qualquer corpo. Dessa forma, na sua verificação, só devemos usar os axiomas de corpo.

Seja $(K, +, .)$ um corpo qualquer. Prove que valem as seguintes propriedades:

(P1) Lei do cancelamento da adição: $\forall\ a, b, c \in K$(se $a + c = b + c$ então $a = b$).

(P2) $\forall\ x \in K(x.0 = 0)$.

(P3) $\forall\ a, b \in K(a.b = 0 \rightarrow\ a = 0$ ou $b = 0)$.

(P4) (i) O elemento neutro é único, isto é, se existem e_1, $e_2 \in K$ tais que $(\forall\ a \in K)$ $((a + e_1 = a)$ e $(a + e_2 = a))$ então $e_1 = e_2$.

(ii) Todo elemento de um corpo possui um único elemento oposto: dado $a \in K$, se a_1, $a_2 \in K$ são tais que $a + a_1 = 0$ e $a + a_2 = 0$ então $a_1 = a_2$. O elemento oposto de a é usualmente denotado por $-a$.

(P5) 0 não possui inverso.

(P6) $\forall\ a, b \in K$,

(i) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$

(ii) $(-a)(-b) = ab$

(P7) (i) O elemento unidade de K é único. (Todo corpo possui um único elemento unidade.)

(ii) Se $a, b \in K$ e $a\ \neq\ 0$ então o elemento $a'' \in K$ tal que $a.a'' = 1$ é único. (O elemento inverso de um elemento não nulo de um corpo é único. Costumamos designá-lo por a^{-1} ou $\frac{1}{a}$.)

(P8) Lei do cancelamento da multiplicação: $\forall\ a, b, c \in K(a.c = b.c$ e $c\ \neq\ 0 \rightarrow a = b)$.

(P9) $\forall\ x \in K(x\ \neq 0 \rightarrow x^{-1}\ \neq\ 0)$.

(P10) $\forall\ x \in K(x\ \neq 0 \rightarrow (x^{-1})^{-1} = x)$.

(P11) $\forall\ a, b \in K(a\ \neq 0$ e $b\ \neq 0 \rightarrow (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1})$.

(P12) $\forall\ a, b \in K(a^2 = b^2 \rightarrow a = b$ ou $a = -b)$.