Lista 1 - MAT-206 - MAP-216 - 2023

(I) Prove as igualdades abaixo usando o Princípio de Indução Finita (PIF):

(1) $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(2) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$

(4) $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}, \ \forall\ n \in \mathbb{N}^*.$

(5) $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

(6) $1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \ \forall\ n \geq\ 1$

(7) $(1 - \dfrac{1}{2^2})(1 - \dfrac{1}{3^2}) \ldots (1 - \dfrac{1}{n^2}) = \dfrac{n+1}{2n}, \ \forall\ n \geq\ 2$

(II) Escreva a negação de cada uma das seguintes afirmações:

(1) 7 é um número primo e $2 + 2 = 4$.

(2) Roberto e João têm mais de dois metro de altura.

(3) Todas as estradas de Petrópolis são bem cuidadas.

(4) Alguns lápis são azuis.

(5) Todos os lápis são azuis.

(6) A função f é contínua em todos os pontos.

(7) Mário não gosta de Cálculo e João gosta de Teoria dos Conjuntos.

(8) Se está chovendo, Maria não lava a louça.

(9) Todas as borboletas são azuis e alguns gatos são vermelhos.

(10) Se a cadeira é vermelha então a mesa é verde.

(III) Prove a desigualdade de Bernoulli:

Se $x > -1$ então $(1 + x)^n \geq\ 1 + nx, \ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

(IV) O coeficiente binomial é definido como

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad \text{para } n \in \mathbb{N}^* \quad \text{e } r \in \mathbb{N},\ 0 \leq r \leq n$$

(a) Mostre que $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$, para $r = 1, 2, \ldots, n$.

(b) Prove que

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + \binom{n}{r} x^r + \ldots \binom{n}{n} x^n$$

(c) Prove que

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \ldots \binom{n}{n} b^n$$