SEGUNDA PROVA - EDP - MAP 5712 (MAP 0413)

A prova é individual. A soma de pontos é 10,5 (tem 0,5 extra). Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração, a não ser, claro, quando estamos pedindo para que sejam demonstrados.

Boa Prova!

Exercício 1. (1,25 ponto) a) Resolva a seguinte equação para $x > 0$:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 1,\ u(x,x) = 0.$$

(1,25 ponto) b) Resolva a seguinte equação:

$$2u(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + u(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 3,\ u(x,0) = 1.$$

(1 ponto) c) Seja $u :]0,\infty[\times]0,\infty[\to \mathbb{R}$ uma solução da equação:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + 2y\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Ache curvas em $]0,\infty[\times]0,\infty[$ sobre as quais a solução u da equação acima é constante.

Exercício 2. (1,2 ponto) a) Resolva a equação:

$$\begin{array}{rcll} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - 3\frac{\partial u}{\partial t\partial x}(x,t) - 4\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) & = & 0, & x\in\mathbb{R}^n,\ t>0 \\ u(x,0) & = & 0, & x\in\mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = & x, & x\in\mathbb{R}^n \end{array}.$$

Dica: Procure soluções com a forma abaixo, em que α e β são constantes reais distintas:

$$u(x,t) = f(x+\alpha t) + g(x+\beta t).$$

(1,2 ponto) b) Considere o problema abaixo:

$$\begin{array}{rcll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) & = & \Delta u(x,t), & x\in\mathbb{R}^n,\ t>0 \\ u(x,0) & = & 0, & x\in\mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = & h(x), & x\in\mathbb{R}^n \end{array}.$$

Suponha que $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ seja igual a 0 fora de $B(0,1) = \{x\in\mathbb{R}^n;\ |x|<1\}$ e $h(x) > 0$ para $x \in B(0,1)$. Seja $x_0 \notin B(0,1)$. Ache os valores de $t \geq 0$ para os quais $u(x_0,t) \neq 0$ nos casos em que $n=1$, $n=2$ e $n=3$. Qual a diferença entre as dimensões 1 e 2 e a dimensão 3? (Dica: Use as fórmulas de d'Alembert, Poisson e Kirchoff)

(1,1 ponto) c) Sejam dadas funções $a_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tais que $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, f e g funções em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Suponha também que exista $a_0 > 0$ tal que $\sum_{ij} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$ e $\xi\in\mathbb{R}^n$. Considere a equação

$$\begin{array}{rcll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) & = & \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t)\right) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,t), & x\in\mathbb{R}^n,\ t>0 \\ u(x,0) & = & g(x), & x\in\mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = & h(x), & x\in\mathbb{R}^n \end{array}. \tag{0.1}$$

Suponha que $u : \mathbb{R}^n\times[0,T]\to\mathbb{R}$ seja uma solução de suporte compacto, ou seja, existe $R>0$ tal que $u(x,t)=0$ para todo $|x|\geq R$. Mostre que a função $E:[0,T]\to\mathbb{R}$ definida abaixo é não-crescente ($E'(t)\leq 0$):

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)^2 + \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t)\right]dx,\ t\in[0,T].$$

Conclua que existe no máximo uma solução de suporte compacto da Equação (0.1).

Exercício 3. Considere o seguinte problema:

$$\begin{array}{rcl} u'(t) & = & f(t)u(t) \\ u(0) & = & c_0 \end{array}, \tag{0.2}$$

em que $c_0 \in \mathbb{R}$ e f é uma função real-analítica numa vizinhança de 0, ou seja, $f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j t^j$, em que $f_j \in \mathbb{R}$, e $\sum_{j=0}^{\infty} |f_j| R^j < \infty$, para um certo $R > 0$.

(1 ponto) a) Procure uma solução da Equação (0.2) da forma $u(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^j$ e determine c_{j+1} em termos de c_k e f_k, com $k \leq j$. (Dica: Substitua as séries de f e u e iguale os coeficientes multiplicados pela mesma potência de t).

(0,5 ponto) b) Considere o problema abaixo:

$$\begin{array}{rcl} U'(t) & = & F(t)U(t) \\ U(0) & = & C_0 \end{array}. \tag{0.3}$$

Suponha que $F(t) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j t^j$, em que $F_j \geq 0$, e $\sum_{j=0}^{\infty} |F_j| r^j < \infty$, para um certo $0 < r \leq R$. Suponha que a Equação (0.3) tenha uma solução real analítica numa vizinhança do zero da forma $U(t) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j t^j$. Mostre por indução que, se $|c_0| \leq C_0$ e $|f_j| \leq F_j$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$, então $|c_j| \leq C_j$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$.

(1 ponto) c) Mostre que existe uma constante $C > 0$ e uma função $F(t) = \frac{CR}{R-t}$ tal que $f << F$, ou seja, $|f_j| \leq F_j$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$.

(1 ponto) d) Ache uma solução do tipo $U(t) = \beta\,(R-t)^{\alpha}$ (essas funções são reais-analíticas!) da equação abaixo:

$$\begin{array}{rcl} U'(t) & = & \frac{CR}{R-t} U(t) \\ U(0) & = & |c_0| \end{array}$$

e use os resultados dos itens anteriores para provar o seguinte resultado: Existe uma função u real-analítica numa vizinhança de zero que resolve a Equação (0.2).

Formulário. (Nem tudo é necessário)

Algumas soluções de EDO: Se $f' = gf \implies f(x) = Ce^{\int_0^x g(s)ds}$.

Definição 4. (Teorema da Divergência) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1 e $F : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1. Logo

$$\int_{\partial U} F(x) . \nu(x) \, dS(x) = \int_U \nabla . F(x) \, dx,$$

em que $\nu : \partial U \to \mathbb{R}^n$ é o vetor normal unitário que aponta para fora de U.

Proposição 5. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1 e f e g duas funções em $C^1(\overline{U})$. Logo*

$$\int_U \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g(x) dx = -\int_U f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial U} f(x) g(x) \nu_i(x) dS(x), \tag{0.4}$$

em que $i \in \{1, ..., n\}$ e $\nu(x) = (\nu_1(x), ..., \nu_n(x))$ é a normal a ∂U no ponto x e que aponta para fora de U.

Definição 6. Uma curva integral do campo $V : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dado por $V = (a_1(x), ..., a_n(x))$ é um caminho $\boldsymbol{x} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ que satisfaz a equação diferencial $\boldsymbol{x}'(t) = V(\boldsymbol{x}(t))$. Assim, se $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, então

$$\begin{array}{ccc} x_1'(t) & = & a_1(x_1(t), ..., x_n(t)) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n'(t) & = & a_n(x_1(t), ..., x_n(t)) \end{array}.$$

Proposição 7. *Seja $\boldsymbol{x} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ uma curva integral com imagem no aberto $W \subset U$ e $u : W \to \mathbb{R}$ uma solução de $\sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = f(x, u(x))$, $x \in W$. Logo $v = u \circ \boldsymbol{x} : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma solução da equação $v'(t) = f(\boldsymbol{x}(t), v(t))$. Em particular, se $f = 0$, então $u \circ \boldsymbol{x}$ é constante.*

Teorema 8. *Considere a equação abaixo:*

$$\begin{array}{rclr} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) & = & \Delta u(x,t), & x \in \mathbb{R}^n, \, t > 0 \\ u(x,0) & = & g(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = & h(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{array}. \tag{0.5}$$

Suponha que g e h estejam em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo, temos
i) $n = 1$ Fórmula de d'Alembert:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x-t) + g(x+t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y) dy.$$

i) $n = 2$ Fórmula de Poisson:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \fint_{B(x,t)} \left(\frac{t^2 h(y) + t g(y) + t \nabla g(y) . (y - x)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} \right) dy.$$

i) $n = 3$ Fórmula de Kirchoff:

$$u(x,t) = \fint_{\partial B(x,t)} (g(y) + \nabla g(y) . (y - x) + t h(y)) \, dS(y).$$

Teorema 9. *(Cauchy-Kowaleski) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $\Gamma \subset U$ uma superfície real-analítica. Consideremos o seguinte problema:*

$$\begin{array}{rclll} \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, \partial u(x), .., \partial^{m-1} u(x)) \partial^\alpha u(x) & = & f(x, \partial u(x), .., \partial^{m-1} u(x)), & x \in U & \\ \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}(x) & = & g_j(x), & x \in \Gamma & j \in \{0, ..., m-1\} \end{array}.$$

Vamos supor que:
i) $a_\alpha : U \times \mathbb{R}^{nN} \times \mathbb{R}^{n^2 N} \times ... \times \mathbb{R}^{n^m N} \to \mathbb{R}^{N \times N}$ é uma função real analítica.
ii) $f : U \times \mathbb{R}^{nN} \times \mathbb{R}^{n^2 N} \times ... \times \mathbb{R}^{n^m N} \to \mathbb{R}^N$ é uma função real analítica.
iii) $g_j : \Gamma \to \mathbb{R}^N$ é uma função real analítica, para todo $j \in \{0, ..., m-1\}$.
Assim, se $x_0 \in U$ for tal que $\det\left(\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x_0, \partial^1 u(x_0), .., \partial^{m-1} u(x_0)) \nu^\alpha(x_0)\right) \neq 0$, então existe um aberto $V \subset U$ que contém x_0 e uma função real analítica $u : V \to \mathbb{R}^N$ que é solução do problema em V.