AULA MECÂNICA 02/12 ①

SISTEMAS COM VÍNCULOS.

- 

$X(t) : F$

RESTRIÇÃO $\|X(t)\| = L$.

• VÍNCULOS GEOMÉTRICOS:

P/ NOSSO CASO, VAMOS ASSUMIR UM SISTEMA COM N PONTOS MATERIAIS

MOVIMENTO $X : I \to R^{3N}$ MAS SUJEITO A "RESTRIÇÕES" (VÍNCULOS)

DO TIPO

$X(t) \in F_t \quad \forall t$ ONDE.

F_t É UM SUBCONJUNTO DE R^{3N}

Digitalizado com

CASO TÍPICO QUE IREMOS TRABALHAR. ②

É QUANDO EXISTE UMA FUNÇÃO

$g: \mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{R}^{k}$ $\quad k < 3N$

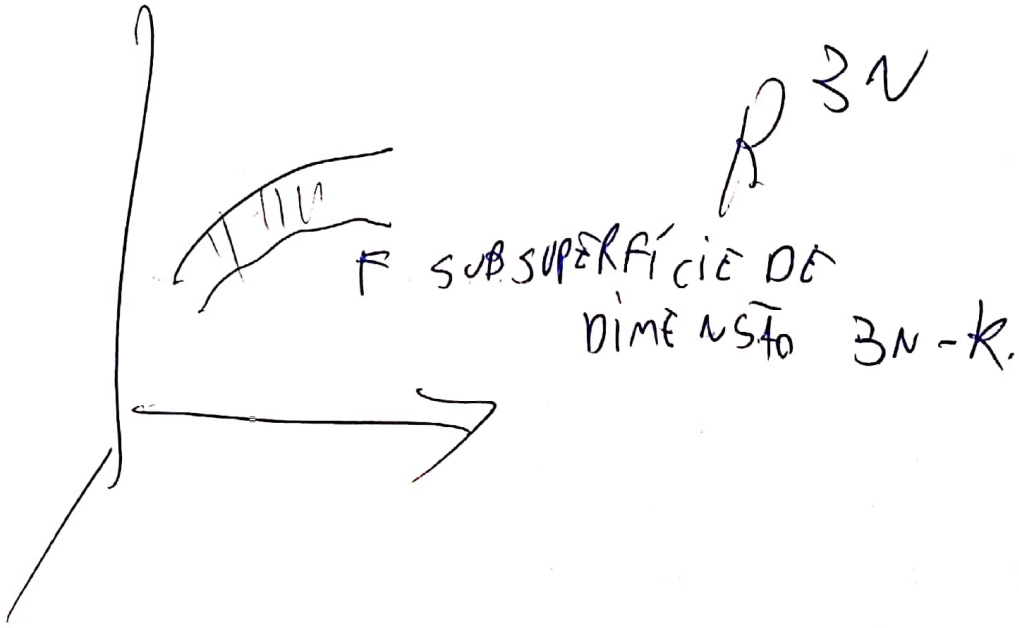
DE CLASSE C^2.

TAL QUE $F_1 = \{z \in \mathbb{R}^{3N} \mid g(z) = \vec{0}\}$.

E TAL QUE

$Dg: \mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{R}^{k}$ TEM POSTO k.

EM TODO PONTO DE F_1.



Digitalizado com

PATINS

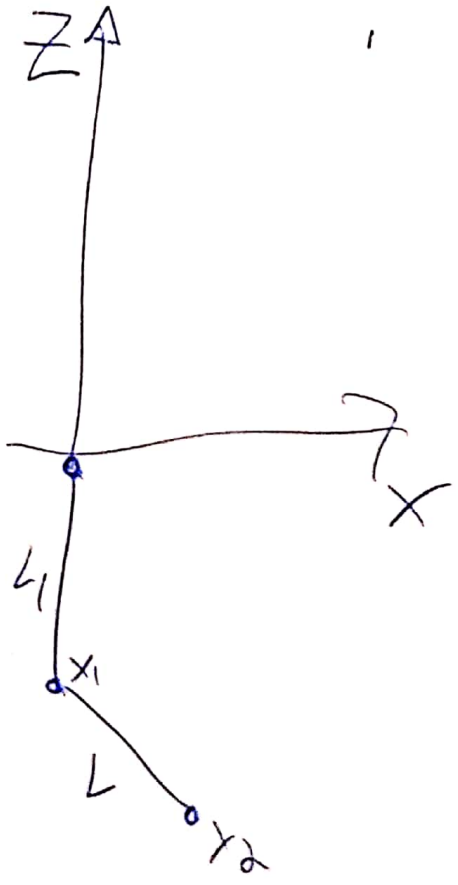
$x_1 : I \to \mathbb{R}^2$

$x_2 : I \to \mathbb{R}^2$.

$(\|x_1 - x_2\| = L.)$

$$\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2} = \lambda (x_1 - x_2).$$

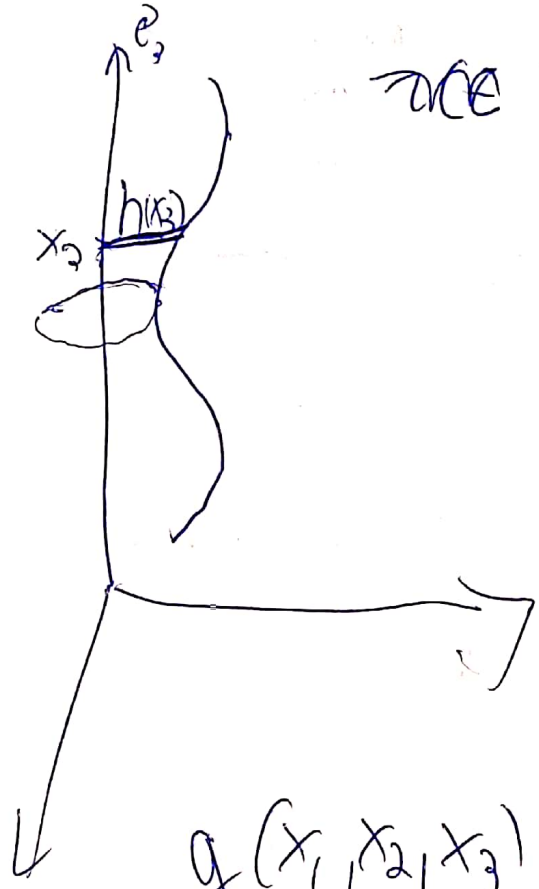
PÊNDULO DUPLO PLANAR.



$$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \|x_1\|^2 - L_1^2 \\ \|x_2 - x_1\|^2 - L_2^2 \end{pmatrix}.$$

Digitalizado com

PONTO MATERIAL PRES. A UMA SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO



DEF COORDENADAS SÃO $(x_1, x_2, x_3) \in R$

EXISTE $h: R \to [0, +\infty)$

$$g(x_1, x_2, x_3) = h^2(x_3) - (x_1^2 + x_2^2).$$

VELOCIDADES POSSÍVEIS:

SE X É UM MOVIMENTO QUE SATISFAZ A VÍNCULO g.

ENTÃO VALE QUE

$\dot{X}(t)$ TEM QUE SER UM VETOR.

Digitalizado com

No NÚCLEO DE $Dg(X(t))$.

ISTO PORQUE:

$$W(t) = g(X(t)) \equiv 0.$$

$$\dot{W}(t) = Dg(X(t)) \cdot \dot{X}(t).$$

AFIRMAÇÃO: DADO $X_0 \in g^{-1}(0)$ E $V_0 \in N(Dg(X_0))$

$\exists\, X : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{3N}$ COM

$$X(0) = X_0 \quad \text{E } X(t) \text{ SATISFAZ O VÍNCULO.}$$
$$\dot{X}(0) = V_0$$

IDEALMENTE, GOSTARÍAMOS DE RESOLVER A "EQUAÇÃO"

$$m_i \ddot{X}_i = F_i(X), \qquad i = 1, \ldots, N$$

ONDE AGORA QUEREMOS QUE AS SOLUÇÕES SATISFAÇAM O VÍNCULO.

Digitalizado com

MAS ISSO NEM SEMPRE É POSSÍVEL

- A VELOCIDADE INICIAL PODERIA NÃO ESTAR EM $N(Dg(x(0)))$
- OU MESMO A ACELERAÇÃO IRIA CAUSAR A SOLUÇÃO A NÃO RESPEITAR O VÍNCULO.

PRINCÍPIO DE D'ALEMBERT:

VAMOS CONSIDERAR ENTÃO O SISTEMA:

$$m_i \ddot{x}_i = F_i + R_i$$

$R_i : R^{3N} \times R^{3N} \to R$.

R_i CHAMADA DE REAÇÃO VINCULAR.



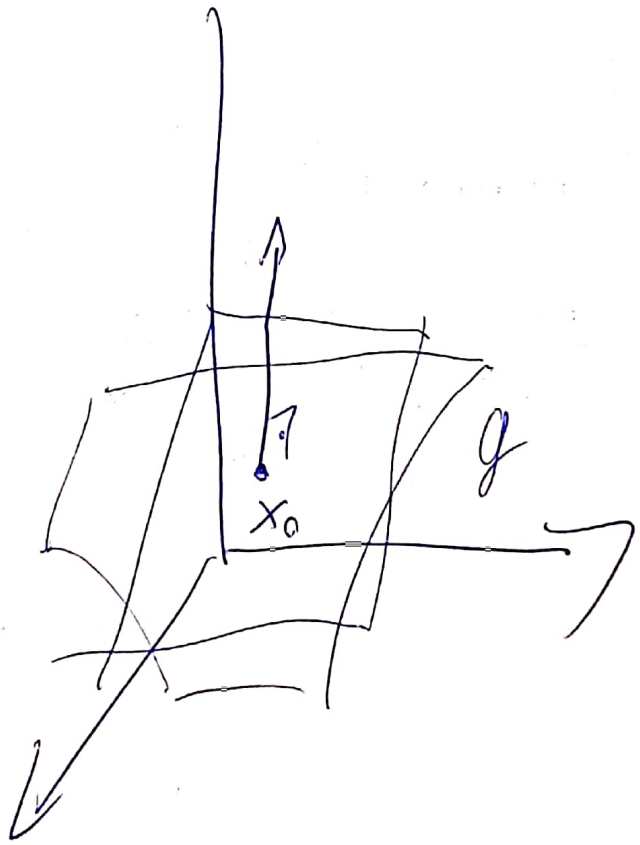
VAMOS PEDIR QUE R SEJA TAL QUE,

Digitalizado com

$\forall v \in N(Dg(X(t)))$

$\langle R(X(t), \dot{X}(t)), v \rangle = 0.$

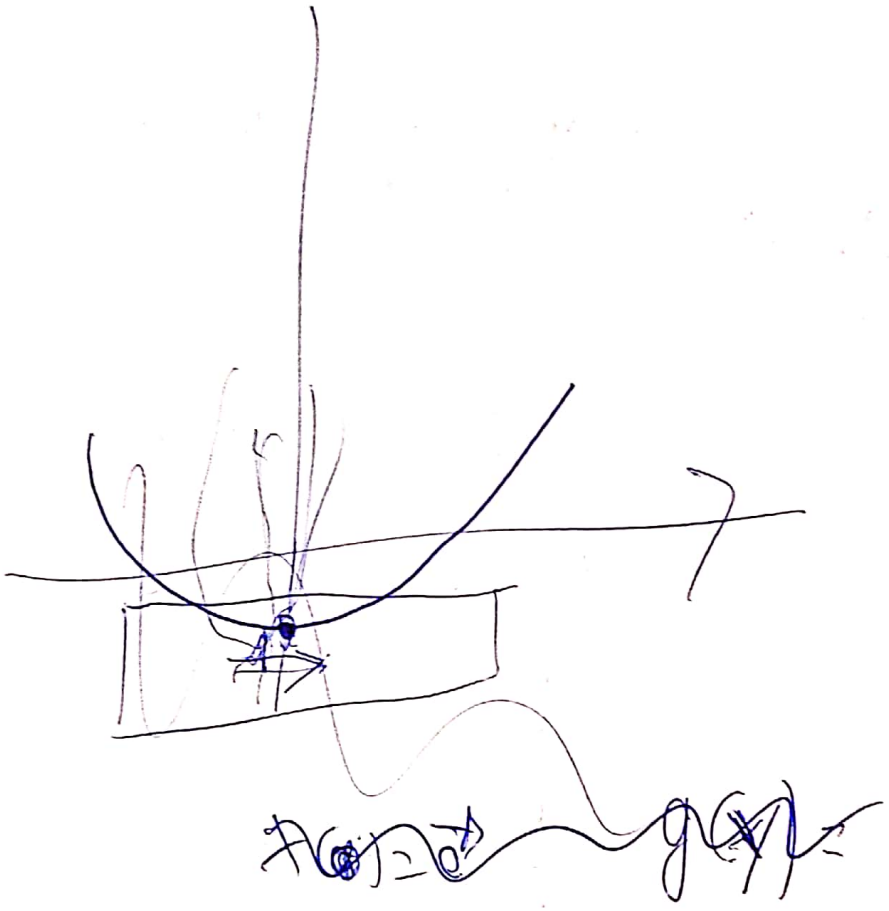
ISTO É, R É NORMAL AO "PLANO TANGENTE" A $X(a)$.



ISTO É SUFICIENTE P/ DETERMINAR R, DADOS $g \in F$.

Digitalizado com

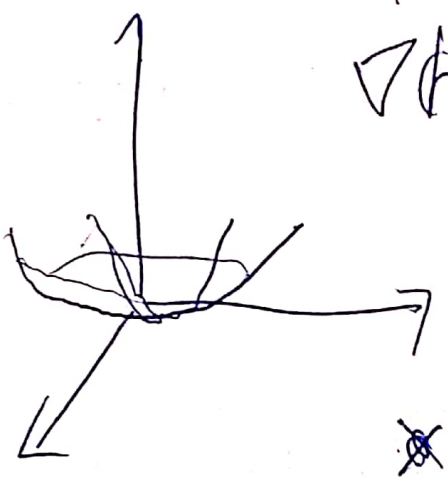
8



$g(x,y,z) = z - h(x,y)$

$h(0,0) = 0.$

$\nabla h(0,0) = \vec{0}$



$X(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

VINCULADO SE, E SÓ SE:

$z(t) = h(x(t), y(t))$.

Digitalizado com

$\ddot{z}(t)$

$\dot{z}(t) = \langle \nabla h(x), (\dot{x}, \dot{y}) \rangle$.

$\ddot{z}(t) = \langle \nabla h, (\ddot{x}, \ddot{y}) \rangle + (D_2 H(x, \dot{x}), (x, y))$

$\ddot{z}(0) = 0$ $+ \langle D_2 H(\alpha(0), \gamma(0)), (\dot{x}, \dot{y}), (\dot{x}, \dot{y}) \rangle$

Solução

X É UMA SOLUÇÃO DE

$m_i \ddot{x}_i = F_i$ SUJEITA AO VÍNCULO g.

SE R É A REAÇÃO VINCULAR.
ÚNICA QUE SATISFAZ O
PRINCÍPIO DE D'ALEMBERT.

$X(t)$ SATISFAZ

$m_i \ddot{x}_i = F_i + R_i$.

Digitalizado com

MECÂNICA CONSERVATIVA!

VAMOS ASSUMIR TAMBÉM QUE

(10)

$$F = -\nabla U$$

$U: R^{3N} \to R$ ENERGIA POTENCIAL DE CLASSE C^2.

TEO: SE X É UMA SOLUÇÃO DO PROBLEMA VINCULADO

ENTÃO

$$E(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \|\dot{X}_i\|^2}{2} + U(X) \text{ É}$$

CONSTANTE.

$$\dot{E}(t) = \sum_{i=1}^{N} \langle m_i \ddot{X}_i, \dot{X}_i \rangle + \langle \nabla U, \dot{X}_i \rangle$$

$$= \langle R_i, \dot{X}_i \rangle = 0.$$

Digitalizado com

PENSAR NO SISTEMA LAGRANGEANO (11)

$$L_K(X,\dot{X}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \|\dot{X}_i\|^2}{2} - U(X) - K U_g(X).$$

$$U_g(X) = \|g(X)\|^2.$$

ESTUDAR AS SOLUÇÕES DE L_K COM.

$X(0)=X_0$, $\dot{X}(0)=V_0$. E VER COMO SE COMPORTAM QUANDO $K \to \infty$.

PODE-SE MOSTRAR QUE NESTE CASO,

SE EXISTE COORDENADAS LOCAIS $q \in R^{3N-K}$.

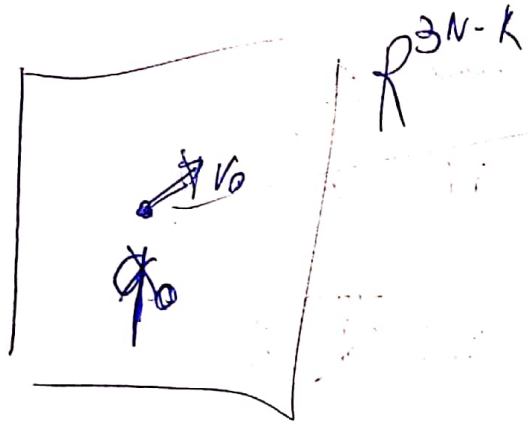
$$\psi : R^{3N-K} \to R^{3N} \qquad \psi(\Omega) = g^{-1}(0) \cap \mathcal{O}$$

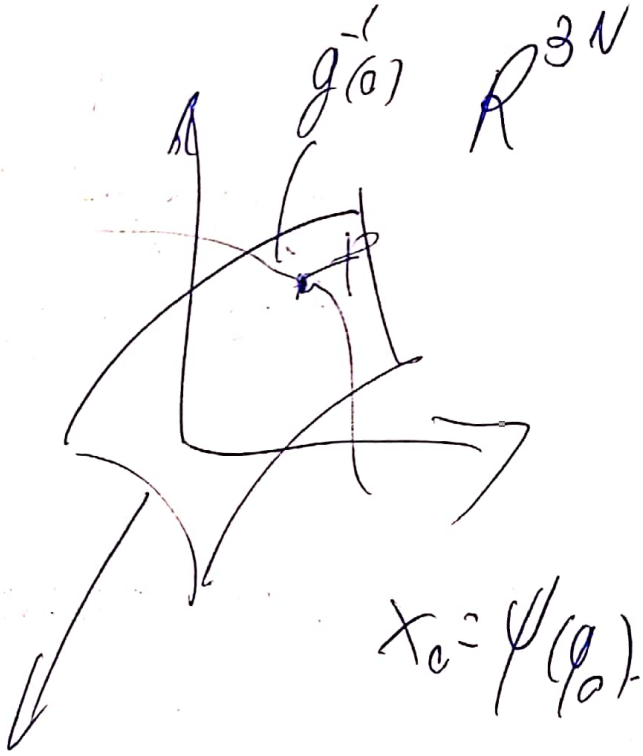
Ω ABERTO DE R^{3N-K} $\mathcal{O}$ ABERTO DE R^{3N}

Digitalizado com

$\overline{L} : R^{3N-K} \times R^{3N-K} \to R.$

$\overline{L}(q, \dot{q}) = \overline{T}(q, \dot{q}) - \overline{U}(q)$





$\overline{U}(q_0) = U(\psi(q_0))$

$q_0, \dot{q}_0 \longrightarrow D\psi(q_0) \cdot \dot{q}_0$

$\overline{T} : R^{3N-K} \times R^{3N-K} \to R$

$\overline{T}(q_0, \dot{q}_0) = T(D\psi(q_0)\dot{q}_0).$

Digitalizado com

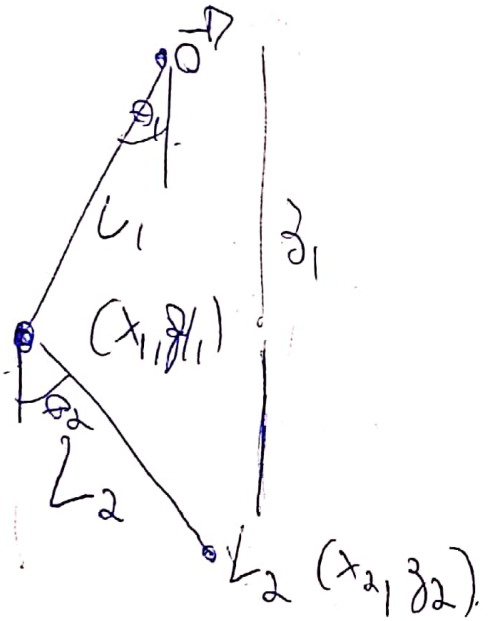
TEOREMA

O LIMITE DAS SOLUÇÕES DE

L_k É

ψ DA SOLUÇÃO DE $\overline{L}$.

EXEMPLO:



$\phi\ U(x_1, y_1, x_2, y_2) =$

$= 10(y_1 + y_2)$.

$x_1 = L_1 \cdot \sin\theta_1$

$y_1 = -L_1 \cdot \cos\theta_1$

$x_2 = L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin\theta_2$.

$y_2 = -L_1 \cos\theta_1 - L_2 \cos\theta_2$.

Digitalizado com

$$\overline{U}(\theta_1,\theta_2) = 10\,(z_1^{(\theta_1,\theta_2)} + z_2^{(\theta_1,\theta_2)})$$

$$\overline{U}(\theta_1,\theta_2) = 10\,(-L_1\cos\theta_1 + (-L_1\cos\theta_1 - L_2\cos\theta_2))$$

$$= -10\,(2L_1\cos\theta_1 + L_2\cos\theta_2).$$

$$\overline{T}(\theta_1,\theta_2,\dot\theta_1,\dot\theta_2) = \frac{\dot x_1^2 + \dot z_1^2}{2} + \frac{\dot x_2^2 + \dot z_2^2}{2} =$$

$$=$$

$$\dot x_1^2 + \dot z_1^2 = L_1^2\dot\theta_1^2$$

$$\dot x_1 = +L_1\cos\theta_1\,\dot\theta_1$$

$$\dot z_1 = +L_1\sin\theta_1\,\dot\theta_1$$

$$\dot x_2 = L_1\cos\theta_1\dot\theta_1 + L_2\cos\theta_2\dot\theta_2$$

$$\dot z_2 = L_1\sin\theta_1\,\dot\theta_1 + L_2\cos\theta_2\,\dot\theta_2$$

Digitalizado com