# Interpolação

## Interpolação Polinomial - Forma de Newton - continuação

Nelson Kuhl

IME/USP

19 de novembro de 2020

# Uma propriedade dos coeficientes

Suponha que $\{c_j\}_{j=0}^{n}$ são os **coeficientes da forma de Newton** para o polinômio interpolador da tabela

$$\begin{array}{c|cccccc} x & x_0 & x_1 & \dots & x_k & \dots & x_n \\ \hline y & y_0 & y_1 & \dots & y_k & \dots & y_n \end{array}. \tag{1}$$

Então, a expressão truncada no índice $k$,

$$\begin{aligned} p_k(x) = & c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ & + c_k(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}) \end{aligned}$$

é o polinômio interpolador da subtabela formada pelos primeiros $k+1$ pontos $(x_i, y_i)$, $0 \leq i \leq k$. De fato, o grau de $p_k$ é menor ou igual a $k$ e

$$p_k(x_i) = p_n(x_i) = y_i, \quad 0 \leq i \leq k.$$

# Uma propriedade dos coeficientes

Portanto, para cada $k = 0, 1, \ldots, n$, o coeficiente $c_k$ da forma de Newton é igual ao **coeficiente de $x^k$ do polinômio interpolador da subtabela formada pelos primeiros $k+1$ pontos**. Subtabelas terão um papel importante na nossa análise e vamos então definir a seguinte notação.

## Notação

Dada a Tabela (1), denotaremos por

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]$$

o coeficiente de $x^k$ do polinômio interpolador da subtabela formada pelos $k+1$ pontos $(x_{i+j}, y_{i+j})$, $0 \leq j \leq k$. A notação explicita o fato de que este coeficiente é caracterizado unicamente por $x_{i+j}$ e $y_{i+j} = f(x_{i+j})$, $0 \leq j \leq k$.

- Com esta notação, $c_k = f[x_0, \ldots, x_k]$, $0 \leq k \leq n$.

# Cálculo dos coeficientes

Recordemos o teorema visto na aula anterior:

## Teorema

Dada a tabela (1), defina $p_{0\ldots n-1}$ como sendo o polinômio interpolador da subtabela $(x_i, y_i)$, $0 \leq i \leq n-1$ e $p_{1\ldots n}$ como sendo o polinômio interpolador da subtabela $(x_i, y_i)$, $1 \leq i \leq n$. Então, para todo $x$, o polinômio interpolador $p_n$ da tabela (1) satisfaz

$$p_n(x) = \frac{(x - x_0)p_{1\ldots n}(x) - (x - x_n)p_{0\ldots n-1}(x)}{x_n - x_0}. \tag{2}$$

# Cálculo dos coeficientes

Recordemos o teorema visto na aula anterior:

## Teorema

Dada a tabela (1), defina $p_{0\ldots n-1}$ como sendo o polinômio interpolador da subtabela $(x_i, y_i)$, $0 \leq i \leq n-1$ e $p_{1\ldots n}$ como sendo o polinômio interpolador da subtabela $(x_i, y_i)$, $1 \leq i \leq n$. Então, para todo $x$, o polinômio interpolador $p_n$ da tabela (1) satisfaz

$$p_n(x) = \frac{(x - x_0)p_{1\ldots n}(x) - (x - x_n)p_{0\ldots n-1}(x)}{x_n - x_0}. \tag{2}$$

Comparando-se os coeficientes de $x^n$ dos dois lados de (2), concluimos que

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

O procedimento pode ser continuado para subtabelas, nos levando a concluir que $f[x_i, \ldots, x_{i+k}]$ é uma **diferença dividida de ordem** $k$.

# Diferenças divididas de ordem $j$

- $j = 0: \; f[x_i] = y_i, \; 0 \leq i \leq n$
- $j = 1: \; f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}, \; 0 \leq i \leq n-1$
- $j = 2: \; f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \dfrac{f[x_{i+2}, x_{i+1}] - f[x_{i+1}, x_i]}{x_{i+2} - x_i}, \; 0 \leq i \leq n-2$

$\vdots$

- $j = k: \; f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] =$
$$\frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}, \; 0 \leq i \leq n-k$$

etc ...

# Exemplo

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $2^x$ | $0.5$ | $1$ | $2$ | $4$ |

# Exemplo

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $2^x$ | $0.5$ | $1$ | $2$ | $4$ |

| $x$ | $f_0$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | $\mathbf{\frac{1}{2}}$ | | | |
| | | $\frac{1-1/2}{0+1} = \mathbf{\frac{1}{2}}$ | | |
| $0$ | $1$ | | $\frac{1-1/2}{1+1} = \mathbf{\frac{1}{4}}$ | |
| | | $\frac{2-1}{1-0} = 1$ | | $\frac{1/2-1/4}{2+1} = \mathbf{\frac{1}{12}}$ |
| $1$ | $2$ | | $\frac{2-1}{2-0} = \frac{1}{2}$ | |
| | | $\frac{4-2}{2-1} = 2$ | | |
| $2$ | $4$ | | | |

# Exemplo

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $2^x$ | $0.5$ | $1$ | $2$ | $4$ |

| $x$ | $f_0$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | $\mathbf{\frac{1}{2}}$ | | | |
| | | $\frac{1-1/2}{0+1} = \mathbf{\frac{1}{2}}$ | | |
| $0$ | $1$ | | $\frac{1-1/2}{1+1} = \mathbf{\frac{1}{4}}$ | |
| | | $\frac{2-1}{1-0} = 1$ | | $\frac{1/2-1/4}{2+1} = \mathbf{\frac{1}{12}}$ |
| $1$ | $2$ | | $\frac{2-1}{2-0} = \frac{1}{2}$ | |
| | | $\frac{4-2}{2-1} = 2$ | | |
| $2$ | $4$ | | | |

Em negrito estão os coeficientes da forma de Newton. Para chegarmos até o último coeficiente, precisamos calcular todas as diferenças dividias. O número de operações aritméticas é igual ao da resolução do sistema triangular.