

Controle H_∞ - Aula 8

Prof. Diego Colón

3 de novembro de 2020

- Um sistema LIT MIMO é um operador que transforma um sinal de entrada $\mathbf{u} : [-\infty, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}^m$ em um sinal de saída $\mathbf{y} : [-\infty, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}^n$;
- Este é uma *transformação linear* entre dois espaços vetoriais $G : L_p^m[-\infty, +\infty] \rightarrow L_r^n[-\infty, +\infty]$, ambos de dimensão infinita;
- Sabemos, da Álgebra Linear, que transformações lineares entre espaços de dimensão finita são representados por matrizes, e que as matrizes de um determinado tamanho também pertencem a espaços vetoriais.
- Como os espaços vetoriais de sinais $L_p^n[-\infty, +\infty]$ têm dimensão infinita, é razoável supor que os sistemas LIT (que são transformações lineares) também pertençam a espaços vetoriais de dimensão infinita.

De fato, sabemos que a relação entre entrada e saída em um sistema LIT MIMO é dada pela *convolução*:

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^{\infty} \mathbf{G}(t - \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau = \mathbf{G} \star \mathbf{u}, \quad (1)$$

de modo que podemos pensar que a convolução de $\mathbf{G}(t)$ (resposta ao impulso do sistema, que é uma função com valores matriciais) com o sinal de entrada $\mathbf{u}(t)$ corresponde a uma transformação linear L . Como $\mathbf{G}(t)$ também é um sinal, o espaço dos sistemas LIT é também de dimensão infinita.

Para definir as duas normas mais importantes para controle robusto, precisamos falar dos espaços:

- $L_2^{n,m}(j\mathbb{R})$: espaço de Hilbert das matrizes de funções de transferência $n \times m$, que têm produto interno:

$$\langle F, G \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace}(F^\dagger(j\omega)G(j\omega)) d\omega, \quad (2)$$

e cuja norma é então:

$$\|F\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace}(F^\dagger(j\omega)F(j\omega)) d\omega}. \quad (3)$$

Para que esta norma seja finita, é necessário que as funções de transferência sejam estritamente próprias.

- O espaço $RL_2^{n,m}(j\mathbb{R}) \subset L_2^{n,m}(j\mathbb{R})$ é o subespaço das matrizes de funções racionais estritamente próprias e que não tem pólos em $j\mathbb{R}$.
- $L_\infty^{n,m}(j\mathbb{R})$, que é o espaço de Banach das matrizes de funções de transferência $G(j\omega)$ com norma:

$$\|F\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(F(j\omega)). \quad (4)$$

- O espaço $RL_\infty^{n,m}(j\mathbb{R}) \subset L_\infty^{n,m}(j\mathbb{R})$ é o espaço das matrizes de funções de transferência racionais e próprias e que não tem pólos em $j\mathbb{R}$.

Para definir os chamados espaços de Hardy, é necessário apresentar o conceito de:

Definição (Função Analítica)

Uma função $f : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é analítica em $z_0 \in S$ se f for diferenciável em z_0 e em alguma vizinhança deste ponto. Ela é analítica em S se for analítica em todos os pontos de S .

Uma função analítica em S pode ser representada unicamente por série de Taylor em S . Da mesma forma, uma matriz de funções complexas $F : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times m}$ é analítica se todas as funções componentes $F_{ij}(s)$ forem analíticas.

Teorema (Teorema do Módulo Máximo)

Se $f(s)$ é uma função analítica não constante em um conjunto aberto e conexo $S \subset \mathbb{C}$, então $|f(s)|$ não pode ter um máximo em S :

Este teorema é importante para nós porque as funções de transferência estáveis são analíticas no semiplano direito aberto. Deste modo, o teorema garante que o máximo do módulo destas funções não pode ser no semiplano direito aberto.

Entretanto, os sistemas que estamos interessados fazem parte de subespaços. Mais especificamente, estamos interessados nos chamados *espaços de Hardy*:

- $\mathcal{H}_2 \subset L_2^{n,m}(j\mathbb{R})$, que é o espaço das matrizes de funções de transferência que são analíticas no semiplano direito e tal que $\|F\|_2 < \infty$. O subespaço $\mathcal{RH}_2 \subset \mathcal{H}_2$ é o das matrizes de funções de transferência racionais, estritamente próprias e analíticas no semiplano direito.
- $\mathcal{H}_\infty \subset L_\infty^{n,m}(j\mathbb{R})$ é o espaço das matrizes de funções de transferência analíticas no semiplano direito e limitadas em $j\mathbb{R}$. O subespaço $\mathcal{RH}_\infty \subset \mathcal{H}_\infty$ é o espaço das matrizes de funções de transferência analíticas no semiplano direito, racionais e próprias (não necessariamente estritamente próprias).

Finalmente, cabe destacar algumas propriedades:

- 1 O espaço \mathcal{RH}_∞ é fechado por multiplicação por escalar, soma e produto.
- 2 A norma H_∞ do sistema $F(s)$ vale:

$$\|F\|_\infty = \sup_{0 < \|u\|_2 < \infty} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2}, \quad (5)$$

ou seja, esta norma representa o ganho máximo de energia do sinal (que ocorre para alguma direção).

O sistema LIT MIMO dado pela matriz de funções de transferência:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2.188}{s^2+6.973s+2.021} & 0 \\ \frac{-0.04673s^2-1.007s+11.63}{s^4+13.81s^3+53.41s^2+65.71s+7.14} & \frac{-1.062s+8.846}{s^2+10.83s+20.82} \end{bmatrix} \quad (6)$$

- Sabemos de antemão que este sistema é estável;
- Usando a função **hinfnorm** do MATLAB, achamos que $\|G\|_\infty = 1.988$, que é 5.97 dB.
- Isto significa que este sistema tem um ganho de energia que pode chegar até quase dois (poderia ter sido usada **norm(.,inf)**)
- Usando **norm(.,2)**, achamos que $\|G\|_2 = 0.7379$

Sistemas lineares e invariantes no tempo são representados por sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes. Na representação em espaço de estados, as equações diferenciais são todas de primeira ordem, e as saídas são dadas como combinações lineares das entradas e dos estados:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + b_{11}u_1(t) + \cdots + b_{1m}u_m(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + b_{21}u_1(t) + \cdots + b_{2m}u_m(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + b_{n1}u_1(t) + \cdots + b_{nm}u_m(t) \end{cases}$$

que poderia ainda ser colocada na forma matricial, que é:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

Definem-se então as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

Teorema

No domínio do tempo, pode-se provar que $\mathbf{x}(t)$ é dado por:

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{e^{At} \mathbf{x}(0)}_{\text{resposta livre}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} B \mathbf{u}(\tau) d\tau}_{\text{resposta forçada}} \quad (7)$$

- Se $\mathbf{u}(t) \equiv 0$, tem-se simplesmente que $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0)$
- As saídas de um sistema representam as variáveis que podem ser medidas diretamente.
- Em sistemas de controle, as saídas são as leituras fornecidas pelos sensores.
- Os estados, ao contrário, não são em geral mensuráveis (muitas vezes, são variáveis que nem sequer tem significado físico).

Definição (Equações de Saída de um Sistema)

Supondo que o sistema possua p saídas, elas são calculadas por:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{p1} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{p1} & \cdots & d_{pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

Definem-se então as matrizes

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{p1} & d_{p2} & \cdots & d_{pm} \end{bmatrix}$$

Definição (Representação em Espaço de Estados)

Um sistema linear e invariante no tempo em espaço de estados é então um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem da forma:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

Teorema (Solução Geral no Domínio do Tempo)

A solução geral, no domínio do tempo, para o sistema (??) é dada por

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (8)$$

Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo MIMO - 7

Fica claro então que, para condições iniciais nulas, isto é $\mathbf{x}(0) = 0$, tem-se que a relação entre entrada e saída é dada por um operador que relaciona $\mathbf{y}(t)$ e $\mathbf{u}(t)$. Aplicando-se a Transformada de Laplace nas equações de estado, tem-se:

$$s\mathbf{X}(s) - A\mathbf{X}(s) = (sI - A)\mathbf{X}(s) = B\mathbf{U}(s) + \mathbf{x}(0)$$

Para os valores de s onde a inversa de $(sI - A)$ existe, tem-se que

$$\mathbf{X}(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1}B\mathbf{U}(s)}_{\text{resposta forçada}} + \underbrace{(sI - A)^{-1}\mathbf{x}(0)}_{\text{resposta livre}} \quad (9)$$

Substituindo-se $\mathbf{X}(s)$ na segunda equação do sistema (equação de saída) tem-se que:

$$\mathbf{Y}(s) = \underbrace{[C(sI - A)^{-1}B + D]}_{G(s)}\mathbf{U}(s) + C(sI - A)^{-1}\mathbf{x}(0) \quad (10)$$

$G(s)$ é uma matriz $p \times m$ (deve ter obviamente as mesmas dimensões da matriz D) conhecida como *matriz de funções de transferência* do SLIT. Deste modo, representamos o sistema MIMO como:

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ G_{p1}(s) & G_{p2}(s) & \cdots & G_{pm}(s) \end{bmatrix}$$

onde $G_{ij}(s)$ relaciona a entrada u_j com a saída y_i

Exemplo

O sistema a seguir representa uma planta de controle de temperatura e vazão de ar, onde um termopar, que corresponde à saída 2, mede a temperatura (de 0 a 10 volts) e um sensor de vazão mássica, que corresponde à saída 1, mede a vazão (de 0 a 10 V). As entradas são a tensão aplicada em uma resistência (para aquecimento), que é a entrada 2, e a tensão aplicada em um ventilador, que é a entrada 1 (tudo de 0 a 10 V). Atrasos de transporte foram aproximados por Padè.

A representação em espaço de estados é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} -47.48 & -17.57 & -2.284 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 32.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5.919 & -2.013 & -0.7554 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -25.8 & -11.64 & -5.288 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.25 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 8.0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(11)

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -0.05956 & 0.6204 & 0 & -0.04276 & 0.3421 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.013 & 8.36 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os autovalores deste sistema são: $\lambda_1 = -26.3852$, $\lambda_2 = -20.8333$, $\lambda_3 = -0.2660$, $\lambda_4 = -4.0000$, $\lambda_5 = -1.6961$, $\lambda_6 = -0.2227$, $\lambda_7 = -14.7059$, $\lambda_8 = -8.3333$ e $\lambda_9 = -2.7617$, o que mostra que se trata de um sistema estável.

Este sistema também é controlável e observável, e a correspondente matriz de funções de transferência é:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{-0.935s+19.85}{s^3+47.48s^2+562.3s+146.2} & 0 \\ \frac{-0.04276s+0.171}{s^3+5.919s^2+8.053s+1.511} & \frac{-513.6s+4280}{s^3+25.8s^2+186.2s+338.4} \end{bmatrix} \quad (12)$$

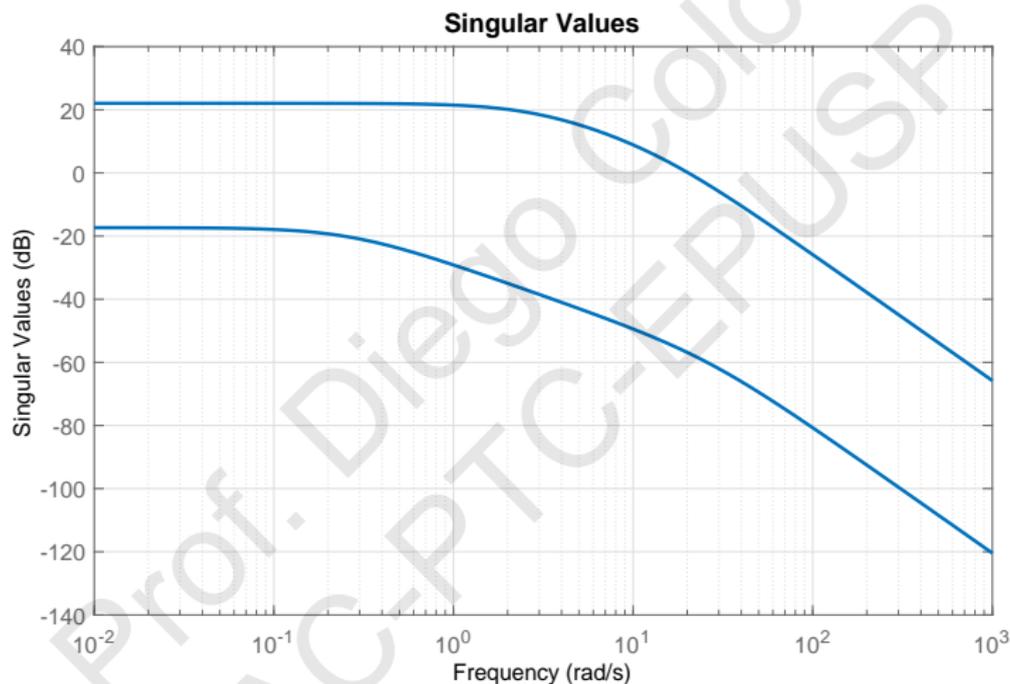


Figura: Valores Singulares da Matriz de $G(j\omega)$

Usando a função **hinfnorm** do MATLAB, achamos que $\|G\|_{\infty} = 12.6475$, que é 22.0401 dB. A resposta ao degrau unitário em cada entrada é apresentada na Fig. 2. Vê-se claramente que o sistema é de fase não-mínima. Nota-se que resposta da entrada dois para a saída um é nula, isto porque a função de transferência relacionando estes sinais é nula. Isto porque a resistência de aquecimento não afeta a vazão de forma perceptível.

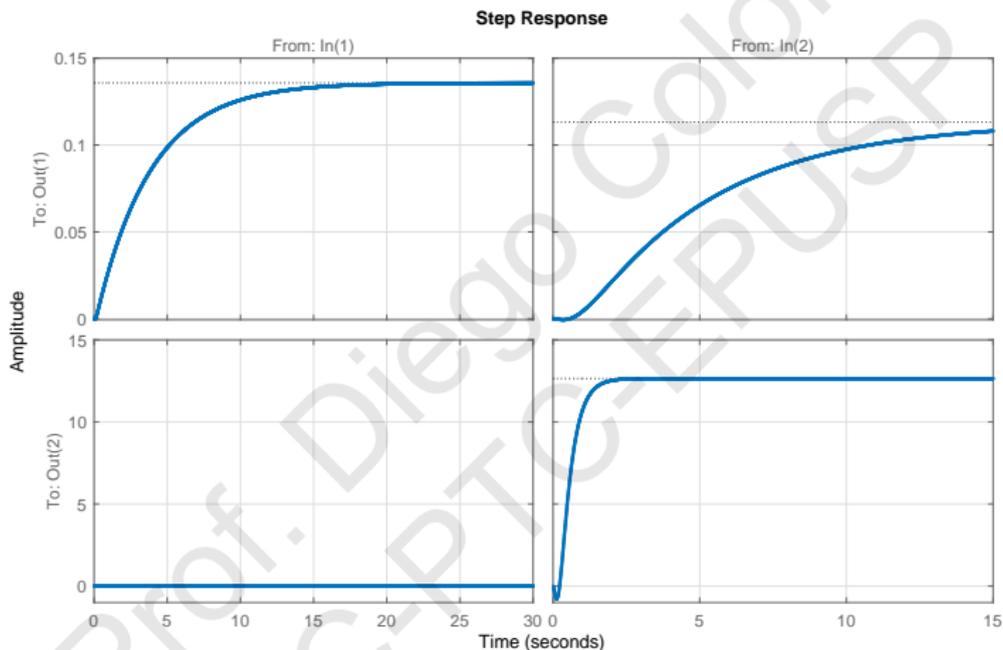


Figura: Resposta ao Degrau

Sistema em Malha Fechada MIMO - 1

Um sistema em malha fechada MIMO tem um diagrama de blocos apresentado na Fig. 3. Este diagrama de blocos é similar ao usado para sistemas SISO. Entretanto, a ordem da multiplicação de matrizes importa. Ou seja, tem-se que $GK \neq KG$. Deste modo, a expressão que relaciona saída com sinais de entrada é dada por:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{G}\mathbf{U} + \mathbf{G}_d\mathbf{D} = \mathbf{G}\mathbf{K}\mathbf{E} + \mathbf{G}_d\mathbf{D} = \mathbf{G}\mathbf{K}(\mathbf{R} - \mathbf{N} - \mathbf{F}\mathbf{Y}) + \mathbf{G}_d\mathbf{D}$$

considerando $\mathbf{F} \equiv \mathbf{I}$ (identidade), tem-se que

$(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{K})\mathbf{Y} = \mathbf{G}\mathbf{K}\mathbf{R} - \mathbf{G}\mathbf{K}\mathbf{N} + \mathbf{G}_d\mathbf{D}$ de modo que, se multiplicarmos à esquerda nos dois lados da igualdade por $(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{K})^{-1}$:

$$\mathbf{Y} = \underbrace{(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{G}\mathbf{K}\mathbf{R}}_T - \underbrace{(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{G}\mathbf{K}\mathbf{N}}_T + \underbrace{(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{G}_d\mathbf{D}}_S$$

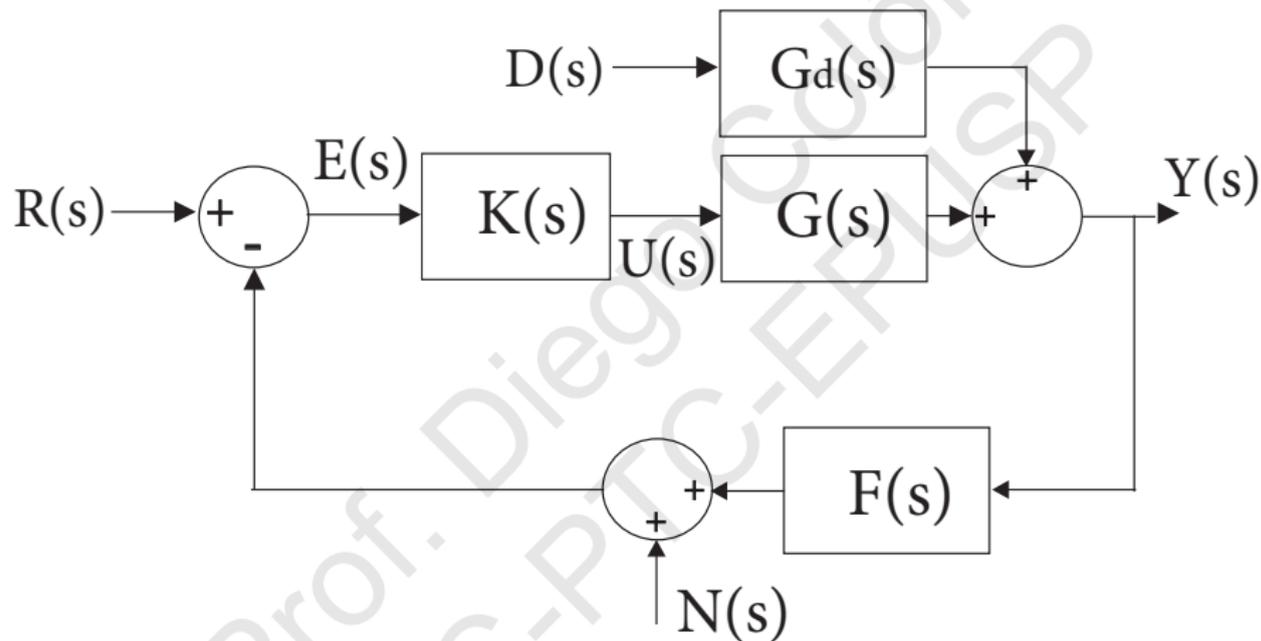


Figura: Diagrama de Blocos MIMO Usado em Controle Robusto

Para o caso do erro teórico em função das entradas, temos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{R} - \mathbf{Y} = \mathbf{R} - (\mathbf{T}\mathbf{R} - \mathbf{T}\mathbf{N} + \mathbf{S}\mathbf{G}_d\mathbf{D}) = \\ &(\mathbf{I} - \mathbf{T})\mathbf{R} + \mathbf{T}\mathbf{N} - \mathbf{S}\mathbf{G}_d\mathbf{D} = \mathbf{S}\mathbf{R} - \mathbf{S}\mathbf{G}_d\mathbf{D} + \mathbf{T}\mathbf{N} \quad (13) \end{aligned}$$

Deste modo, supondo, por facilidade que $G_d \equiv 1$, então temos que:

$$\mathbf{E} = \mathbf{S}\mathbf{R} - \mathbf{S}\mathbf{D} + \mathbf{T}\mathbf{N}$$

Sabemos que a norma induzida da matriz $S(j\omega)$ é dada por:

$$\|S(j\omega)\|_2 = \bar{\sigma}(S(j\omega)) = \max_{U \neq 0} \frac{\|S(j\omega)U(j\omega)\|_2}{\|U(j\omega)\|_2}$$

onde U é um vetor arbitrário em função da frequência. Em particular, $R(j\omega)$ poderia ser um vetor de exponenciais complexas do tipo $A_i e^{j(\omega t + \phi_i)} = A_i e^{j\phi_i} e^{j\omega t}$, que é simplesmente um vetor complexo multiplicado por $e^{j\omega t}$:

$$\|E(j\omega)\|_2 \leq \bar{\sigma}(S(j\omega)) \|R(j\omega)\|_2$$

$$\sqrt{\sum E_i^2} \leq \bar{\sigma}(S(j\omega)) \sqrt{\sum R_i^2}$$

- O máximo valor singular fornece, para cada frequência, o máximo ganho, que corresponde a uma determinada direção.
- Deste modo, as amplitudes de erro E_i ficarão bastante reduzidas se $\bar{\sigma}(S(j\omega))$ for pequeno.
- Se o projeto do controlador $K(j\omega)$ for tal que $\bar{\sigma}(S(j\omega))$ seja pequeno nas baixas frequências, significa que se $\mathbf{r}(t)$ for um vetor de senóides de frequência ω que esta nesta faixa, então o vetor $\mathbf{R}(j\omega)$ tem norma pequena nesta faixa,
- As amplitudes dos números complexos também são pequenas nesta faixa. Isto significa que o vetor de erros nesta faixa de frequência também tem amplitude pequena.

Não costuma se usar, em sistemas MIMO, nada parecido com o Método do Lugar das Raízes do Controle Clássico. Primeiramente porque os controladores MIMO do tipo $K(s)$ em geral dependem de muitos parâmetros a serem determinados pelo projetista. Além disso, até onde vai o conhecimento deste autor, não há regras simples para se esboçar esta lugar geométrico, mesmo que o controlador só dependesse de um parâmetro (o que já o limitaria muito).

Exemplos Para o caso do sistema que estamos analisando, podemos plotar os valores singulares da matriz de funções de transferência $S(j\omega)$ para o caso de um controlador $K(s) = kI$, que é apresentado na Fig. 4. Este controlador é equivalente a realimentar a saída i na entrada i com ganho k . Os valores de k variam de 0.02 a 0.24 em intervalo de 0.02. Para o valor $k = 0.24$, temos que $\|S\|_{\infty} = 26.1542$ (em decibéis), e para $k = 0.25$, o sistema já fica instável. Neste último caso estável, teríamos $\bar{\sigma}(S(j\omega)) = -0.277$ dB, o que representa uma atenuação muito pequena. Então, o erro estacionário deve ser grande nesta situação.

Sistema em Malha Fechada MIMO - 8

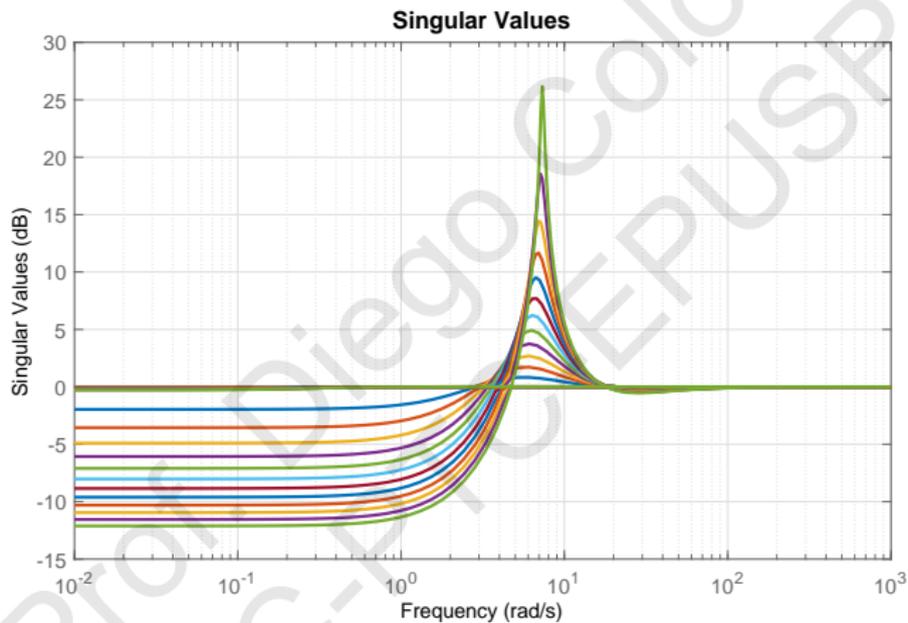
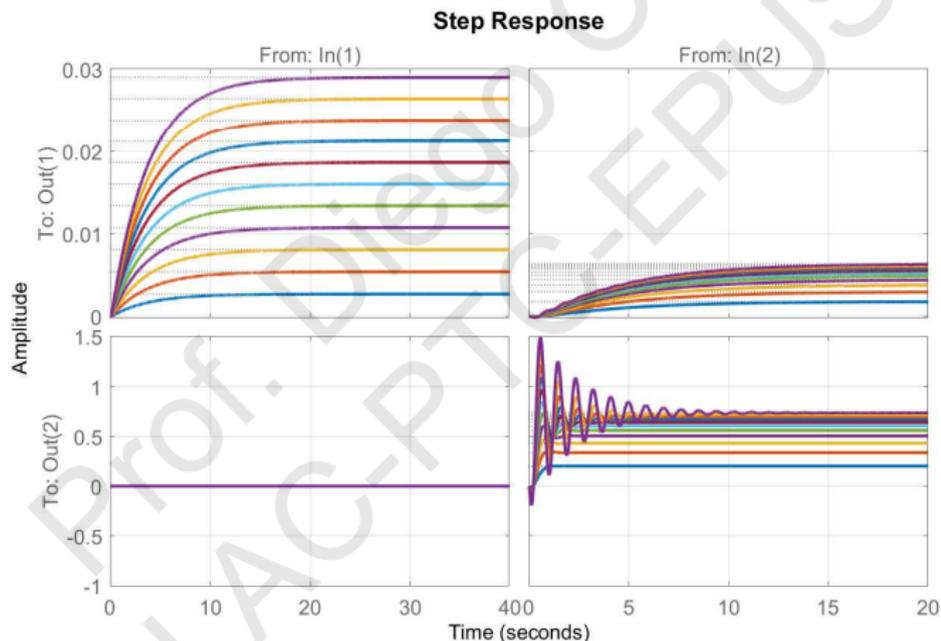


Figura: Valores Singulares da Matriz de $S(j\omega)$

Sistema em Malha Fechada MIMO - 9

O pico de ressonância indica a presença de um pólo próximo do eixo imaginário, como pode ser verificado na resposta ao degrau unitário, apresentado em Fig. ??.



De modo a ter baixo erro estacionário e menor sobressinal (além de maior robustez) é necessário que $\bar{\sigma}(S(j\omega))$ seja pequeno nas baixas frequências e que $\|S\|_{\infty} = \text{esssup}_{\omega} \bar{\sigma}(S(j\omega))$ não seja alto (tipicamente, menor que 2). Pela definição de T e S , claramente se vê que $S + T = I$, e como $\bar{\sigma}(S)$ é uma norma, então:

$$|\bar{\sigma}(S) - \bar{\sigma}(T)| \leq \bar{\sigma}(S + T) = \bar{\sigma}(I) = 1 \leq \bar{\sigma}(S) + \bar{\sigma}(T)$$

$L(j\omega) = G(j\omega)K(j\omega)$ tipicamente tende a zero para $\omega \rightarrow \infty$, o que faz com que $S(j\omega) \rightarrow I$, o que faz com que $\bar{\sigma}(T)(j\omega) \rightarrow 0$. Ainda existe uma identidade tal que:

$$\underline{\sigma}(L) - 1 \leq \frac{1}{\bar{\sigma}(S)} \leq \underline{\sigma}(L) + 1$$

deste modo, se queremos erro estacionário pequeno em baixas frequências, temos que fazer $\underline{\sigma}(L)$ alto nestas frequências, ou seja, o menor ganho deve ser suficientemente grande. Não basta então que $\bar{\sigma}(L)$, porque isso não garante que $\underline{\sigma}(L)$ também o seja.

Podemos também lançar mão do conceito de função peso $w_p(s)$, que aqui usaremos em letra minúscula para não confundir com matriz de peso $W_p(s)$. Deste modo, podemos impôr, como condição de desempenho:

$$\bar{\sigma}(S)(j\omega) < \frac{1}{|w_p(j\omega)|}$$

Por fim, podemos definir a banda-passante ω_B como sendo a frequência onde $\bar{\sigma}(S)(j\omega)$ cruza 0.707 (ou -3dB) na subida.