~ Guia de Conteúdos ~

Aula 2

- Espaços afins e Transformações afins

$(A, +, E)$; $+ : A \times E \longrightarrow A$

(i) $a + 0 = a$

(ii) $(a + v) + w = a + (v + w)$

(iii) $\forall a, b, \exists v$ t.q $a + v = b$.

- Espaço Galileano

$(A^4, +, \mathbb{R}^4)$; $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$

(função tempo)

(i) T é linear

(ii) T é sobrejetora

(iii) $N(T) = \mathbb{R}^3$

- eventos simultâneos
- isomorfismo galileano
  ↳ Todo espaço galileano é o

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \{t\} \times \{(x, y, z)\}$$

- transformações afins que preservam a estrutura galileana:
  - Translação
  - Transformação Ortogonal
  - M.R.U.

- Sistema com n-pontos

$$X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{3n}$$
$$t \longrightarrow (X_1(t), \ldots, X_n(t))$$

- determinismo Newtoniano

$$\ddot{X}(t) = F(x, \dot{x}, t)$$

(existe única solução se F é C^1)

- princípio da invariância por transformações galileanas
($\nexists$ referencial privilegiado)

Aula 3

- Sistema mecânico fechado

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t) \qquad (I)$$

se $h(t)$ é solução de (I) e
$G: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \circlearrowleft$ é galileniana
$\Longrightarrow G \circ h(t)$ é solução
(aula foi a demonstração).

- F não pode depender de t
- F depende apenas de distâncias e velocidades relativas

Aula 4

- Sistemas conservativos

$$X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{3n}$$
$$t \longrightarrow (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

(com massas m_i, $i = 1, \dots, n$)

$$U : \mathring{\Omega} \subset \mathbb{R}^{3n} \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ t.q.}$$

$$m_i \ddot{X}_i = -\partial U / \partial x_i$$

- Preserva energia

$$E(x, \dot{x}) = U(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \|\dot{x}_i\|^2}{2}$$

(E é constante sobre as soluções)

- exemplos

Aula 5

- Ponto de equilíbrio
  - Sistema conservativo

    $(x, \dot{x})$ é ponto de equilíbrio

    $$\Longleftrightarrow \dot{x} = 0, \ \nabla U(x) = 0.$$

  - Estabilidade de Lyapunov

    $$\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t) \quad (I)$$

    $\varphi(t)$ solução de (I) é dita estável segundo Lyapunov se:
    $\forall t_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.q se
    $\psi(t)$ também é solução de (I)
    e $\|\varphi(t_0) - \psi(t_0)\| < \delta$ então

    $$\|\varphi(t) - \psi(t)\| < \varepsilon \quad \forall t > t_0.$$

- Teorema de Dirichlet-Lagrange

Se x é um ponto de mínimo estrito local de U, então $(X(t), \dot{X}(t)) = (x, 0)$ é estável segundo Lyapunov.

(recíproca nem sempre vale)

Aula 6

- Sistemas unidimensionais

$$\ddot{X} = -U'(x) \Rightarrow \dot{X} = f(x)$$

onde $$f(x) = \int_0^x -U(y)\,dy$$

- Usar conservação de energia
- espaço de fases $\cong \mathbb{R}^2$ onde

$$x = X \quad e \quad y = \dot{X}$$

- exemplo do pêndulo (importante)

Aula 7

- Análise do sistema unidimensional
  - Estudar curvas de nível da energia $E(x,\dot{x})$ no espaço de fases.
  - ver exemplos

- Sistemas com dois graus de liberdade

$$\ddot{x} = F(x,\dot{x},t) \quad (I)$$

  - Condição para ser conservativo

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$$

  - Trabalho sobre uma curva γ

$$W(F,\gamma) = \int_a^b \langle F(\gamma(s)), \gamma'(s)\rangle ds$$

- F é gradiente de um potencial $U: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ se, e só se, $\forall x_0, x_1 \in \Omega$ e $\forall \gamma, \bar{\gamma}$ curvas tais que $\begin{cases} \gamma(0) = \bar{\gamma}(0) = x_0 \\ \gamma(1) = \bar{\gamma}(1) = x_1 \end{cases}$ então

$$W(F, \gamma_1) = W(F, \gamma_2)$$

(trabalho independe do caminho)

Aula 8

- Campo de forças central

$$F: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$
$$x \longmapsto \frac{\Phi(\|x\|) \cdot x}{\|x\|}$$

para alguma $\Phi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Campos de força central são conservativos.
- Temos um potencial radial

$$U(\|x\|) = \int_0^{\|x\|} -\phi(r)\,dr.$$

- Momento angular

$X(t)$ solução de $\ddot{X} = F(x)$

para $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ← no plano

O momento angular da sol. é dado por

$$M(t) = [X(t), \dot{X}(t)]\,\hat{n} =$$

$$= (X_1(t)\dot{X}_2(t) - X_2(t)\dot{X}_1(t))\,\hat{n}$$

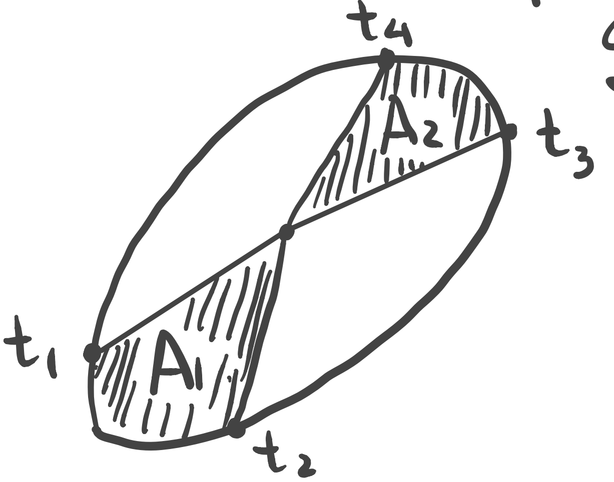
(onde $\hat{n}$ é normal ao plano)

- Para um campo de força central NO PLANO, o momento angular é constante para todas as soluções.

- Para um campo de força central em $\mathbb{R}^3$:
  - Toda orbita $X(t)$ é planar, contida no plano α t.q.

$$M(t) \perp \alpha$$

- Lei de Kepler:



Se $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$, então $A_1 = A_2$.

Aula 9:

- Sistemas bidimensionais com forças centrais
  - Potencial Efetivo

    $$V(r) = U(r) + M^2/2r^2$$

  - Se $X(t)$ é solução do sistema de força central, $r(t)$ é sol. do sistema unidimensional com potencial $V(r)$.

  - A energia do sistema unidimensional é a mesma do sistema original.

Aula 10:

- Sistema c/ N pontos materiais:

o ponto material $1 \leq i \leq N$ satisfaz

$$m_i \ddot{x}_i = \underbrace{\sum_{j \neq i} F_{ij}}_{\text{força de interação}} + \underbrace{F_i'}_{\text{força externa}}$$

- O sistema é fechado se

$$F_i' = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, N$$

- Centro de massa

$$CM(t) = \sum_{i=0}^{N} m_i x_i(t) \Big/ \sum_{i=0}^{N} m_i$$

- Quantidade de movimento

$$P(t) = \sum_{i=0}^{N} M_i \dot{X}_i(t)$$

- Lei de Newton

$$\dot{P}(t) = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{F_i'(X(t))}_{\text{forças externas.}}$$

- Momento angular total

$$M(t) = \sum_{i=1}^{N} [m_i x_i(t), \dot{x}_i(t)]\, \hat{n}$$

$$\left(\dot{M}(t) = 0 \text{ no sistema fechado}\right)$$

- Energia cinética

$$T = \sum_{i=1}^{N} m_i \langle \dot{x}_i, \dot{x}_i \rangle / 2$$

- Trabalho

$$W_{t_0 \sim t_1}(F_i, X_i) = \int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{x}_i, F_i \rangle \, dt$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N} W_{t_0 \sim t_1}(F_i, X_i) = T(t_1) - T(t_0) \right)$$

- Sistema Conservativo

$\exists\, U : \mathbb{R}^{3N} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla U(x) = -\left(F_1(x), \dots, F_N(x)\right)$$

- Se um sistema é fechado e todas F_{ij} dependem apenas de $\|x_i - x_j\|$, então o sistema é conservativo.

Aula 11:

- **Mecânica Lagrangiana**

$L: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$,

temos o funcional sob curvas

$$\Phi_L(\gamma) = \int_a^b L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)\, dt$$

- Se γ_0 é um mínimo local de Φ_L então vale

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) \equiv 0$$

ao longo de γ_0.

Aula 12:

- Sistema mecânico

$$m_i \ddot{x}_i = \frac{-\partial U}{\partial x_i} \quad (I)$$

Se considerarmos

$$L(x,\dot{x}) = T(\dot{x}) - U(x),$$

onde $T(\dot{x}) := \sum_i \frac{m_i \dot{x}_i^2}{2}$.

Então γ é solução de (I) sse γ é ponto extremal do funcional Φ_L.

• Mudança de coordenadas

Seja $H : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um diffeomorfismo $\begin{pmatrix}\text{mudança de} \\ \text{coordenadas}\end{pmatrix}$

Lagrangiano antes: $L(x, \dot{x}, t)$

Lagrangiano depois:

$\tilde{L}(q, \dot{q}, t) :=$

$L(H^{-1}(q), DH(H^{-1}(q))^{-1} \cdot \dot{q}, t)$

Ou seja:

γ é extremal para Φ_L $\Longleftrightarrow$ $H \circ \gamma$ é extremal para $\Phi_{\tilde{L}}$.

Aula 13-

- **Transformada de Legendre**

Seja $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa.

$$J := \{ p \in \mathbb{R} \mid \sup_{x \in I} p \cdot x - f(x) < \infty \}$$

A função $f^*: J \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f^*(p) = \sup_{x \in I} px - f(x)$$

é a transformada de Legendre de f.

Aula 14:

• Formalismo Hamiltoniano

- Considere o Lagrangiano $L(q, \dot{q}, t)$. Se definirmos $p := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ e assumirmos que L é convexa na coord. $\dot{q}$, temos que a transformada de Legendre é

$$H(q, p, t) =$$

$$= \sup_{\dot{q} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \langle p, \dot{q} \rangle - L(q, \dot{q}, t) \right\}$$

Observe que

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} \ , \ \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q}$$

- Se $\gamma(t) = (q(t), p(t))$ é tal que $q(t)$ satisfaz

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \equiv 0 \ ,$$

então temos $\dot{p} = \dfrac{\partial L}{\partial q}$,

ou seja, γ é solução de

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}, \quad -\frac{\partial H}{\partial q} = \dot{p}$$

equação de Hamilton

Comparação

Formalismo Lagrangiano	**Formalismo Hamiltoniano**
$L : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$	$H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
Variáveis	**Variáveis**
$q, \dot{q}, t$	q, p, t
Equação de Euler-Lagrange	**Equação de Hamilton**
$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$	$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$
Natureza do problema	**Natureza do problema**
Variacional	E.D.O.

Aula 15:

- Se H não depende de t, temos que:

(i)
$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \quad \text{(E.H.)}$$

é uma E.D.O. autônoma.

(ii) H é constante ao longo de uma solução de (E.H.)

(iii) O fluxo definido por (E.H.) preserva volume (Teorema de Liouville)