MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2020

Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos

lsantos@ime.usp.br

EXERCíCIO AULA ANTERIOR:

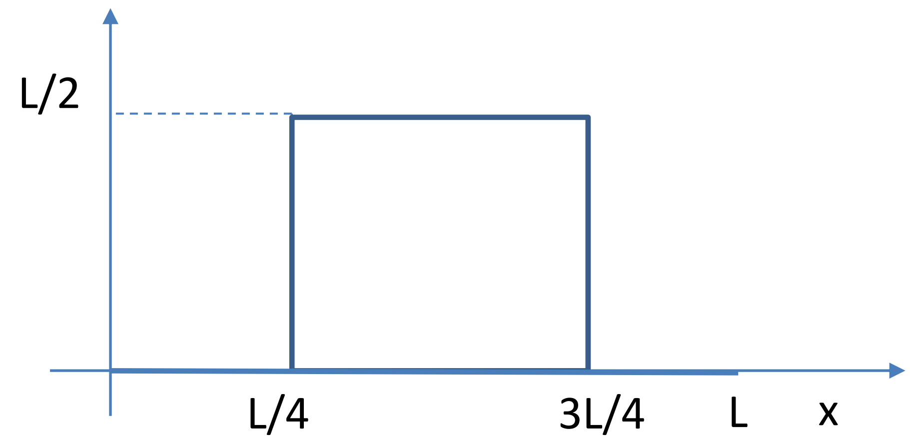
Encontre a solução para o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2 \end{cases}$$

com: $T_1 = T_2 = 0,$ e $\alpha = 1$

E condição inicial

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < L/4 \\ \dfrac{L}{2}, & L/4 \leq x < 3L/4 \\ 0, & 3L/4 \leq x \leq L \end{cases}$$

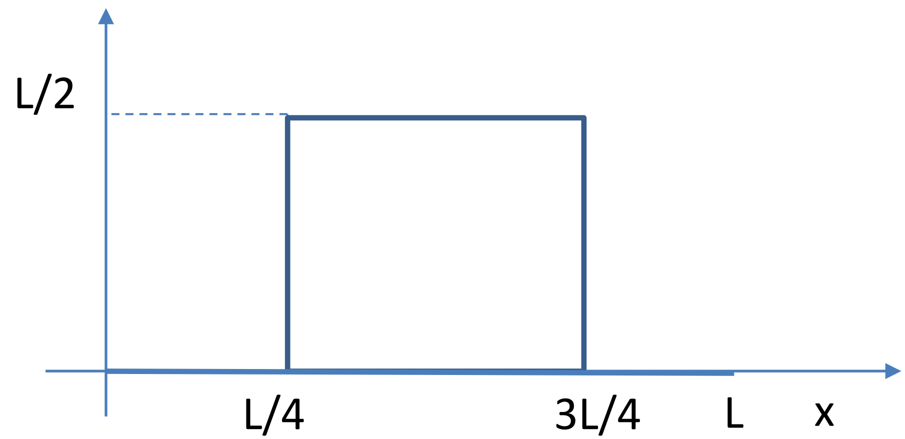


Construa um script python para visualizar e verificar sua solução.

SOLUÇÃO:

Os coeficientes da solução são os coeficientes da série de senos da condição inicial.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < L/4 \\ \dfrac{L}{2}, & L/4 \leq x < 3L/4 \\ 0, & 3L/4 \leq x \leq L \end{cases}$$



$$c_n = 2 * \frac{L}{2} * b_n\left(f^{(0)}_{\frac{1}{4},\frac{3}{4}}, L\right)$$

Série de senos

constante no intervalo [1/4,3/4]

Da tabela temos:

$$b_n(f^{(0)}_{c,d}, L) = -\frac{1}{n\pi}\cos s\Big|_{n\pi c}^{n\pi d}$$

Logo:

$$b_n\left(f^{(0)}_{\frac{1}{4},\frac{3}{4}}, L\right) = -\frac{1}{n\pi}\left[\cos\frac{3n\pi}{4} - \cos\frac{n\pi}{4}\right] = \frac{1}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{3n\pi}{4}\right]$$

Substituindo:

$$c_n = 2 * \frac{L}{2} * b_n\left(f^{(0)}_{\frac{1}{4},\frac{3}{4}}, L\right) = \frac{L}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{3n\pi}{4}\right]$$

Separando a dependência de *n*:

$$c_n = \frac{L}{\pi} * \frac{1}{n}\left[\cos\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{3n\pi}{4}\right]$$

Não existe uma simplificação simples (do tipo par ou ímpar).

A solução:

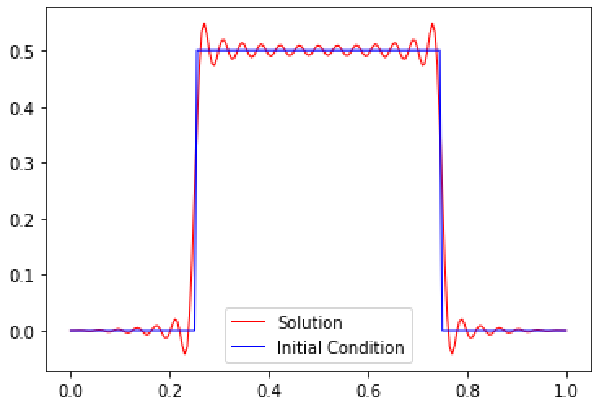
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$$

Tem a forma:

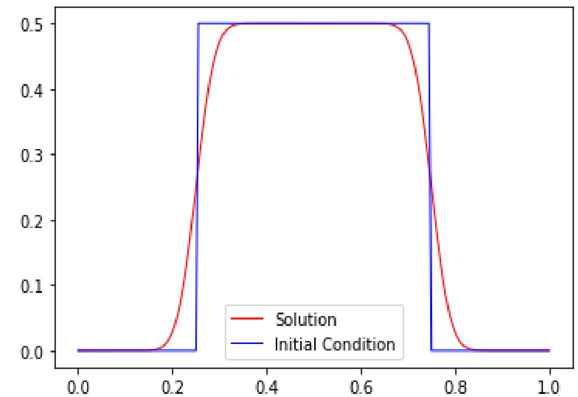
$$u(x,t) = \left[\frac{L}{\pi}\right].\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\cos\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{3n\pi}{4}\right] * \sin\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$$

MAP2320

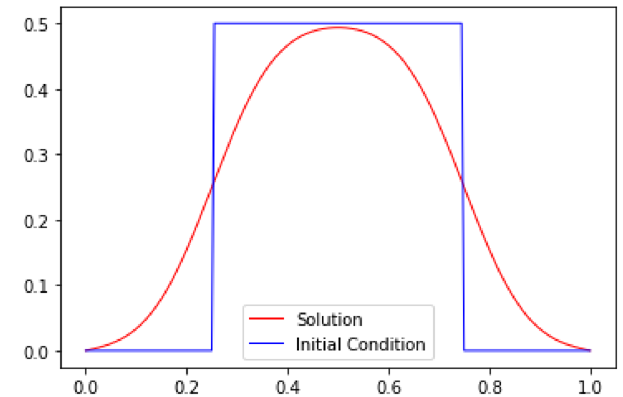
t=0



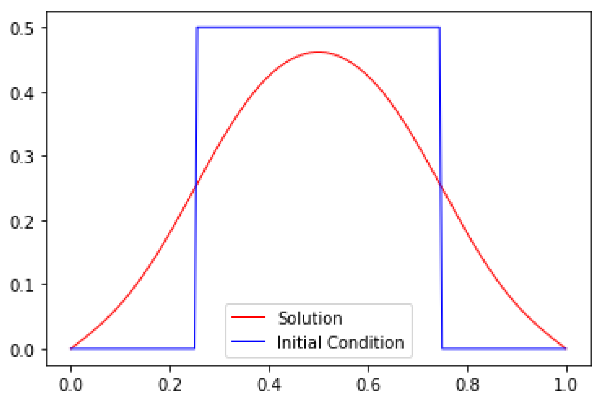
t=0.0005



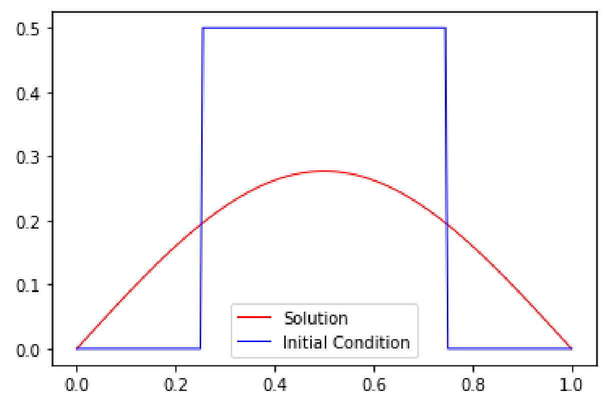
t=0.005



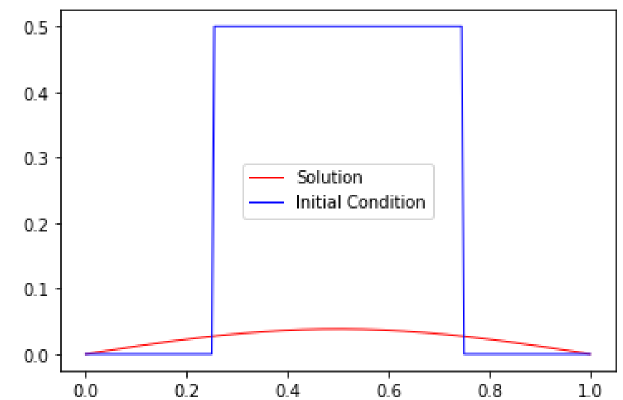
t=0.010



t=0.050



t=0.250



A solução transiente tende no estado estacionário ao valor das condições de contorno homogêneas

N = 50

$\Delta x = L/200$

Combined One-Dimensional Heat Conduction Equation

$$\frac{1}{r^n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^n k \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \dot{e}_{\text{gen}} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

$n = 0$ for a plane wall

$n = 1$ for a cylinder

$n = 2$ for a sphere

Jean-Baptiste Joseph Fourier

Boundary Conditions

- Specified Temperature Boundary Condition
- Specified Heat Flux Boundary Condition

Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução
(Versão Preliminar)

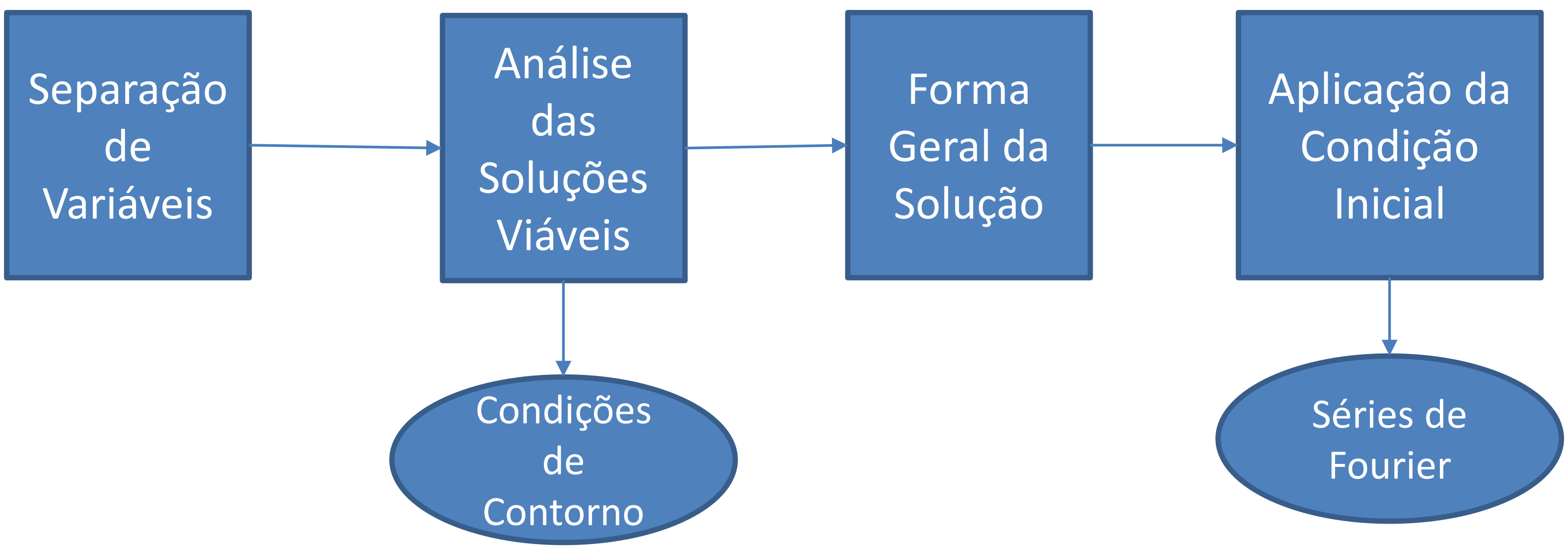
Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$

$$u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0$$



2.1.4 Tabela de Coeficientes de Séries de Fourier

No caso de condições iniciais polinomiais pode-se utilizar a tabela

Coeficientes das Séries de Fourier de Funções Elementares		
$f : [-L, L] \to \mathbb{R},\ -1 \le c < d \le 1$	$a_n(f, L) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt$	$b_n(f, L) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt$
$f_{c,d}^{(0)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0(f_{c,d}^{(0)}, L) = d - c$ $a_n(f_{c,d}^{(0)}, L) = \frac{1}{n\pi}\,\mathrm{sen}\, s\Big\|_{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f_{c,d}^{(0)}, L) = -\frac{1}{n\pi}\cos s\Big\|_{n\pi c}^{n\pi d}$
$f_{c,d}^{(1)}(t) = \begin{cases} t, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0(f_{c,d}^{(1)}, L) = \frac{L}{2}(d^2 - c^2)$ $a_n(f_{c,d}^{(1)}, L) =$ $\frac{L}{n^2\pi^2}(s\,\mathrm{sen}\, s + \cos s)\Big\|_{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f_{c,d}^{(1)}, L) =$ $\frac{L}{n^2\pi^2}(-s\cos s + \mathrm{sen}\, s)\Big\|_{n\pi c}^{n\pi d}$
$f_{c,d}^{(2)}(t) = \begin{cases} t^2, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0(f_{c,d}^{(2)}, L) = \frac{L^2}{3}(d^3 - c^3)$ $a_n(f_{c,d}^{(2)}, L) =$ $\frac{L^2}{n^3\pi^3}\left((s^2 - 2)\,\mathrm{sen}\, s + 2s\cos s\right)\Big\|_{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f_{c,d}^{(2)}, L) =$ $\frac{L^2}{n^3\pi^3}\left(2s\,\mathrm{sen}\, s + (2 - s^2)\cos s\right)\Big\|_{n\pi c}^{n\pi d}$

✓

Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0$$

Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
não-homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2$$

Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
não-homogêneas

MAP2320

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$

$$u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2$$

Considerando a solução para o problema em regime permanente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = C_1 \Rightarrow v(x) = C_1 x + C_2$$

Aplicando as condições de contorno:

$$v(0) = C_2 = T_1$$

$$v(L) = C_1 L + T_1 = T_2 \Rightarrow C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

$$v(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

MAP2320

Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução
(Versão Preliminar)

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

3.1.2 Condições de Fronteira Não Homogêneas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2 \end{cases}$$

Observe que uma função somente de x (derivada parcial em relação a t nula), tal que a segunda derivada (em relação a x) é igual a zero satisfaz a equação do calor. Assim,

$$v(x,t) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right) x$$

satisfaz a equação do calor e as condições de fronteira $u(0,t) = T_1$ e $u(L,t) = T_2$.

O que sugere como solução do problema inicial a função

$$u(x,t) = v(x,t) + u_0(x,t),$$

em que $u_0(x,t)$ é a solução do problema com ı condições homogêneas, ou seja, $$u(x,t) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right)x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}t}.$$

Para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, precisamos que

$$f(x) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right)x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

ou ainda,

$$f(x) - T_1 - \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right)x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $f(x) - T_1 - \left(\frac{T_2-T_1}{L}\right)x$. Assim, pelo Corolário 2.5 na página 184, se a função $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série de Fourier de senos de $f(x) - T_1 - \left(\frac{T_2-T_1}{L}\right)x$ são dados por

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \Big[\underbrace{f(x) - T_1 - \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right)x}_{g(x)}\Big] \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx, \; n = 1,2,3\ldots$$

Observe que

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right) x, \quad \text{para } x \in [0, L]$$

ou seja, quando t tende a mais infinito, a solução $u(x,t)$ tende a solução

$$v(x,t) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right) x$$

chamada **solução estacionária** ou **solução de equilíbrio**. Observe que a solução estacionária é solução do problema

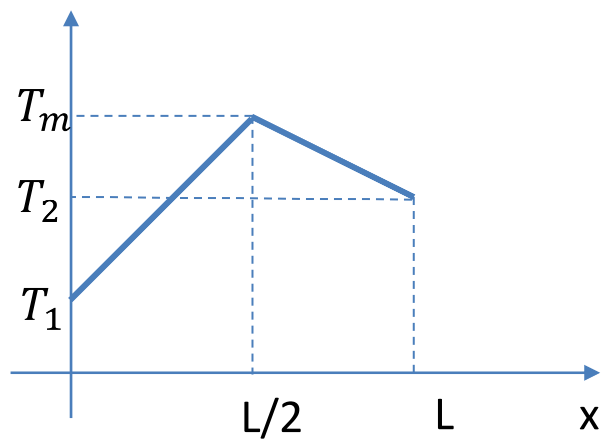
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2 \end{cases}$$

Problema: Encontrar solução para a EDP com as condições de contorno não-homogêneas:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2 \end{cases}$$

com $\alpha = 1$

A condição inicial tem a forma:



E é dada pela relação:

$$f(x) = \begin{cases} T_1 + \dfrac{2(T_m - T_1)x}{L}, & 0 \leq x < L/2 \\ T_m + \dfrac{2(T_2 - T_m)(x - L/2)}{L}, & L/2 \leq x \leq L \end{cases}$$

A solução estacionária é dada por:

$$v(x,t) = T_1 + \frac{(T_2 - T_1)}{L}x$$

A solução do problema transiente é obtida encontrando os coeficientes da série de senos da condições inicial subtraída a solução estacionária

$$g(x) = f(x) - v(x,t)$$

A função g(x) para o problema é dada por:

$$g(x) = \begin{cases} k_1 x, & 0 \leq x < L/2 \\ k_2 x + k_3, & L/2 \leq x \leq L \end{cases}$$

onde

$$k_1 = \frac{2T_m - (T_2 + T_1)}{L}$$

$$k_2 = \frac{2(T_2 - T_m) - (T_2 + T_1)}{L} \qquad k_3 = 2(T_m - T_2) - T_1 - \frac{(T_2 - T_1)}{L}$$

Verifique !

Os coeficientes da série de senos são obtidos fazendo:

$$c_n = 2 * \left[k_1 * b_n\left(f_{0,1/2}^{(1)}, L\right) + k_2 * b_n\left(f_{1/2,1}^{(1)}, L\right) + k_3 * b_n\left(f_{1/2,1}^{(0)}, L\right)\right]$$

Série de senos

Linear no intervalo [0,1/2]

Linear no intervalo [1/2,1]

constante no intervalo [1/2,1]

Identificando as expressões necessárias da tabela:

$$b_n(f_{c,d}^{(0)}, L) = -\frac{1}{n\pi}\cos s\Big|_{n\pi c}^{n\pi d}$$

$$b_n(f_{c,d}^{(1)}, L) = \frac{L}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \operatorname{sen} s\right)\Big|_{n\pi c}^{n\pi d}$$

Calculando os coeficientes

$$b_n\left(f_{0,1/2}^{(1)}, L\right) = \frac{L}{n^2\pi^2}\left[-\frac{n\pi}{2}.\cos\frac{n\pi}{2} + \sin\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$b_n\left(f_{1/2,1}^{(0)}, L\right) = -\frac{1}{n\pi}\left[\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$b_n\left(f_{1/2,1}^{(1)}, L\right) = \frac{L}{n^2\pi^2}\left[-n\pi.\cos n\pi + \frac{n\pi}{2}.\cos\frac{n\pi}{2} - \sin\frac{n\pi}{2}\right]$$

Combinando na expressão para o coeficiente (após as simplificações):

$$c_n = \left[\frac{(k_2 - k_1)L + 2k_3}{n\pi}\right]\cos\frac{n\pi}{2}$$

$$+\left[\frac{2(k_2 + k_1)L}{n^2\pi^2}\right]\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$-\left[\frac{2(k_2L + k_3)}{n\pi}\right]\cos n\pi$$

Existem oportunidades de simplificação para valores ímpares e pares.

A solução é obtida combinado o termo estacionário como o transiente:

$$u(x,t) = T_1 + \frac{(T_2 - T_1)}{L}x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$$

A referência apresenta os resultados com valores numéricos:

Exemplo 3.2. Vamos considerar uma barra de 40 cm de comprimento, isolada nos lados, com coeficiente $\alpha = 1$, com as extremidades mantidas a temperaturas de 10° C e 30° C e tal que a temperatura inicial é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 10 + 2x, & \text{se } 0 \le x < 20 \\ 70 - x, & \text{se } 20 \le x \le 40 \end{cases}$$

Que equivale a: $T_1 = 10$ $T_2 = 30$ $T_m = 50$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 10,\ u(40,t) = 30 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = 10 + \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}$$

em que c_n são os coeficientes da série de senos de

$$g(x) = f(x) - 10 - \frac{x}{2} = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & \text{se } 0 \le x < 20 \\ 60 - \frac{3}{2}x, & \text{se } 20 \le x \le 40 \end{cases}$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} g(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{40}dx = 2\left(\frac{3}{2}b_n(f^{(1)}_{0,1/2}, 40) + 60 b_n(f^{(0)}_{1/2,1}, 40) - \frac{3}{2}b_n(f^{(1)}_{1/2,1}, 40)\right) \\
&= \frac{120}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \text{sen}\,s\right)\Big|_0^{n\pi/2} - \frac{120}{n\pi}\cos s\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - \frac{120}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \text{sen}\,s\right)\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} \\
&= \frac{240}{n^2\pi^2}\left(-\frac{n\pi}{2}\cos(n\pi/2) + \text{sen}(n\pi/2)\right) + \frac{120}{n\pi}\cos(n\pi/2) \\
&= \frac{240\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2},\ n = 1, 2, 3\ldots
\end{aligned}
$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= 10 + \frac{x}{2} + \frac{240}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t} \\ &= 10 + \frac{x}{2} + \frac{240}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{40} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{1600}t} \end{aligned}$$

Observe que

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 10 + \frac{x}{2}, \quad \text{para } x \in [0, L]$$

ou seja, quando t tende a mais infinito a solução tende a solução estacionária

$$v(x,t) = 10 + \frac{x}{2}.$$

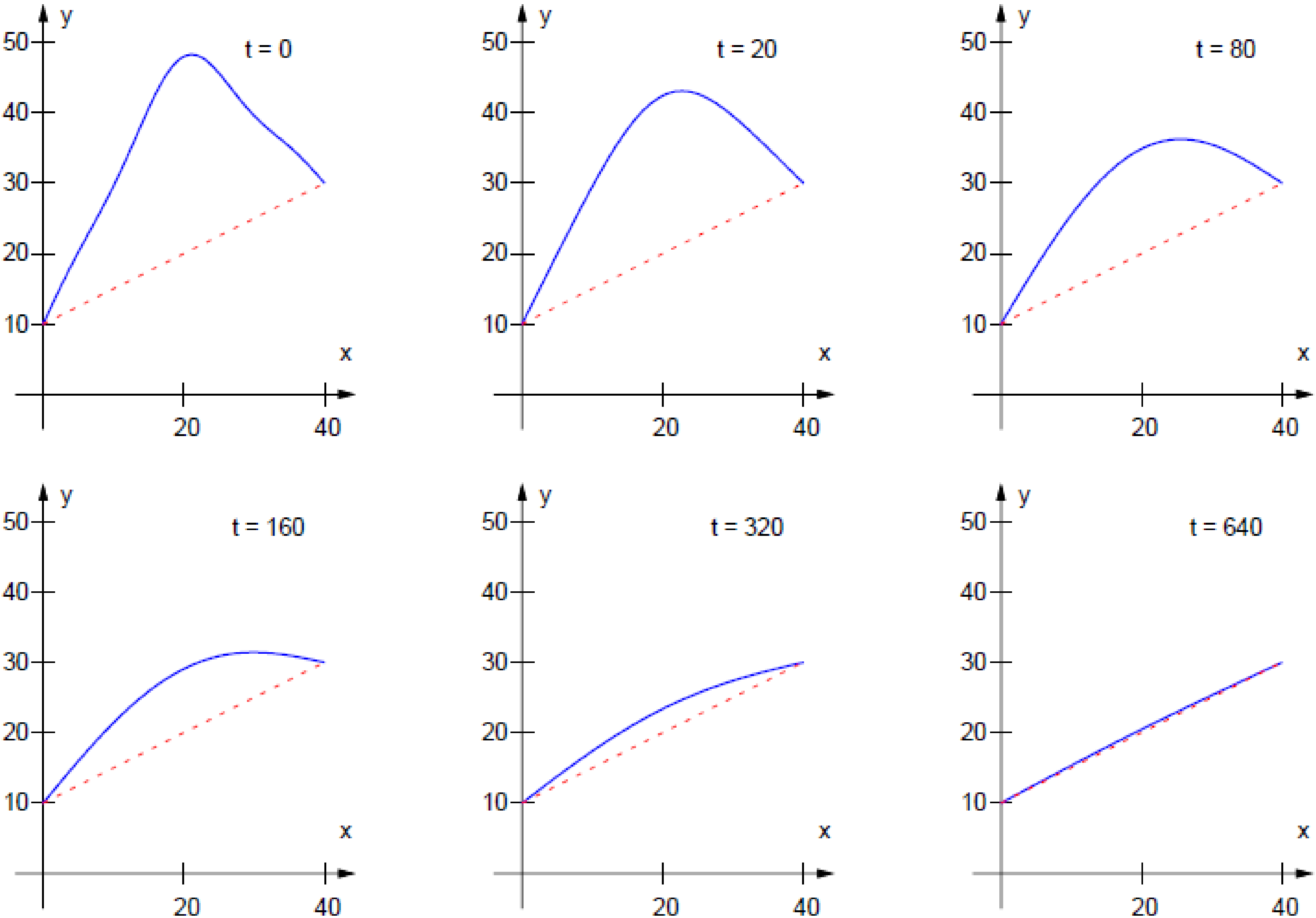


Figura 3.2 – Solução, $u(x,t)$, do PVIF do Exemplo 3.2 tomando apenas 3 termos não nulos da série.

Exercícios

7.1

Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
não-homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$

$$u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2$$

$L = 100$ cm
$T_1 = 10°C$
$T_2 = 20°C$
$T_m = 80°C$

Com condição inicial

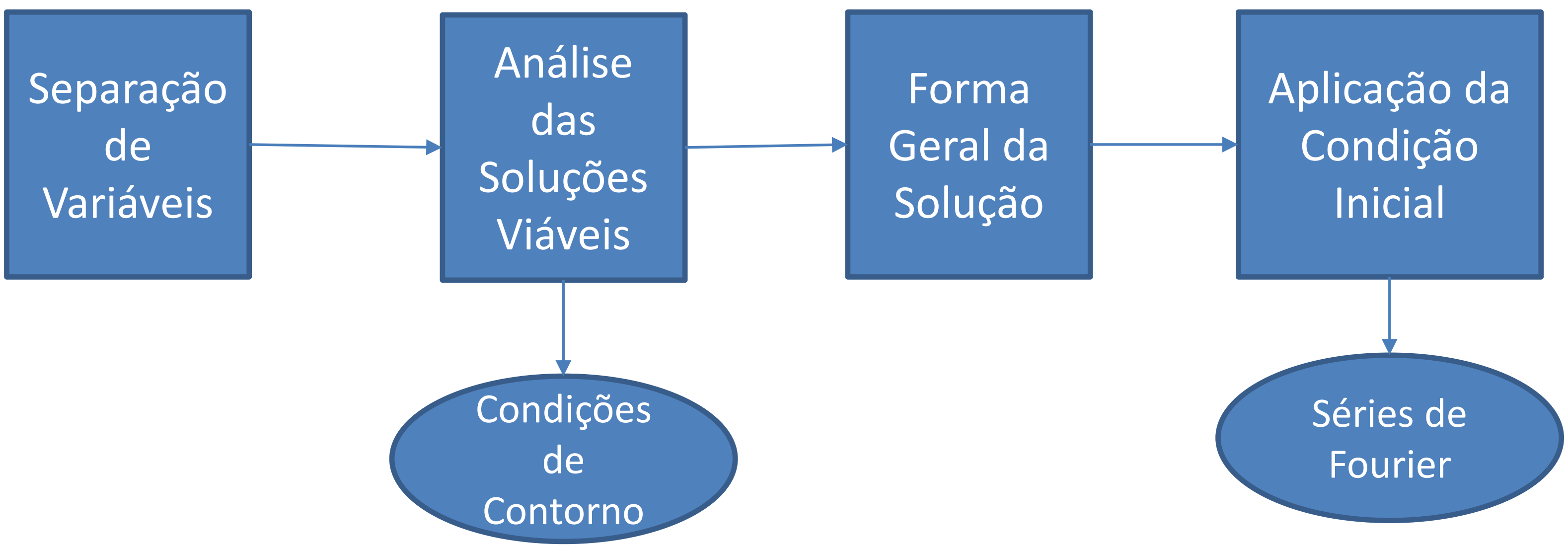
$$f(x) = \begin{cases} T_1, & 0 \le x < L/3 \\ T_m, & L/3 \le x < 2L/3 \\ T_2, & 2L/3 \le x < L \end{cases}$$

Exercícios

7.2

1.3. Resolva o problema de valor inicial e de fronteira usando o método de separação de variáveis

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ \ u(L,t) = 0 \end{cases}$$



Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0$$

Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
não-homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2$$

Problema Homogêneo
C.C. de Neumann
homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

Próxima aula

MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2020

Roteiro do curso

- Introdução
- Séries de Fourier
- Método de Diferenças Finitas
- **Equação do calor transiente (parabólica)**
- Equação de Poisson (elíptica)
- Equação da onda (hiperbólica)