7 de julho de 2020

Exercícios

Duas variáveis aleatórias X e Y independentes possuem as respectivas funções densidades de probabilidades marginais:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} & se\ x \geq \quad 0 \\ 0 & caso\ sontrário \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} & se\ y \geq \quad 0 \\ 0 & caso\ sontrário \end{cases}$$

Qual é o valor de $P(X \geq Y)$?

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} = \frac{1}{6}e^{-\frac{x}{3}}e^{-\frac{y}{2}}$$

$$P(X \geq Y) = \int_0^{+\infty}\int_0^{x}\frac{1}{6}e^{-\frac{x}{3}}e^{-\frac{y}{2}}dy\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{6}e^{-\frac{x}{3}}\int_0^{x}e^{-\frac{y}{2}}dy\,dx =$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{6}e^{-\frac{x}{3}}\left[-2e^{-\frac{y}{2}}\right]_0^{x}dx = \frac{-1}{3}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{3}}\left[e^{-\frac{y}{2}}\right]_0^{x}dx = \frac{-1}{3}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{3}}\left(e^{-\frac{x}{2}}-1\right)dx =$$

$$\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{3}}\left(1-e^{-\frac{x}{2}}\right)dx = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{3}}dx - \frac{1}{3}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{5x}{6}}dx = \frac{1}{3}\left[-3e^{-\frac{x}{3}}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{3}\left[\frac{-6}{5}e^{-\frac{5x}{6}}\right]_0^{+\infty}$$

$$-\left[e^{-\frac{x}{3}}\right]_0^{+\infty} + \frac{2}{5}\left[e^{-\frac{5x}{6}}\right]_0^{+\infty} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

O número de bactérias coliformes no rio Santa Genoveva, no estado do Maranhão, é aleatoriamente distribuído com concentração esperada de 1 por 20cc de água e distribuição de Poisson. Retira-se um tubo contendo 10cc de água. Qual a probabilidade de encontrar exatamente duas bactérias coliformes?

$$\lambda = \frac{1}{20}; t = 10 \rightarrow \mu = \lambda t = \frac{1}{2} \rightarrow P(X = k) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{k!}$$

$$P(X = 2) = \frac{\mu^2 e^{-\mu}}{2!} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{8}$$

No rio São Severino, em Recife, a concentração esperada é de 6 bactérias por 30 cc de água. Suponha que as concentrações são variáveis independentes. Você retira um tubo de 15 cc de água do rio São Severino e um de 10 cc do rio Santa Genoveva. Qual a probabilidade de haver exatamente 2 bactérias coliformes nos 25 cc de água coletados?

Rio Santa Genoveva

$$\lambda = \frac{1}{20}; t = 10 \rightarrow \mu = \lambda t = \frac{1}{2} \rightarrow P(X = k) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{k!}$$

Rio São Severino

$$\lambda = \frac{6}{30}; t = 15 \rightarrow \mu = \lambda t = 3 \rightarrow P(Y = k) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} = 3^k \frac{e^{-3}}{k!}$$

$$P(X + Y = 2) = P(X = 0; Y = 2) + P(X = 1; Y = 1) + P(X = 2; Y = 0)$$

$$P(X = 0)P(Y = 2) + P(X = 1)P(Y = 1) + P(X = 2)P(Y = 0)$$

$$P(X+Y=2)=P(X=0;Y=2)+P(X=1;Y=1)+P(X=2;Y=0)$$

$$=P(X=0)P(Y=2)+P(X=1)P(Y=1)+P(X=2)P(Y=0)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{0!}\times 3^{2}\frac{e^{-3}}{2!}+\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{1!}\times 3^{1}\frac{e^{-3}}{1!}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2!}\times 3^{0}\frac{e^{-3}}{0!}$$

$$e^{-\frac{1}{2}}\times 9\frac{e^{3}}{2}+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\times 3e^{3}+\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}}\times e^{3}=\frac{9}{2}e^{-3,5}+\frac{3}{2}e^{-3,5}+\frac{1}{8}e^{-3,5}$$

$$\frac{36+12+1}{8}e^{-3,5}=\frac{49}{8}e^{-3,5}=6,125\times e^{-3,5}$$

A variável aleatória Y_{100} é obtida a partir da soma de 100 variáveis aleatórias independentes, todas com distribuição uniforme em [a;b] (sou seja, $Y_{100} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$). Uma aproximação para a função densidade de probabilidade de Y_{100} é mostrada na figura ao lado Os valores de a e b são respectivamente iguais a:

a) 2 e 18
b) 7 e 13
c) $1/\sqrt{6\pi}$ e $10 + 1/\sqrt{6\pi}$
d) 9,4 e 10,4
e) 2π e $2\pi + 10$