

RESOLUÇÃO LISTA 3

QUESTÃO 1. Vamos determinar a, b e c .

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - x + 3}{(x^2 + 2)(2x - 1)} &= \frac{ax + b}{x^2 + 2} + \frac{c}{2x - 1} \\ &= \frac{(2x - 1)(ax + b) + c(x^2 + 2)}{(x^2 + 2)(2x - 1)} \\ &= \frac{2ax^2 + 2bx - ax - b + cx^2 + 2c}{(x^2 + 2)(2x - 1)} \\ &= \frac{(2a + c)x^2 + (2b - a)x + (2c - b)}{(x^2 + 2)(2x - 1)}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

multiplicando ambos os membros da equação acima por $(x^2 + 2)(2x - 1)$ obtemos:

$$x^2 - x + 3 = (2a + c)x^2 + (2b - a)x + (2c - b), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Somando $-(x^2 - x + 3)$ em ambos os membros temos:

$$0 = (2a + c)x^2 + (2b - a)x + (2c - b) - (x^2 - x + 3), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

colocando em evidência obtemos:

$$(2a + c - 1)x^2 + (2b - a + 1)x + (2c - b - 3) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}. \quad (1)$$

A equação (1) significa que todo $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ é uma raiz do polinômio de segundo grau $p(x) = (2a + c - 1)x^2 + (2b - a + 1)x + (2c - b - 3)$. Mas da Álgebra sabemos que um polinômio de segundo grau **não-nulo** possui no máximo duas raízes reais. Assim, devemos ter que $p(x)$ é o polinômio nulo, isto é, os coeficientes de x^2 , x e $x^0 = 1$ são zeros:

$$\begin{cases} 2a + c - 1 = 0 \\ 2b - a + 1 = 0 \\ 2c - b - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 0b + c = 1 \\ -a + 2b + 0c = -1 \\ 0a - b + 2c = 3 \end{cases}$$

Vamos resolver o sistema usando o método de escalonamento de Gauss:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right] & \quad L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right] & \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \Leftrightarrow \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right] & \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right] & \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{\frac{9}{4}} & \textcolor{red}{\frac{11}{4}} \end{array} \right] \quad L_3 \leftarrow \textcolor{red}{\frac{4}{9}}L_3 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{\frac{11}{9}} \end{array} \right]$$

Obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + \frac{1}{2}c = \frac{1}{2} \\ b + \frac{1}{4}c = -\frac{1}{4} \\ c = \frac{11}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + \frac{11}{18} = \frac{1}{2} \\ b + \frac{11}{36} = -\frac{1}{4} \\ c = \frac{11}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} - \frac{11}{18} = \frac{9-11}{18} = -\frac{2}{18} = -\frac{1}{9} \\ b = -\frac{1}{4} - \frac{11}{36} = \frac{-9-11}{36} = -\frac{20}{36} = -\frac{5}{9} \\ c = \frac{11}{9} \end{cases}$$

QUESTÃO 2. Seja o sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Vamos encontrar as soluções pelo método de Gauss. Seja a matriz aumentada do sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \textcolor{blue}{L_2} + L_1 \\ L_3 \leftarrow \textcolor{green}{L_3} + L_1 \\ L_4 \leftarrow \textcolor{red}{L_4} - L_1 \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ \textcolor{blue}{0} & \textcolor{blue}{0} & \textcolor{blue}{2} & \textcolor{blue}{-1} & \textcolor{blue}{0} \\ \textcolor{green}{0} & \textcolor{green}{1} & \textcolor{green}{4} & \textcolor{green}{-3} & \textcolor{green}{3} \\ \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{3} & \textcolor{red}{0} \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \textcolor{green}{L_3} \\ L_3 \leftarrow \textcolor{red}{L_4} \\ L_4 \leftarrow \textcolor{blue}{L_2} \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ \textcolor{green}{0} & \textcolor{green}{1} & \textcolor{green}{4} & \textcolor{green}{-3} & \textcolor{green}{3} \\ \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{3} & \textcolor{red}{0} \\ \textcolor{blue}{0} & \textcolor{blue}{0} & \textcolor{blue}{2} & \textcolor{blue}{-1} & \textcolor{blue}{0} \end{array} \right] \quad L_4 \leftarrow \textcolor{blue}{L_4} - 2L_3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ \textcolor{blue}{0} & \textcolor{blue}{0} & \textcolor{blue}{0} & \textcolor{blue}{-7} & \textcolor{blue}{0} \end{array} \right] \quad L_4 \leftarrow -\frac{1}{7}L_4 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ \textcolor{blue}{0} & \textcolor{blue}{0} & \textcolor{blue}{0} & \textcolor{blue}{1} & \textcolor{blue}{0} \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 3 \\ x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 3 = 1 \Rightarrow x_1 = 4 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Portanto, $\boxed{x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = 0 \text{ e } x_4 = 0}$ é a única solução do sistema.

Como todos os elementos $a'_{ii} = 1 \neq 0$, onde $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, podemos aplicar o método Backward Substitution (backstep) no sistema (3) e obter todas as soluções x_i onde $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ver o slide 6 da aula da semana de 20 a 26 de abril. Assim, como obtemos o sistema (3) a partir de operações elementares nas linhas do sistema (2), temos que os dois sistemas são equivalentes e portanto possuem as mesmas soluções.

Portanto, fica provado que o sistema (2) tem solução.

QUESTÃO 4. Seja o sistema

$$\begin{cases} 3x + y - z = a \\ x - y + 2z = b \\ 5x + 3y - 4z = c \end{cases}$$

Vamos determinar a, b e c de modo que o sistema acima seja impossível.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & 2 & b \\ 5 & 3 & -4 & c \end{array} \right] & \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & b \\ 3 & 1 & -1 & a \\ 5 & 3 & -4 & c \end{array} \right] & \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \end{array} \Leftrightarrow \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & b \\ 0 & 4 & -7 & a - 3b \\ 0 & 8 & -14 & c - 5b \end{array} \right] & \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & b \\ 0 & 1 & -\frac{7}{4} & \frac{a - 3b}{4} \\ 0 & 8 & -14 & c - 5b \end{array} \right] & \quad L_3 \leftarrow L_3 - 8L_2 \Leftrightarrow \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & b \\ 0 & 1 & -\frac{7}{4} & \frac{a - 3b}{4} \\ 0 & 0 & 0 & c - 5b - 2(a - 3b) \end{array} \right] \end{aligned}$$

Para que o sistema não tenha solução, basta que $c - 5b - 2(a - 3b) \neq 0$, isto é,

$$c - 5b - 2a + 6b = -2a + b + c \neq 0,$$

ou equivalentemente, $a \neq \frac{b+c}{2}$.

QUESTÃO 5. Sejam $y = ax^2 + bx + c$ e $A = (0, 1)$, $B = (1, 1)$ e $C = (2, 3)$.

Vamos determinar a, b e c para que os pontos A, B e C pertençam a parábola $y = ax^2 + bx + c$.

Substituindo A, B e C em $y = ax^2 + bx + c$ temos:

$$\begin{cases} 1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ 3 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = c \\ 1 = a + b + c \\ 3 = 4a + 2b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ 0 = a + b \\ 2 = 4a + 2b \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 1 \\ a = -b \\ 2 = 4(-b) + 2b \Leftrightarrow 2 = -2b \Leftrightarrow b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Assim, $\boxed{y = x^2 - x + 1}$.