Continuidade

23/11/23 +

Continuidade

Vimos que uma maneira de definir uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ era como uma função

$$\begin{aligned} a: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a(n) := a_n \end{aligned}$$

Dizer que $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ é dizer que os elementos da sequência ficam "todos" arbitrariamente próximos do limite (isto é, $\forall \varepsilon>0$, $|a_n - A| < \varepsilon$) desde que tomemos índices grandes o bastante (isto é, $\forall n \geq N$, onde N depende de ε).

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_n = A \\ a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A \end{cases}$$

Embora o "infinito" não seja um número, é útil pensar que — lidos "a_n converge para A quando n vai para o infinito" — quer dizer que quanto "mais perto do infinito n está", mais perto de A a_n está.

Como ∞ (infinito) não é um número, não escrevemos $|n-\infty|$ para a "distância de n ao infinito" e trocamos essa "ideia" por algo matematicamente preciso, isto é, "n está próximo do ∞" se "n é grande o bastante".

Agora vamos começar a lidar com outro tipo de limites: dada uma função f, agora definida em $\mathbb{R}$ ou em um intervalo $(a,b) \subset \mathbb{R}$, e dado $x_0 \in (a,b)$ queremos definir o que seria

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

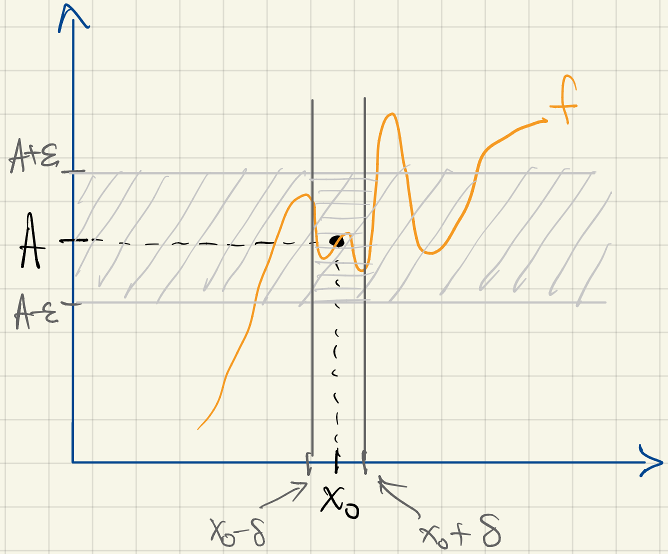
Vamos então imitar o que fizemos anteriormente com $\lim_{n\to\infty} f(n)$: temos que definir matematicamente precisamente a ideia de que $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de A, isto é, tão próximo de A quanto queiramos, isto é, $\forall \varepsilon > 0$, $|f(x) - A| < \varepsilon$, desde que tomemos x próximo o bastante de x_0, isto é, desde que $|x - x_0| < \delta$, onde δ depende de ε.

A definição então é a seguinte. Seja $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ uma função, $x_0 \in (a,b)$ e $A \in \mathbb{R}$. Dizemos que $f(x)$ converge para A quando x tende a x_0, denotado por $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} A$, se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que se } x \in (a,b) \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ então } |f(x) - A| < \varepsilon}$$

Aqui é importante excluir a possibilidade de $x = x_0$ e por isso fazemos $0 < |x - x_0| < \delta$.

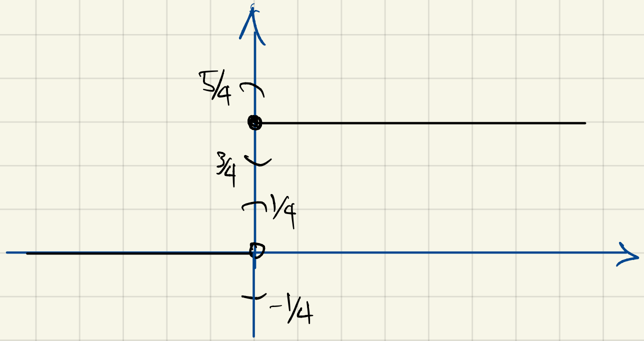
Graficamente, o que $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ quer dizer é



Isto é, todos os valores $f(x)$ estão ε-próximos de A ($|f(x) - A| < \varepsilon$), desde que x esteja δ-próximo de x_0 e seja $\neq x_0$ ($0 < |x - x_0| < \delta$).

Não exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

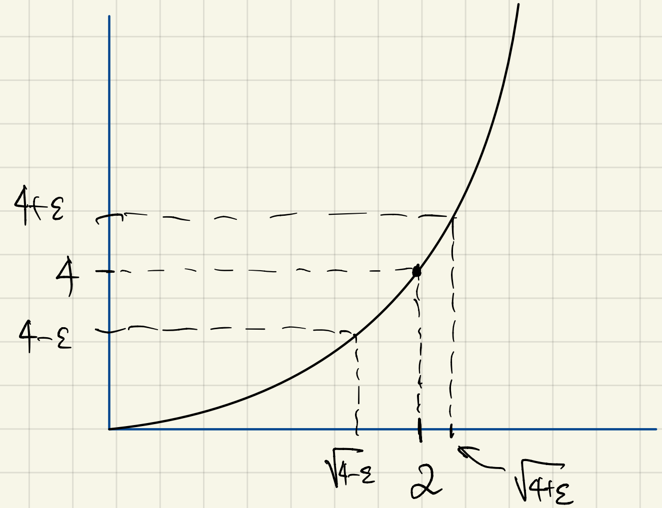


Neste caso, o limite de $f(x)$ para $x \to 0$ não existe. Isso porque, tomando $\varepsilon = 1/4$, por exemplo, se $x < 0$, $f(x) = 0$ e se $x > 0$, $f(x) = 1$ e, portanto, não há nenhum número A tal que $|0 - A| < 1/4$ e $|1 - A| < 1/4$.

<u>Exemplo</u>: $f(x) = x^2$. Então $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$.

Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta > 0$ tal que

$$\text{(i)} \quad 2+\delta < \sqrt{4+\varepsilon} \iff (2+\delta)^2 < 4+\varepsilon$$
$$\text{(ii)} \quad 2-\delta > \sqrt{4-\varepsilon} \iff (2-\delta)^2 > 4-\varepsilon$$



Vejamos por que é possível escolher $\delta > 0$ satisfazendo (i).
Lembre-se que $\varepsilon > 0$ está agora fixado e (i) é equivalente a

$$\cancel{4} + 4\delta + \delta^2 < \cancel{4} + \varepsilon \iff$$

$$4\delta + \delta^2 < \varepsilon$$

Podemos, claro, supor que $\delta < 1$ e assim, $\delta^2 < \delta$. Assim, se escolhemos $0 < \delta < 1$ tal que $5\delta < \varepsilon$, ou $\delta < \varepsilon/5$, as desigualdades acima são verificadas e concluímos que (i) vale.

Para verificar (ii), temos, analogamente, que encontrar $\delta > 0$ tal que $\cancel{4} - 4\delta + \delta^2 > \cancel{4} - \varepsilon \iff 4\delta - \delta^2 < \varepsilon$.

Mas se tomamos $\delta > 0$ tal que $4\delta < \varepsilon$, isto é, $\delta < \varepsilon/4$, então obviamente $4\delta - \delta^2 < \varepsilon$ e, novamente fazendo o caminho de volta, concluímos que (ii) vale.

A conclusão é que se tomamos $\delta > 0$ tal que

e (b) ⇒ (c) nesse caso, então (c) é desnecessário aqui

(a) $\delta < 1$ (b) $\delta < \varepsilon/5$ e (c) $\delta < \varepsilon/4$

então as desigualdades (i) e (ii) valem e portanto se

$$|x-2| < \delta \iff 2-\delta < x < 2+\delta \implies (\text{como } f(x) = x^2 \text{ é crescente})$$

$$4-\varepsilon < (2-\delta)^2 < f(x) < (2+\delta)^2 < 4+\varepsilon \iff |f(x)-4| < \varepsilon \quad \square$$

E aqui aconteceu algo interessante: mostramos que $\lim_{x\to 2} x^2 = 4 = 2^2$, isto é, $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$. Como vimos no não-exemplo anterior, isso nem sempre acontece e é uma propriedade extremamente importante: dizemos que uma função $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $x_0 \in (a,b)$ se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ isto é, se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } |x-x_0| < \delta \implies |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon}$$