

# Transições de fase em sistemas fora do equilíbrio

Prof. Carlos E. Fiore

October 20, 2020

# Uma motivação: “Peixes de Ising”

- Exemplos anteriores  $\rightarrow$  sistemas que apresentam  $T, p, H, U, F, S \rightarrow$  transição de fase  $\rightarrow$  uma Hamiltoniana do tipo  $\mathcal{H} = -J \sum_i \sigma_i \sigma_j$  (modelo de Ising) ou  $\mathcal{H} = -\epsilon \sum_i \eta_i \eta_j$  (modelo gás de rede) sendo  $\sigma_i = \pm 1$  e  $\eta_i = 0, 1$ ;
- Transições de fase ocorrem em diversos sistemas que não estão em equilíbrio termodinâmico  $\rightarrow$  quantidades acima não são conhecidas á priori;
- Um primeiro exemplo  $\rightarrow$  movimento de certos cardumes de peixes;



- Por simplicidade consideramos  $\rightarrow$  peixes movimentando-se apenas para o norte e sul, respectivamente;
- Fração de peixes  $\rightarrow \frac{dm}{dt} = (a - a_c)m - bm^3 + \dots \rightarrow$  no estado estacionário  $\frac{dm}{dt} = 0$ ;
- Para  $a < a_c \rightarrow m = \pm \sqrt{\frac{a - a_c}{b}}$
- Transição de fases ordem-desordem ocorre em  $a = a_c$  e  $b > 0$ ;
- Para  $a > a_c \rightarrow m = 0$ ;

- Processos Markovianos descritos por uma equação mestra;
- $\frac{d}{dt}P_n(t) = \sum_{m \neq n} \{W_{m \rightarrow n}P(m, t) - W_{n \rightarrow m}P(n, t)\};$
- Estado estacionário  $\rightarrow \frac{d}{dt}P_n(t) = 0;$
- $W_{m \rightarrow n}P(m, t) = W_{n \rightarrow m}P(n, t) \rightarrow$  balanço detalhado  $\rightarrow P_n = e^{-\beta H_n} / Z;$
- $\sum_{m \neq n} \{W_{m \rightarrow n}P(m, t) - W_{n \rightarrow m}P(n, t)\} = 0 \rightarrow$  distribuição de probabilidades de não equilíbrio  $\rightarrow$  não são conhecidas na maioria dos casos  $\rightarrow$  estudo a partir da dinâmica;

# Fundamentação Teórica

- Processos Markovianos descritos por uma equação mestra;
- $\frac{d}{dt}P_n(t) = \sum_{m \neq n} \{W_{m \rightarrow n}P(m, t) - W_{n \rightarrow m}P(n, t)\};$
- Estado estacionário  $\rightarrow \frac{d}{dt}P_n(t) = 0;$
- $W_{m \rightarrow n}P(m, t) = W_{n \rightarrow m}P(n, t) \rightarrow$  balanço detalhado  $\rightarrow P_n = e^{-\beta H_n} / Z;$
- $\sum_{m \neq n} \{W_{m \rightarrow n}P(m, t) - W_{n \rightarrow m}P(n, t)\} = 0 \rightarrow$  distribuição de probabilidades de não equilíbrio  $\rightarrow$  não são conhecidas na maioria dos casos  $\rightarrow$  estudo a partir da dinâmica;

# Fundamentação Teórica

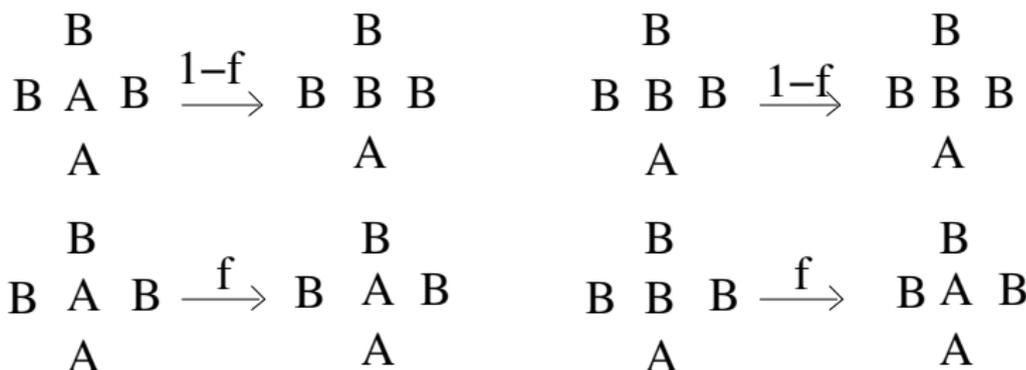
- Processos Markovianos descritos por uma equação mestra;
- $\frac{d}{dt}P_n(t) = \sum_{m \neq n} \{W_{m \rightarrow n}P(m, t) - W_{n \rightarrow m}P(n, t)\};$
- Estado estacionário  $\rightarrow \frac{d}{dt}P_n(t) = 0;$
- $W_{m \rightarrow n}P(m, t) = W_{n \rightarrow m}P(n, t) \rightarrow$  balanço detalhado  $\rightarrow P_n = e^{-\beta H_n} / Z;$
- $\sum_{m \neq n} \{W_{m \rightarrow n}P(m, t) - W_{n \rightarrow m}P(n, t)\} = 0 \rightarrow$  distribuição de probabilidades de não equilíbrio  $\rightarrow$  não são conhecidas na maioria dos casos  $\rightarrow$  estudo a partir da dinâmica;

# Fundamentação Teórica

- Processos Markovianos descritos por uma equação mestra;
- $\frac{d}{dt}P_n(t) = \sum_{m \neq n} \{W_{m \rightarrow n}P(m, t) - W_{n \rightarrow m}P(n, t)\};$
- Estado estacionário  $\rightarrow \frac{d}{dt}P_n(t) = 0;$
- $W_{m \rightarrow n}P(m, t) = W_{n \rightarrow m}P(n, t) \rightarrow$  balanço detalhado  $\rightarrow P_n = e^{-\beta H_n} / Z;$
- $\sum_{m \neq n} \{W_{m \rightarrow n}P(m, t) - W_{n \rightarrow m}P(n, t)\} = 0 \rightarrow$  distribuição de probabilidades de não equilíbrio  $\rightarrow$  não são conhecidas na maioria dos casos  $\rightarrow$  estudo a partir da dinâmica;

# Outras aplicações-modelo do votante majoritário

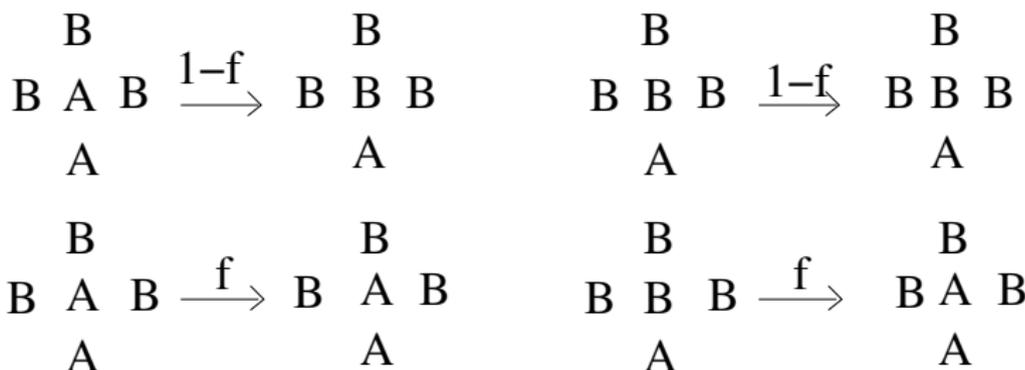
- Indivíduos de uma comunidade formam sua opinião de acordo com o que pensam seus vizinhos → indivíduos receptivos e hesitantes → agem a favor ou contra a opinião da maioria, respectivamente;
- Modelo simples para formação de uma opinião  $\sigma_i = \pm 1$  → a favor ou contra uma certa opinião, respectivamente;



- Sistema acima → transição de fases com características semelhantes aos exemplos anteriores;
- Fração de indivíduos favoráveis a uma opinião →  $m = \frac{1}{N}(N_+ - N_-)$ ;

# Outras aplicações-modelo do votante majoritário

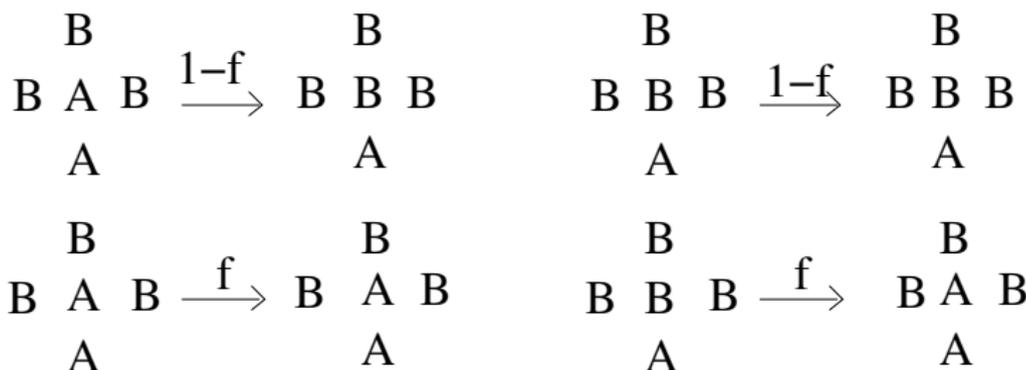
- Indivíduos de uma comunidade formam sua opinião de acordo com o que pensam seus vizinhos  $\rightarrow$  indivíduos receptivos e hesitantes  $\rightarrow$  agem a favor ou contra a opinião da maioria, respectivamente;
- Modelo simples para formação de uma opinião  $\sigma_i = \pm 1 \rightarrow$  a favor ou contra uma certa opinião, respectivamente;



- Sistema acima  $\rightarrow$  transição de fases com características semelhantes aos exemplos anteriores;
- Fração de indivíduos favoráveis a uma opinião  $\rightarrow m = \frac{1}{N}(N_+ - N_-)$ ;

# Outras aplicações-modelo do votante majoritário

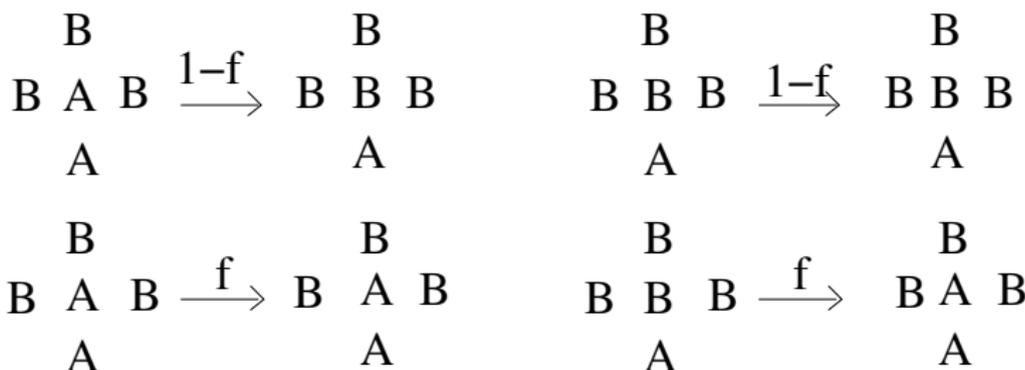
- Indivíduos de uma comunidade formam sua opinião de acordo com o que pensam seus vizinhos  $\rightarrow$  indivíduos receptivos e hesitantes  $\rightarrow$  agem a favor ou contra a opinião da maioria, respectivamente;
- Modelo simples para formação de uma opinião  $\sigma_i = \pm 1 \rightarrow$  a favor ou contra uma certa opinião, respectivamente;



- Sistema acima  $\rightarrow$  transição de fases com características semelhantes aos exemplos anteriores;
- Fração de indivíduos favoráveis a uma opinião  $\rightarrow m = \frac{1}{N}(N_+ - N_-)$ ;

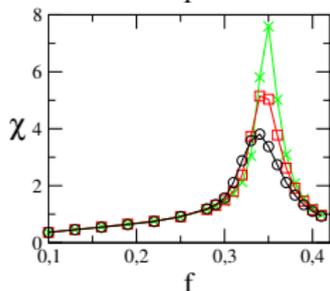
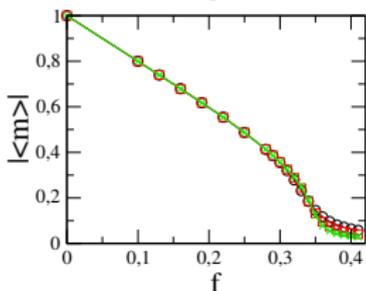
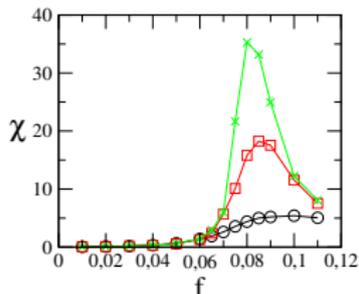
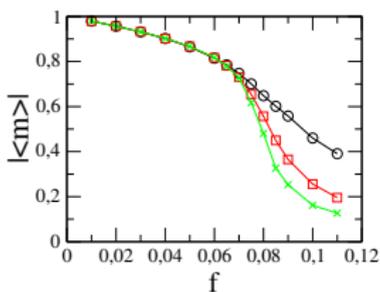
# Outras aplicações-modelo do votante majoritário

- Indivíduos de uma comunidade formam sua opinião de acordo com o que pensam seus vizinhos  $\rightarrow$  indivíduos receptivos e hesitantes  $\rightarrow$  agem a favor ou contra a opinião da maioria, respectivamente;
- Modelo simples para formação de uma opinião  $\sigma_i = \pm 1 \rightarrow$  a favor ou contra uma certa opinião, respectivamente;



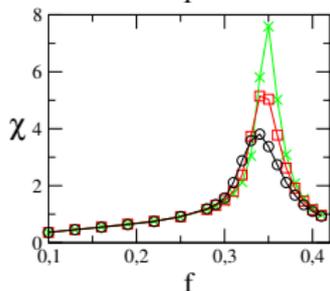
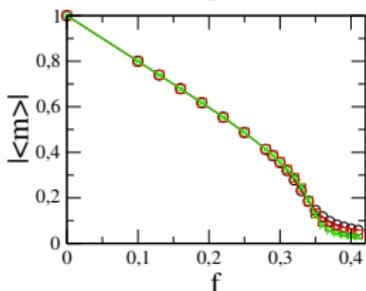
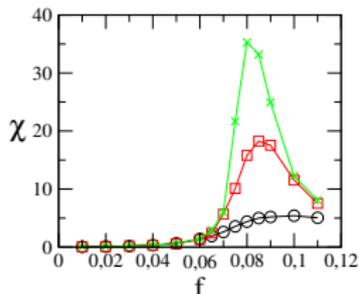
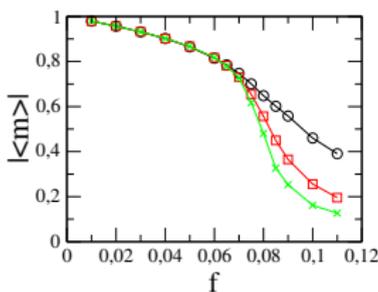
- Sistema acima  $\rightarrow$  transição de fases com características semelhantes aos exemplos anteriores;
- Fração de indivíduos favoráveis a uma opinião  $\rightarrow m = \frac{1}{N}(N_+ - N_-)$ ;

- Se a probabilidade de “hesitação”  $f$  for pequena  $\rightarrow$  a maioria dos indivíduos formarão sua opinião de acordo com o que pensa a maioria  $\rightarrow$  haverá predominância de uma opinião ( $m \neq 0$ );
- À medida que  $f$  aumenta  $\rightarrow$  hesitação aumenta  $\rightarrow$  não haverá predominância de uma opinião ( $m = 0$ )  $\rightarrow$  transição de fases é esperada num valor “limite”  $f_c$ ;
- Resultados para a rede quadrada e para uma rede complexa de Erdős-Renyi <sup>1</sup>  $\rightarrow$  mesmos expoentes críticos do modelo de Ising;



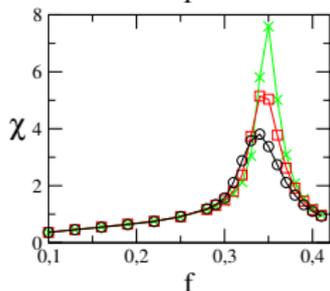
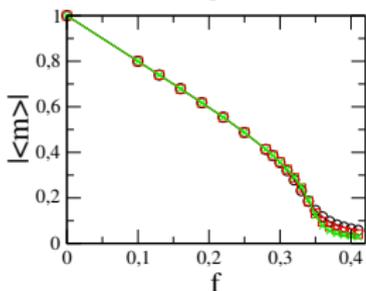
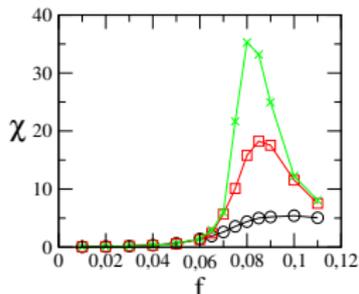
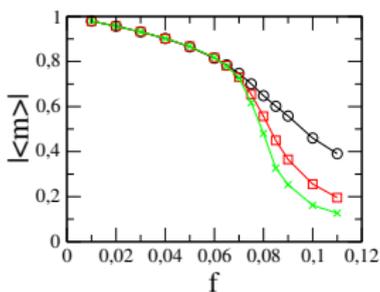
<sup>1</sup>M. J. de Oliveira, J. Stat. Phys. **66**, 273 (1992); L. F. C. Pereira et al. Phys. Rev. E **71**, 016123 (2005).

- Se a probabilidade de “hesitação”  $f$  for pequena  $\rightarrow$  a maioria dos indivíduos formarão sua opinião de acordo com o que pensa a maioria  $\rightarrow$  haverá predominância de uma opinião ( $m \neq 0$ );
- À medida que  $f$  aumenta  $\rightarrow$  hesitação aumenta  $\rightarrow$  não haverá predominância de uma opinião ( $m = 0$ )  $\rightarrow$  transição de fases é esperada num valor “limite”  $f_c$ ;
- Resultados para a rede quadrada e para uma rede complexa de Erdős-Renyi <sup>1</sup>  $\rightarrow$  mesmos expoentes críticos do modelo de Ising;



<sup>1</sup>M. J. de Oliveira, J. Stat. Phys. **66**, 273 (1992); L. F. C. Pereira et al. Phys. Rev. E **71**, 016123 (2005).

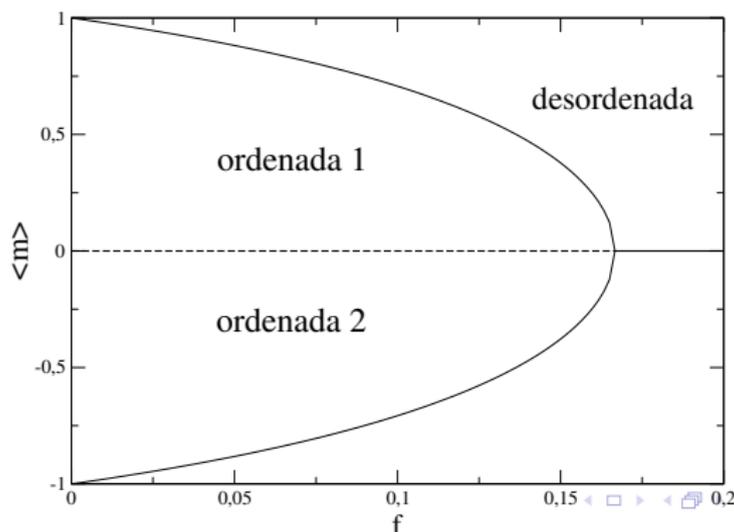
- Se a probabilidade de “hesitação”  $f$  for pequena  $\rightarrow$  a maioria dos indivíduos formarão sua opinião de acordo com o que pensa a maioria  $\rightarrow$  haverá predominância de uma opinião ( $m \neq 0$ );
- À medida que  $f$  aumenta  $\rightarrow$  hesitação aumenta  $\rightarrow$  não haverá predominância de uma opinião ( $m = 0$ )  $\rightarrow$  transição de fases é esperada num valor “limite”  $f_c$ ;
- Resultados para a rede quadrada e para uma rede complexa de Erdős-Renyi <sup>1</sup>  $\rightarrow$  mesmos expoentes críticos do modelo de Ising;



<sup>1</sup>M. J. de Oliveira, J. Stat. Phys. **66**, 273 (1992); L. F. C. Pereira et al. Phys. Rev. E **71**, 016123 (2005).

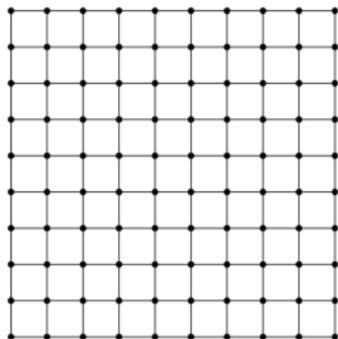
# Tratamento matemático aproximado

- A partir da equação mestra e desprezando correlações, a evolução temporal de  $\langle m \rangle$  é aproximadamente dada por  $\frac{d\langle m \rangle}{dt} = (1 - 6f)\langle m \rangle - (1 - 2f)\langle m \rangle^3$ ;
- No estado estacionário  $\rightarrow \frac{d\langle m \rangle}{dt} = 0$ ;
- Uma solução  $\langle m \rangle = 0 \rightarrow$  fase desordenada (sem predomínio de uma opinião);
- $\langle m \rangle = \pm \sqrt{\frac{1-6f}{1-2f}}$   $\rightarrow$  fase ordenada (predomínio de uma opinião)  $\rightarrow$  transição de fase ocorre em  $f_c = 1/6$ ;



# Transições descontínuas-Possíveis ingredientes mínimos

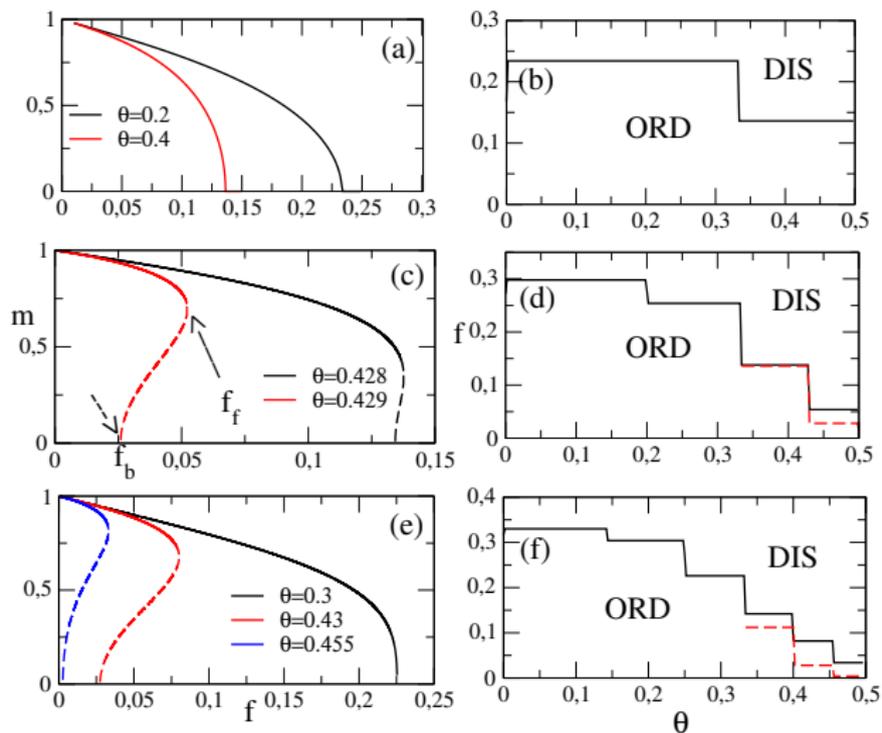
- $\frac{d}{dt}m = am - bm^3 + cm^5$  ( $c > 0$ )  $\rightarrow$  salto de  $\pm\sqrt{b/2c}$  em  $m$  ocorre em  $a = \frac{b^2}{4c}$ ;
- Acrescenta-se um termo dependente do spin local  $\rightarrow$  inércia  $\rightarrow$  transição descontínua <sup>2</sup>;
- Redes regulares e complexas levam à mesmas conclusões?



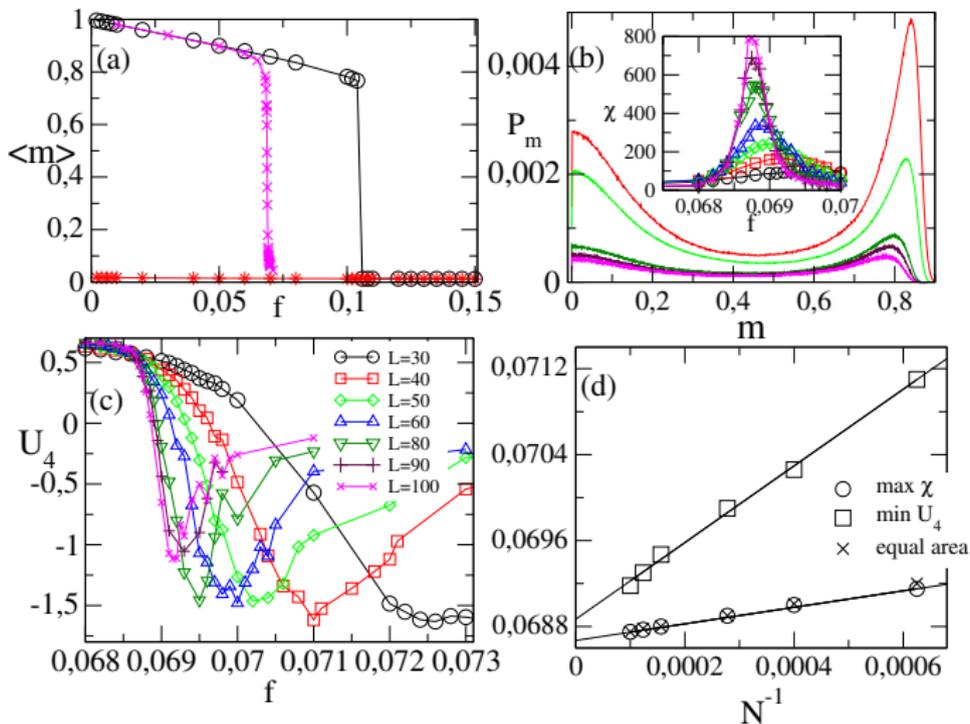
---

<sup>2</sup>H. Chen et al., Phys. Rev. E **95**, 042304 (2017); P. Harunari, M. M. de Oliveira e C. E. Fiore, Phys. Rev. E **96**, 042305 (2017), J. M. Encinas, et al. Sci. Rep. **8**, 9338 (2018).

# Resultados de campo médio



# Redes regulares $\times$ Redes complejas <sup>3</sup>



<sup>3</sup>J. M. Encinas, et al. Sci. Rep. **8**, 9338 (2018).

# Teoria fenomenológica para transições descontínuas

- Próximo à coexistência de fases → soma de duas gaussianas independentes

$$P_N(m) = P_N^{(o)}(m) + P_N^{(d)}(m) \text{ com cada } P_N^{(\sigma)}(m) = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp[N\{(\Delta f)m - (m - m_\sigma)^2 / (2\chi_\sigma)\}]}{[F_o(\Delta f; N) + F_d(\Delta f; N)]},$$

- Para o máximo da variância ou posição de áreas iguais →  $f_N \approx f_0 + \frac{\ln[\chi_d/\chi_o]}{2(m_o - m_d)} \frac{1}{N}$ ;
- Para o  $U_2 = \frac{\langle m^2 \rangle}{\langle m \rangle^2} \rightarrow f_N \approx f_0 + \frac{1}{2N} \frac{\ln[\chi_D/\chi_o] + 2 \ln[m_d/m_o]}{(m_o - m_d)}$ .<sup>4</sup>;

---

<sup>4</sup>M. M. de Oliveira, M. G. E. da Luz e C. E. Fiore, Phys. Rev. E **92**, 062126 (2015),  
Phys. Rev. E **97**, 060101 (R) (2018).

# Teoria fenomenológica para transições descontínuas

- Próximo à coexistência de fases  $\rightarrow$  soma de duas gaussianas independentes

$$P_N(m) = P_N^{(o)}(m) + P_N^{(d)}(m) \text{ com cada } P_N^{(\sigma)}(m) = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp[N\{(\Delta f)m - (m - m_\sigma)^2 / (2\chi_\sigma)\}]}{[F_o(\Delta f; N) + F_d(\Delta f; N)]},$$

- Para o máximo da variância ou posição de áreas iguais  $\rightarrow f_N \approx f_0 + \frac{\ln[\chi_d/\chi_o]}{2(m_o - m_d)} \frac{1}{N}$ ;
- Para o  $U_2 = \frac{\langle m^2 \rangle}{\langle m \rangle^2} \rightarrow f_N \approx f_0 + \frac{1}{2N} \frac{\ln[\chi_D/\chi_o] + 2 \ln[m_d/m_o]}{(m_o - m_d)}$ .<sup>4</sup>;

---

<sup>4</sup>M. M. de Oliveira, M. G. E. da Luz e C. E. Fiore, Phys. Rev. E **92**, 062126 (2015),  
Phys. Rev. E **97**, 060101 (R) (2018).

# Teoria fenomenológica para transições descontínuas

- Próximo à coexistência de fases  $\rightarrow$  soma de duas gaussianas independentes

$$P_N(m) = P_N^{(o)}(m) + P_N^{(d)}(m) \text{ com cada } P_N^{(\sigma)}(m) = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp[N\{(\Delta f)m - (m - m_\sigma)^2 / (2\chi_\sigma)\}]}{[F_o(\Delta f; N) + F_d(\Delta f; N)]},$$

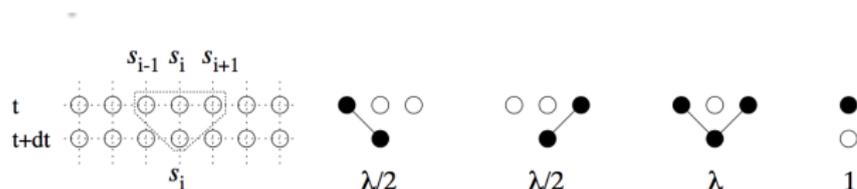
- Para o máximo da variância ou posição de áreas iguais  $\rightarrow f_N \approx f_0 + \frac{\ln[\chi_d/\chi_o]}{2(m_o - m_d)} \frac{1}{N}$ ;
- Para o  $U_2 = \frac{\langle m^2 \rangle}{\langle m \rangle^2} \rightarrow f_N \approx f_0 + \frac{1}{2N} \frac{\ln[\chi_D/\chi_o] + 2 \ln[m_d/m_o]}{(m_o - m_d)}$ .<sup>4</sup>;

---

<sup>4</sup>M. M. de Oliveira, M. G. E. da Luz e C. E. Fiore, Phys. Rev. E **92**, 062126 (2015), Phys. Rev. E **97**, 060101 (R) (2018).

# Processo de contato

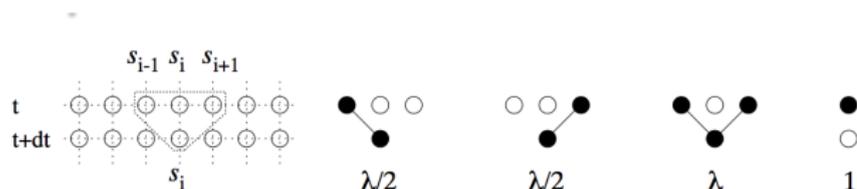
- Em todos exemplos anteriores → transição do tipo ordem-desordem → quebra espontânea de simetria;
- Uma comunidade formada por indivíduos sadios e infectados por uma dada doença (gripe por exemplo);
- Uma pessoa sadia → infectada → taxa de infecção e da “quantidade” de exposição;
- No caso de uma doença como a gripe → cura espontânea;



- Contaminação catalítica e recuperação espontânea;
- Para taxas de infecção  $\lambda$  pequenas → sem propagação da epidemia;
- $\lambda$  alto → epidemia se “espalha” → uma transição de fase é esperada numa taxa de transmissão  $\lambda_c$ ;

# Processo de contato

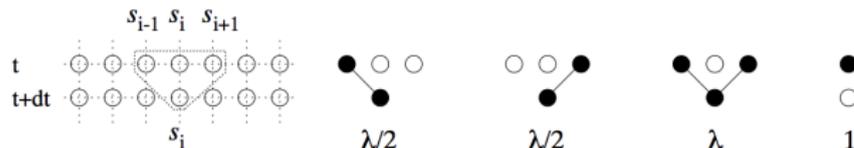
- Em todos exemplos anteriores → transição do tipo ordem-desordem → quebra espontânea de simetria;
- Uma comunidade formada por indivíduos sadios e infectados por uma dada doença (gripe por exemplo);
- Uma pessoa sadia → infectada → taxa de infecção e da “quantidade” de exposição;
- No caso de uma doença como a gripe → cura espontânea;



- Contaminação catalítica e recuperação espontânea;
- Para taxas de infecção  $\lambda$  pequenas → sem propagação da epidemia;
- $\lambda$  alto → epidemia se “espalha” → uma transição de fase é esperada numa taxa de transmissão  $\lambda_c$ ;

# Processo de contato

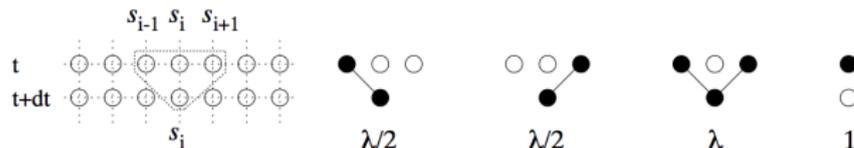
- Em todos exemplos anteriores → transição do tipo ordem-desordem → quebra espontânea de simetria;
- Uma comunidade formada por indivíduos sadios e infectados por uma dada doença (gripe por exemplo);
- Uma pessoa sadia → infectada → taxa de infecção e da “quantidade” de exposição;
- No caso de uma doença como a gripe → cura espontânea;



- Contaminação catalítica e recuperação espontânea;
- Para taxas de infecção  $\lambda$  pequenas → sem propagação da epidemia;
- $\lambda$  alto → epidemia se “espalha” → uma transição de fase é esperada numa taxa de transmissão  $\lambda_c$ ;

# Processo de contato

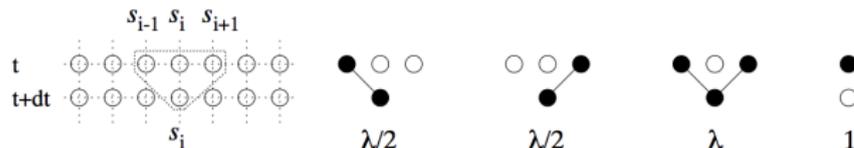
- Em todos exemplos anteriores → transição do tipo ordem-desordem → quebra espontânea de simetria;
- Uma comunidade formada por indivíduos sadios e infectados por uma dada doença (gripe por exemplo);
- Uma pessoa sadia → infectada → taxa de infecção e da “quantidade” de exposição;
- No caso de uma doença como a gripe → cura espontânea;



- Contaminação catalítica e recuperação espontânea;
- Para taxas de infecção  $\lambda$  pequenas → sem propagação da epidemia;
- $\lambda$  alto → epidemia se “espalha” → uma transição de fase é esperada numa taxa de transmissão  $\lambda_c$ ;

# Processo de contato

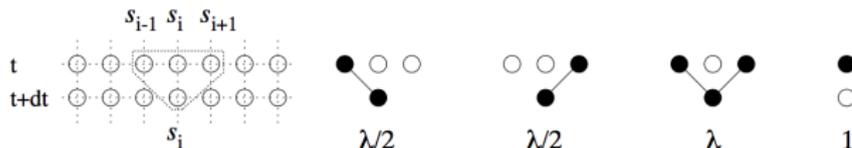
- Em todos exemplos anteriores → transição do tipo ordem-desordem → quebra espontânea de simetria;
- Uma comunidade formada por indivíduos sadios e infectados por uma dada doença (gripe por exemplo);
- Uma pessoa sadia → infectada → taxa de infecção e da “quantidade” de exposição;
- No caso de uma doença como a gripe → cura espontânea;



- Contaminação catalítica e recuperação espontânea;
- Para taxas de infecção  $\lambda$  pequenas → sem propagação da epidemia;
- $\lambda$  alto → epidemia se “espalha” → uma transição de fase é esperada numa taxa de transmissão  $\lambda_c$ ;

# Processo de contato

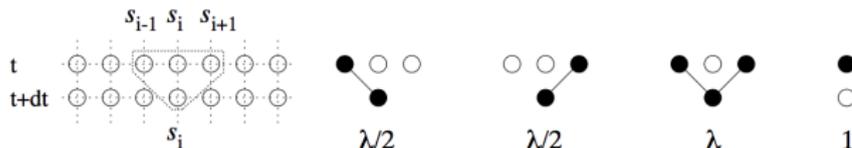
- Em todos exemplos anteriores → transição do tipo ordem-desordem → quebra espontânea de simetria;
- Uma comunidade formada por indivíduos sadios e infectados por uma dada doença (gripe por exemplo);
- Uma pessoa sadia → infectada → taxa de infecção e da “quantidade” de exposição;
- No caso de uma doença como a gripe → cura espontânea;



- Contaminação catalítica e recuperação espontânea;
- Para taxas de infecção  $\lambda$  pequenas → sem propagação da epidemia;
- $\lambda$  alto → epidemia se “espalha” → uma transição de fase é esperada numa taxa de transmissão  $\lambda_c$ ;

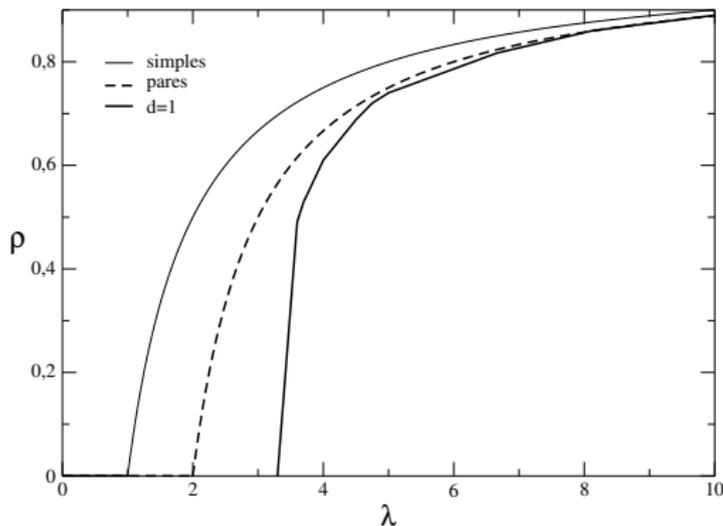
# Processo de contato

- Em todos exemplos anteriores → transição do tipo ordem-desordem → quebra espontânea de simetria;
- Uma comunidade formada por indivíduos sadios e infectados por uma dada doença (gripe por exemplo);
- Uma pessoa sadia → infectada → taxa de infecção e da “quantidade” de exposição;
- No caso de uma doença como a gripe → cura espontânea;

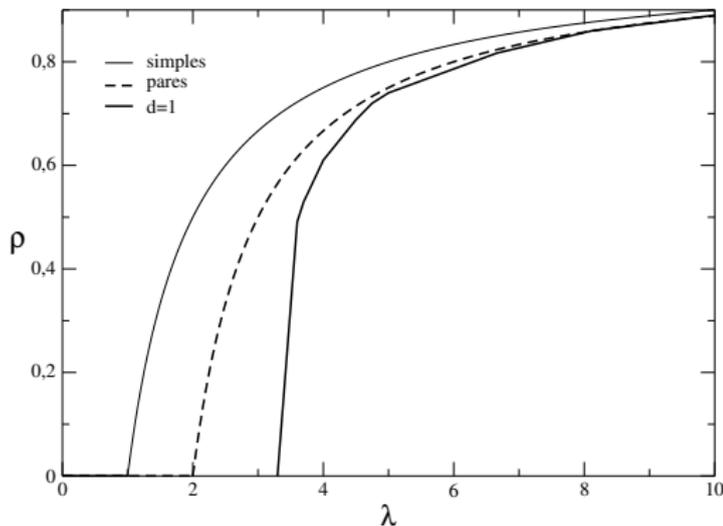


- Contaminação catalítica e recuperação espontânea;
- Para taxas de infecção  $\lambda$  pequenas → sem propagação da epidemia;
- $\lambda$  alto → epidemia se “espalha” → uma transição de fase é esperada numa taxa de transmissão  $\lambda_c$ ;

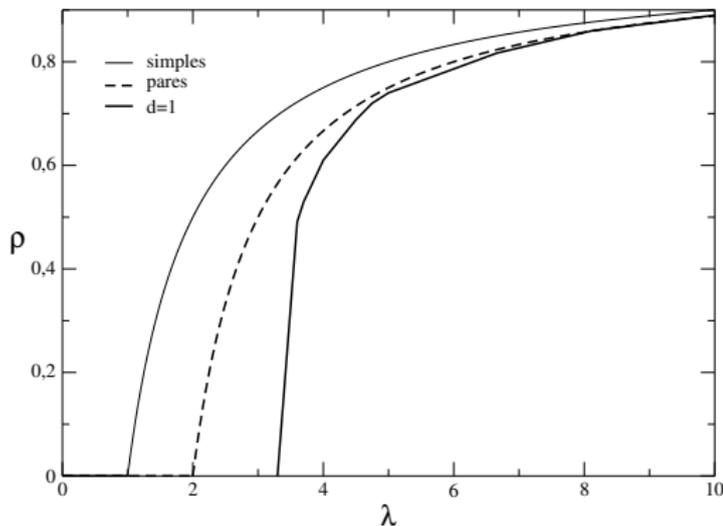
- **Parâmetro de ordem** → densidade de pessoas infectadas;
- $\rho = 0$  na fase sem atividade (inativa) e  $\rho \neq 0$  na fase com atividade (ativa);
- A evolução temporal da densidade de infectados é dada por  $\frac{d\rho}{dt}P(1) = \lambda P(01) - P(1)$ , onde  $\rho = P(1)$ ;
- Forma aproximada →  $\frac{d\rho}{dt} = (\lambda - 1)\rho - \lambda\rho^2$ ;
- $\rho(t) = \frac{\lambda-1}{\lambda - e^{-(\lambda-1)t}}$ , onde por simplicidade  $\rho(0) = 1$ ;
- Para  $\lambda < 1 \rightarrow \rho(t \rightarrow \infty) \sim e^{-(1-\lambda)t} \rightarrow$  fase inativa;
- Para  $\lambda > 1 \rightarrow \rho(t \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{\lambda-1}{\lambda} \rightarrow$  fase ativa;



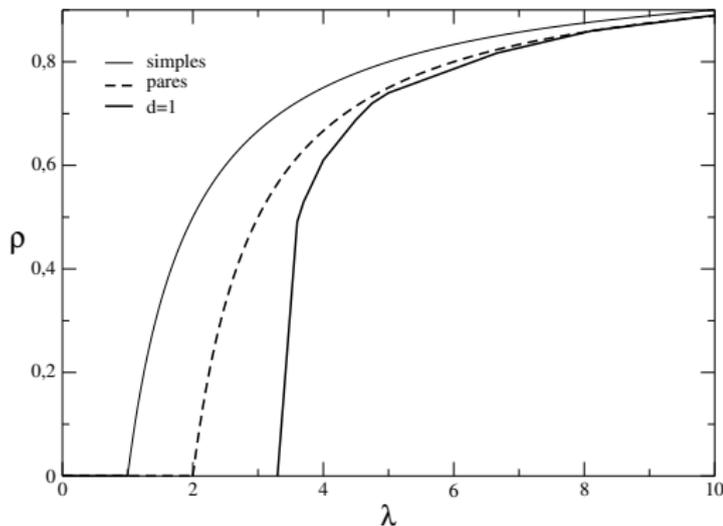
- Parâmetro de ordem  $\rightarrow$  densidade de pessoas infectadas;
- $\rho = 0$  na fase sem atividade (inativa) e  $\rho \neq 0$  na fase com atividade (ativa);
- A evolução temporal da densidade de infectados é dada por  $\frac{d}{dt}P(1) = \lambda P(01) - P(1)$ , onde  $\rho = P(1)$ ;
- Forma aproximada  $\rightarrow \frac{d\rho}{dt} = (\lambda - 1)\rho - \lambda\rho^2$ ;
- $\rho(t) = \frac{\lambda-1}{\lambda - e^{-(\lambda-1)t}}$ , onde por simplicidade  $\rho(0) = 1$ ;
- Para  $\lambda < 1 \rightarrow \rho(t \rightarrow \infty) \sim e^{-(1-\lambda)t} \rightarrow$  fase inativa;
- Para  $\lambda > 1 \rightarrow \rho(t \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{\lambda-1}{\lambda} \rightarrow$  fase ativa;



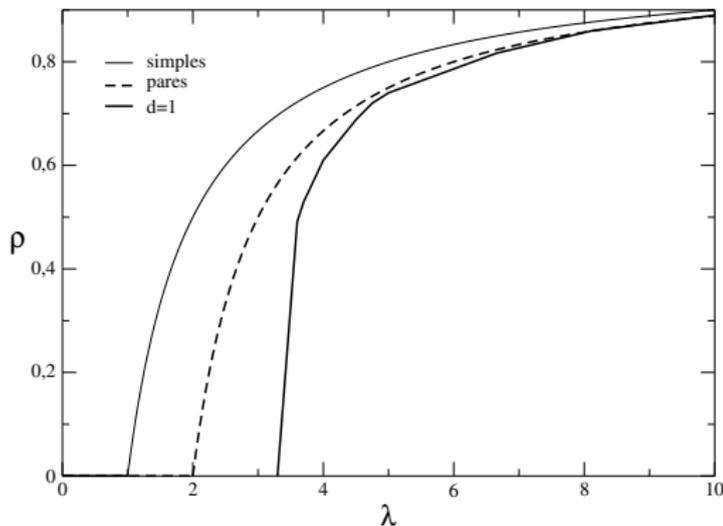
- Parâmetro de ordem  $\rightarrow$  densidade de pessoas infectadas;
- $\rho = 0$  na fase sem atividade (inativa) e  $\rho \neq 0$  na fase com atividade (ativa);
- A evolução temporal da densidade de infectados é dada por  $\frac{d\rho}{dt}P(1) = \lambda P(01) - P(1)$ , onde  $\rho = P(1)$ ;
- Forma aproximada  $\rightarrow \frac{d\rho}{dt} = (\lambda - 1)\rho - \lambda\rho^2$ ;
- $\rho(t) = \frac{\lambda-1}{\lambda - e^{-(\lambda-1)t}}$ , onde por simplicidade  $\rho(0) = 1$ ;
- Para  $\lambda < 1 \rightarrow \rho(t \rightarrow \infty) \sim e^{-(1-\lambda)t} \rightarrow$  fase inativa;
- Para  $\lambda > 1 \rightarrow \rho(t \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{\lambda-1}{\lambda} \rightarrow$  fase ativa;



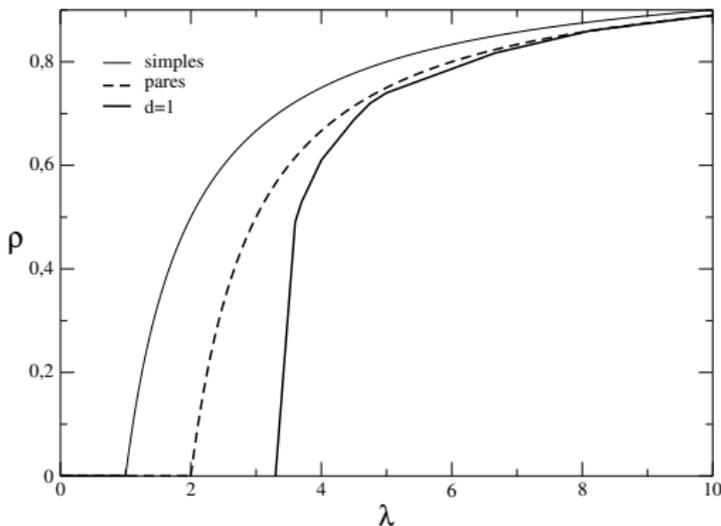
- Parâmetro de ordem  $\rightarrow$  densidade de pessoas infectadas;
- $\rho = 0$  na fase sem atividade (inativa) e  $\rho \neq 0$  na fase com atividade (ativa);
- A evolução temporal da densidade de infectados é dada por  $\frac{d}{dt}P(1) = \lambda P(01) - P(1)$ , onde  $\rho = P(1)$ ;
- Forma aproximada  $\rightarrow \frac{d\rho}{dt} = (\lambda - 1)\rho - \lambda\rho^2$ ;
- $\rho(t) = \frac{\lambda-1}{\lambda - e^{-(\lambda-1)t}}$ , onde por simplicidade  $\rho(0) = 1$ ;
- Para  $\lambda < 1 \rightarrow \rho(t \rightarrow \infty) \sim e^{-(1-\lambda)t} \rightarrow$  fase inativa;
- Para  $\lambda > 1 \rightarrow \rho(t \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{\lambda-1}{\lambda} \rightarrow$  fase ativa;



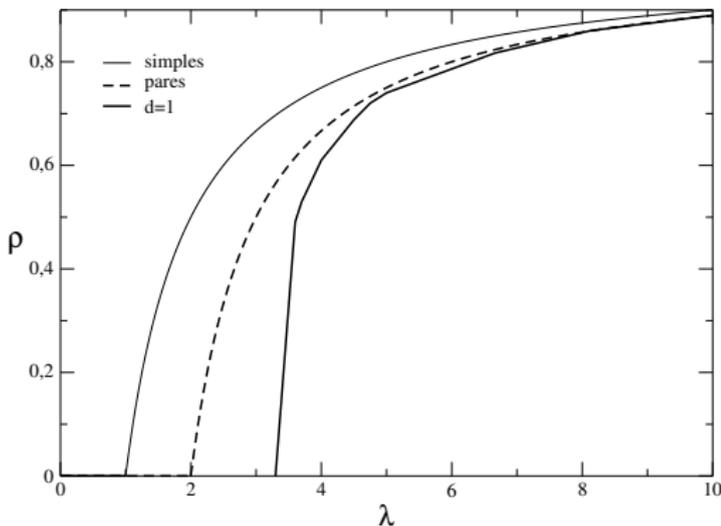
- Parâmetro de ordem  $\rightarrow$  densidade de pessoas infectadas;
- $\rho = 0$  na fase sem atividade (inativa) e  $\rho \neq 0$  na fase com atividade (ativa);
- A evolução temporal da densidade de infectados é dada por  $\frac{d}{dt}P(1) = \lambda P(01) - P(1)$ , onde  $\rho = P(1)$ ;
- Forma aproximada  $\rightarrow \frac{d\rho}{dt} = (\lambda - 1)\rho - \lambda\rho^2$ ;
- $\rho(t) = \frac{\lambda-1}{\lambda - e^{-(\lambda-1)t}}$ , onde por simplicidade  $\rho(0) = 1$ ;
- Para  $\lambda < 1 \rightarrow \rho(t \rightarrow \infty) \sim e^{-(1-\lambda)t} \rightarrow$  fase inativa;
- Para  $\lambda > 1 \rightarrow \rho(t \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{\lambda-1}{\lambda} \rightarrow$  fase ativa;



- Parâmetro de ordem  $\rightarrow$  densidade de pessoas infectadas;
- $\rho = 0$  na fase sem atividade (inativa) e  $\rho \neq 0$  na fase com atividade (ativa);
- A evolução temporal da densidade de infectados é dada por  $\frac{d}{dt}P(1) = \lambda P(01) - P(1)$ , onde  $\rho = P(1)$ ;
- Forma aproximada  $\rightarrow \frac{d\rho}{dt} = (\lambda - 1)\rho - \lambda\rho^2$ ;
- $\rho(t) = \frac{\lambda - 1}{\lambda - e^{-(\lambda - 1)t}}$ , onde por simplicidade  $\rho(0) = 1$ ;
- Para  $\lambda < 1 \rightarrow \rho(t \rightarrow \infty) \sim e^{-(1 - \lambda)t} \rightarrow$  fase inativa;
- Para  $\lambda > 1 \rightarrow \rho(t \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{\lambda - 1}{\lambda} \rightarrow$  fase ativa;



- Parâmetro de ordem  $\rightarrow$  densidade de pessoas infectadas;
- $\rho = 0$  na fase sem atividade (inativa) e  $\rho \neq 0$  na fase com atividade (ativa);
- A evolução temporal da densidade de infectados é dada por  $\frac{d}{dt}P(1) = \lambda P(01) - P(1)$ , onde  $\rho = P(1)$ ;
- Forma aproximada  $\rightarrow \frac{d\rho}{dt} = (\lambda - 1)\rho - \lambda\rho^2$ ;
- $\rho(t) = \frac{\lambda-1}{\lambda - e^{-(\lambda-1)t}}$ , onde por simplicidade  $\rho(0) = 1$ ;
- Para  $\lambda < 1 \rightarrow \rho(t \rightarrow \infty) \sim e^{-(1-\lambda)t} \rightarrow$  fase inativa;
- Para  $\lambda > 1 \rightarrow \rho(t \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{\lambda-1}{\lambda} \rightarrow$  fase ativa;



- Classe de universalidade → percolação direcionada → sistemas com um ou infinitos estados absorventes sem simetrias adicionais nem leis de conservação;
- Verificada em diversas variantes → simulações numéricas, expansões em série <sup>5</sup>, grupo de renormalização e experimentalmente <sup>6</sup>

---

<sup>5</sup>I. Jensen e R. Dickman, J. Stat. Phys. **71**, 89 (1993); I. Jensen, J. Phys. A **32** 5233 (1999); C. E. Fiore et al. J. Phys. A **40** 4305 (2007).

<sup>6</sup>K. A. Takeuchi et al., Phys. Rev. Lett. **99**, 234503 (2007).

# Comportamento Crítico

- Classe de universalidade → percolação direcionada → sistemas com um ou infinitos estados absorventes sem simetrias adicionais nem leis de conservação;
- Verificada em diversas variantes → simulações numéricas, expansões em série <sup>5</sup>, grupo de renormalização e experimentalmente <sup>6</sup>

---

<sup>5</sup>I. Jensen e R. Dickman, J. Stat. Phys. **71**, 89 (1993); I. Jensen, J. Phys. A **32** 5233 (1999); C. E. Fiore et al. J. Phys. A **40** 4305 (2007).

<sup>6</sup>K. A. Takeuchi et al., Phys. Rev. Lett. **99**, 234503 (2007).

# Transições descontínuas-ingredientes mínimos

- Em alguns casos → a transição de fase é descontínua → parâmetro de ordem sofre um salto → transição explosiva;
- Alguns (possíveis) exemplos: → gripe espanhola de 1918, infecção por HIV → acredita-se que parcela considerável dos infectados também desenvolveram outras doenças (pneumonia, tuberculose) <sup>7</sup>;
- Mudanças abruptas em ecossistemas (savanas, oceanos) <sup>8</sup> → pequenas alterações nas condições ambientais levam a grandes transformações no ecossistema local;
- Processo de contato acima → dois indivíduos infectados são necessários para contaminar um terceiro → (regras  $2A \rightarrow 3A$  e  $A \rightarrow 0$ ) →  $\frac{d\rho}{dt} = \lambda\rho^2(1 - \rho) - \rho$ ;
- Estado estacionário  $\frac{d\rho}{dt} = 0 \rightarrow \rho_1 = 0$  e  $\rho_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda}}$  → um salto em  $\rho$  (de  $\rho = 0$  para  $\rho = \frac{1}{2}$ ) ocorre em  $\lambda_t = 4$ ;

---

<sup>7</sup>J. F. Brundage et al., Emerg. Infect. Dis. **14**, 1193 (2008); W. Cai et. al, Nat. Phys. **11**, 936 (2015).

<sup>8</sup>P.V. Martín et al., PNAS **112**, E1828 (2015).

# Transições descontínuas-ingredientes mínimos

- Em alguns casos → a transição de fase é descontínua → parâmetro de ordem sofre um salto → transição explosiva;
- Alguns (possíveis) exemplos: → gripe espanhola de 1918, infecção por HIV → acredita-se que parcela considerável dos infectados também desenvolveram outras doenças (pneumonia, tuberculose) <sup>7</sup>;
- Mudanças abruptas em ecossistemas (savanas, oceanos) <sup>8</sup> → pequenas alterações nas condições ambientais levam a grandes transformações no ecossistema local;
- Processo de contato acima → dois indivíduos infectados são necessários para contaminar um terceiro → (regras  $2A \rightarrow 3A$  e  $A \rightarrow 0$ ) →  $\frac{d\rho}{dt} = \lambda\rho^2(1 - \rho) - \rho$ ;
- Estado estacionário  $\frac{d\rho}{dt} = 0 \rightarrow \rho_1 = 0$  e  $\rho_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda}}$  → um salto em  $\rho$  (de  $\rho = 0$  para  $\rho = \frac{1}{2}$ ) ocorre em  $\lambda_t = 4$ ;

---

<sup>7</sup>J. F. Brundage et al., Emerg. Infect. Dis. **14**, 1193 (2008); W. Cai et. al, Nat. Phys. **11**, 936 (2015).

<sup>8</sup>P.V. Martín et al., PNAS **112**, E1828 (2015).

# Transições descontínuas-ingredientes mínimos

- Em alguns casos → a transição de fase é descontínua → parâmetro de ordem sofre um salto → transição explosiva;
- Alguns (possíveis) exemplos: → gripe espanhola de 1918, infecção por HIV → acredita-se que parcela considerável dos infectados também desenvolveram outras doenças (pneumonia, tuberculose) <sup>7</sup>;
- Mudanças abruptas em ecossistemas (savanas,oceanos) <sup>8</sup> → pequenas alterações nas condições ambientais levam a grandes transformações no ecossistema local;
- Processo de contato acima → dois indivíduos infectados são necessários para contaminar um terceiro → (regras  $2A \rightarrow 3A$  e  $A \rightarrow 0$ ) →  $\frac{d\rho}{dt} = \lambda\rho^2(1 - \rho) - \rho$ ;
- Estado estacionário  $\frac{d\rho}{dt} = 0 \rightarrow \rho_1 = 0$  e  $\rho_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda}}$  → um salto em  $\rho$  (de  $\rho = 0$  para  $\rho = \frac{1}{2}$ ) ocorre em  $\lambda_t = 4$ ;

---

<sup>7</sup>J. F. Brundage et al., Emerg. Infect. Dis. **14**, 1193 (2008); W. Cai et. al, Nat. Phys. **11**, 936 (2015).

<sup>8</sup>P.V. Martín et al., PNAS **112**, E1828 (2015).

# Transições descontínuas-ingredientes mínimos

- Em alguns casos → a transição de fase é descontínua → parâmetro de ordem sofre um salto → transição explosiva;
- Alguns (possíveis) exemplos: → gripe espanhola de 1918, infecção por HIV → acredita-se que parcela considerável dos infectados também desenvolveram outras doenças (pneumonia, tuberculose) <sup>7</sup>;
- Mudanças abruptas em ecossistemas (savanas, oceanos) <sup>8</sup> → pequenas alterações nas condições ambientais levam a grandes transformações no ecossistema local;
- Processo de contato acima → dois indivíduos infectados são necessários para contaminar um terceiro → (regras  $2A \rightarrow 3A$  e  $A \rightarrow 0$ ) →  $\frac{d\rho}{dt} = \lambda\rho^2(1 - \rho) - \rho$ ;
- Estado estacionário  $\frac{d\rho}{dt} = 0 \rightarrow \rho_1 = 0$  e  $\rho_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda}}$  → um salto em  $\rho$  (de  $\rho = 0$  para  $\rho = \frac{1}{2}$ ) ocorre em  $\lambda_t = 4$ ;

---

<sup>7</sup>J. F. Brundage et al., Emerg. Infect. Dis. **14**, 1193 (2008); W. Cai et. al, Nat. Phys. **11**, 936 (2015).

<sup>8</sup>P.V. Martín et al., PNAS **112**, E1828 (2015).

# Transições descontínuas-ingredientes mínimos

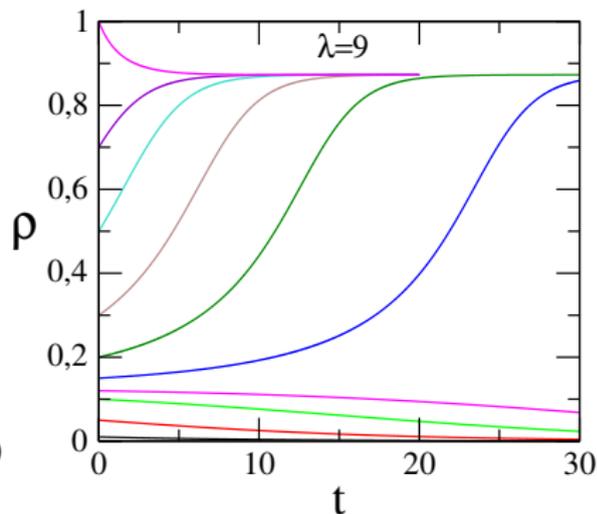
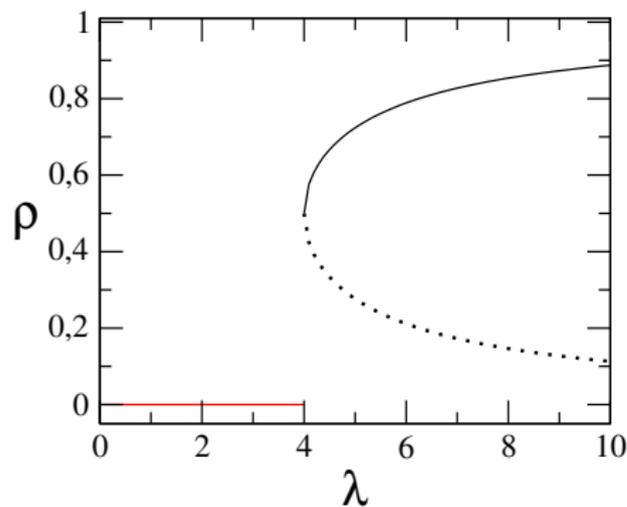
- Em alguns casos → a transição de fase é descontínua → parâmetro de ordem sofre um salto → transição explosiva;
- Alguns (possíveis) exemplos: → gripe espanhola de 1918, infecção por HIV → acredita-se que parcela considerável dos infectados também desenvolveram outras doenças (pneumonia, tuberculose) <sup>7</sup>;
- Mudanças abruptas em ecossistemas (savanas, oceanos) <sup>8</sup> → pequenas alterações nas condições ambientais levam a grandes transformações no ecossistema local;
- Processo de contato acima → dois indivíduos infectados são necessários para contaminar um terceiro → (regras  $2A \rightarrow 3A$  e  $A \rightarrow 0$ ) →  $\frac{d\rho}{dt} = \lambda\rho^2(1 - \rho) - \rho$ ;
- Estado estacionário  $\frac{d\rho}{dt} = 0 \rightarrow \rho_1 = 0$  e  $\rho_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda}}$  → um salto em  $\rho$  (de  $\rho = 0$  para  $\rho = \frac{1}{2}$ ) ocorre em  $\lambda_t = 4$ ;

---

<sup>7</sup>J. F. Brundage et al., Emerg. Infect. Dis. **14**, 1193 (2008); W. Cai et. al, Nat. Phys. **11**, 936 (2015).

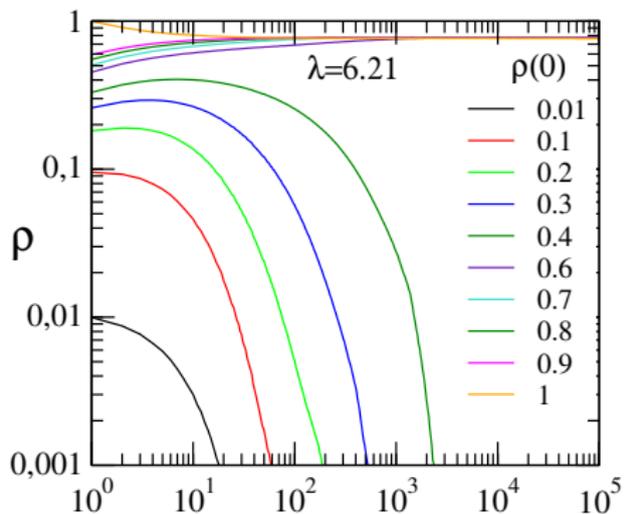
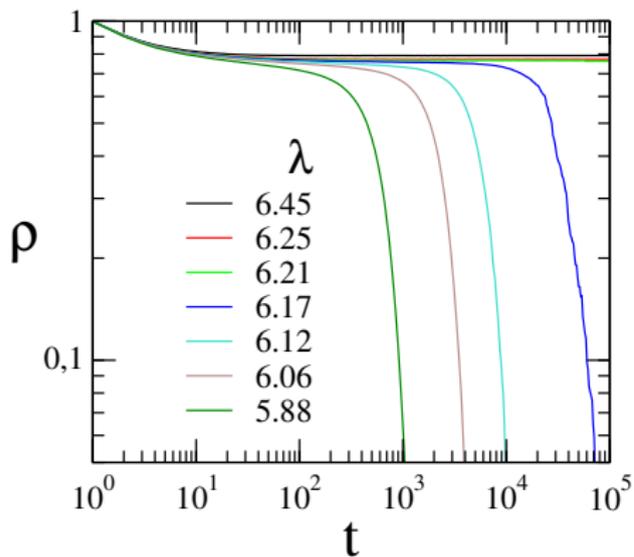
<sup>8</sup>P.V. Martín et al., PNAS **112**, E1828 (2015).

# Características de transições descontínuas

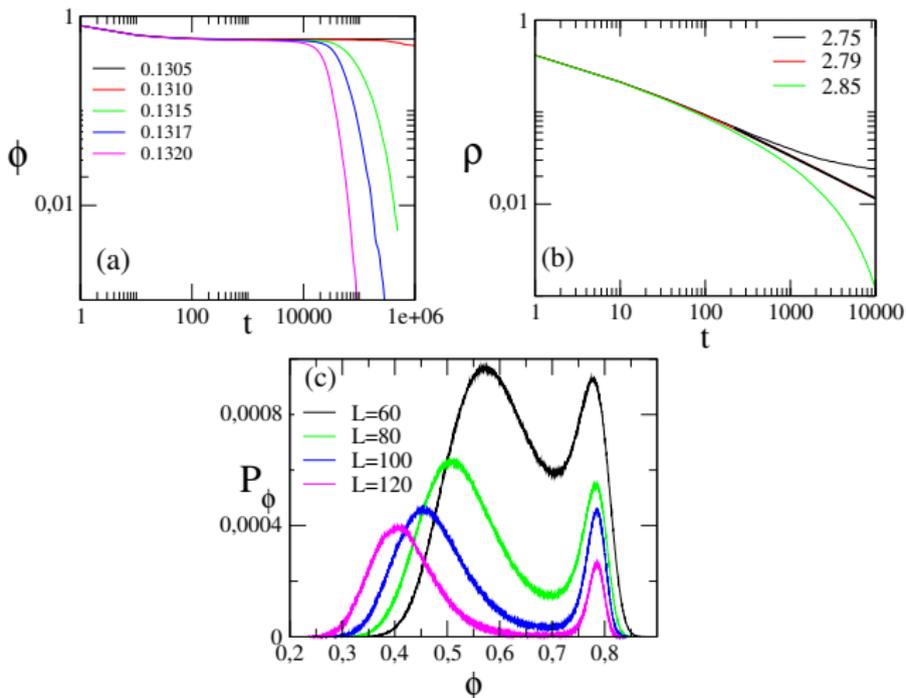


- Bistabilidade da solução  $\rightarrow$  efeito Alee;
- Salto no parâmetro de ordem;

- Simulação da regra  $2A \rightarrow 3A$  e  $A \rightarrow 0$  na rede regular;

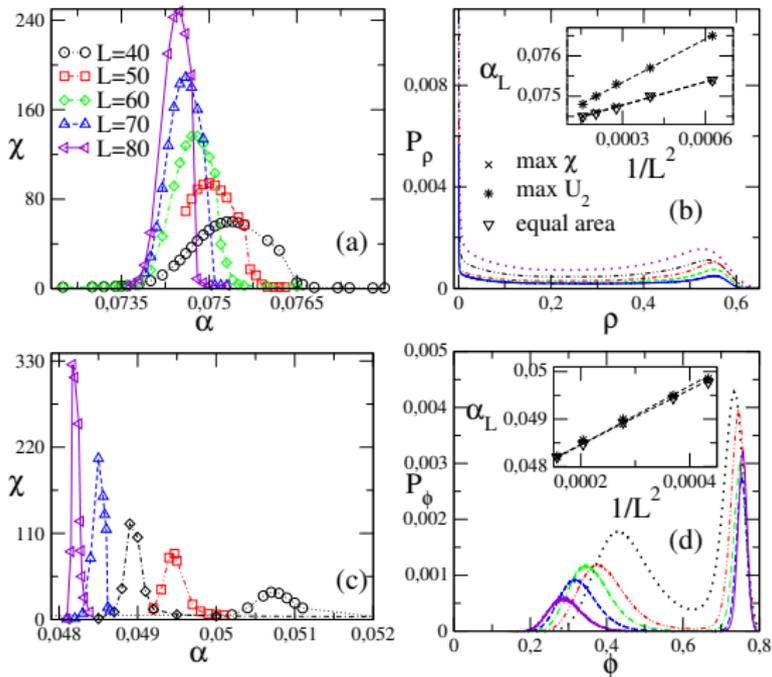


- Classificação de Elgart-Kamenev (EK) → criação por  $n$  e aniquilação de  $k$  partículas  $nA \rightarrow (n+m)A$  e  $kA \rightarrow (k-l)A$  terá uma transição descontínua sempre que  $n > k$ ;
- Extensão da regra  $2A \rightarrow 3A$  para diferentes  $k$  <sup>9</sup>;



<sup>9</sup>C. E. Fiore, Phys. Rev. E **89**, 022104 (2014); M. M. de Oliveira e C. E. Fiore, Phys. Rev. E **94**, 052138 (2016).

- Teoria de escala para transições descontínuas (fora do equilíbrio)<sup>10</sup> ;



<sup>10</sup>M. M. de Oliveira, M. G. E. da Luz e C. E. Fiore, Phys. Rev. E **92**, 062126 (2015).

- **Diferentes aspectos e exemplos** → transições de fase;
- Sistemas magnéticos, transições em fluidos simples, complexos, sistemas dinâmicos, modelos “sociais”, propagação de epidemias outros;
- Mecanismos que levem à uma mudança na ordem da transição de fase;
- Efeito de desordem → levam a mudanças “pronunciadas” na transição de fase e no comportamento crítico → sistemas mais realistas apresentam algum tipo de desordem;

# Conclusões

- Diferentes aspectos e exemplos → transições de fase;
- Sistemas magnéticos, transições em fluidos simples, complexos, sistemas dinâmicos, modelos “sociais”, propagação de epidemias outros;
- Mecanismos que levem à uma mudança na ordem da transição de fase;
- Efeito de desordem → levam a mudanças “pronunciadas” na transição de fase e no comportamento crítico → sistemas mais realistas apresentam algum tipo de desordem;

# Conclusões

- Diferentes aspectos e exemplos → transições de fase;
- Sistemas magnéticos, transições em fluidos simples, complexos, sistemas dinâmicos, modelos “sociais”, propagação de epidemias outros;
- Mecanismos que levem à uma mudança na ordem da transição de fase;
- Efeito de desordem → levam a mudanças “pronunciadas” na transição de fase e no comportamento crítico → sistemas mais realistas apresentam algum tipo de desordem;

# Conclusões

- Diferentes aspectos e exemplos → transições de fase;
- Sistemas magnéticos, transições em fluidos simples, complexos, sistemas dinâmicos, modelos “sociais”, propagação de epidemias outros;
- Mecanismos que levem à uma mudança na ordem da transição de fase;
- Efeito de desordem → levam a mudanças “pronunciadas” na transição de fase e no comportamento crítico → sistemas mais realistas apresentam algum tipo de desordem;