

# Introdução ao Método Monte Carlo

Nelson M. Kuhl (nmkuhl@usp.br)

31 de maio de 2022

*em elaboração*

## 1 Introdução

O Método Monte Carlo (MMC) é em geral associado à resolução numérica de um problema baseada em repetidas amostragens aleatórias. Números pseudo-aleatórios podem ser gerados computacionalmente, permitindo a *simulação* de modelos complexos. Neste curso serão estudados alguns exemplos ilustrativos dos princípios gerais de simulação. Será assumido um conhecimento elementar de probabilidade, principalmente uma compreensão intuitiva dos seguintes conceitos e resultados: variável aleatória, independência, lei dos grandes números e teorema limite central.

## 2 Tentativa e erro

Deseja-se calcular a área de um quarto de círculo de raio 1. A resposta,  $\pi/4$ , é conhecida, mas vamos mesmo assim ilustrar o uso de simulação para resolver o problema. Assuma que um bom gerador de números pseudo-aleatórios está disponível. Com o uso deste gerador, sorteia-se uma quantidade grande de pontos uniformemente distribuídos no quadrado unitário, e conta-se a fração destes pontos cuja distância à origem é menor do que 1. A Figura 1 mostra 1000 pontos uniformemente distribuídos, com os pontos distando menos do que 1 da origem em azul e os restantes em vermelho.

No caso da Figura 1, há 784 pontos azuis e portanto a aproximação para  $\pi/4$  obtida é 0.78400, cujo valor exato (com 5 dígitos) é 0.78540. Se repetíssemos este experimento sorteando mais 1000 pontos uniformemente distribuídos no quadrado unitário, o resultado não seria o mesmo. Para ilustrar este fato, a Figura 2 apresenta um histograma com o resultado de 2000 simulações com amostras de tamanho 1000. Os resultados se distribuem em torno de um valor médio igual a 0.78558 com desvio padrão aproximadamente igual a 0.0002. Resultados de simulações são aleatórios e devem ser caracterizados adequadamente, como se verá adiante.

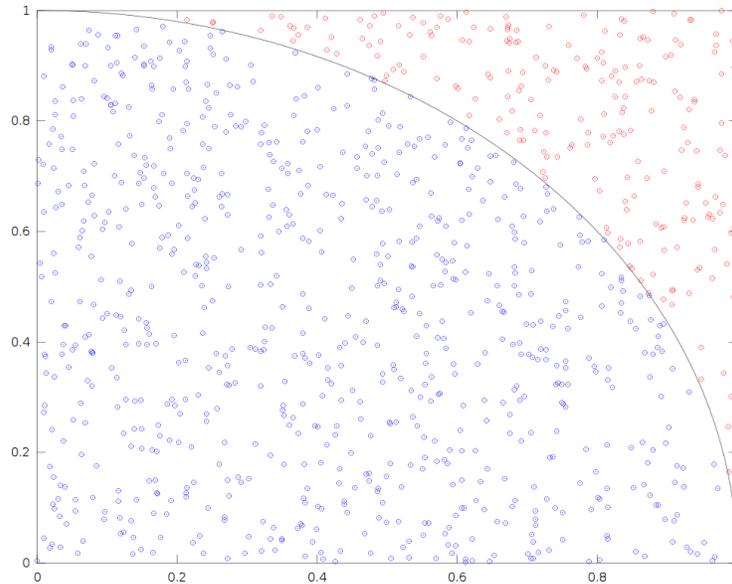


Figura 1: Tentativa e erro com 1000 pontos.  $\pi/4 \approx 0.78400$

### Exercícios

- 2.1 Obtenha aproximações para  $\pi/4$  usando amostras de diferentes tamanhos  $N$ . Faça um gráfico do erro como função do tamanho da amostra. O que você observa?
- 2.2 Aproxime  $\pi/4$  usando 2,000,000 simulações, fazendo  $M$  experimentos com amostras de tamanho  $N$ : (a)  $M = 10000$  e  $N = 200$ ; (b)  $M = 1000$  e  $N = 2000$ ; e (c)  $M = 100$  e  $N = 20000$ . Compare e discuta os resultados (pense em uma maneira adequada de fazer isso).

## 3 Um pouco de formalismo

O exemplo anterior pode ser formalizado com conceitos da teoria de probabilidade, possibilitando a generalização das idéias discutidas com o uso de abstração matemática. Considere o experimento de se sortear um número uniformemente distribuído no quadrado unitário. Defina então  $X$  como sendo a *variável aleatória* que assume os valores 1 se o resultado do experimento tiver módulo menor do que um e 0 caso contrário.

Temos portanto um ensaio de Bernoulli onde a probabilidade de sucesso ( $X = 1$ ) é  $\pi/4$  (que é também o valor esperado de  $X$ ). Se realizarmos  $N$

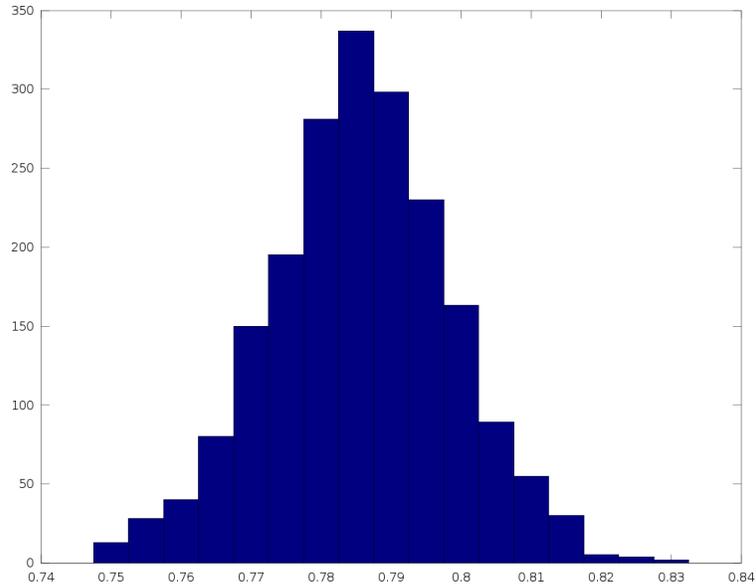


Figura 2: Histograma para 2000 simulações com amostras de tamanho 1000

ensaios independentes, então a média de sucessos é uma variável aleatória cujo valor esperado é o valor esperado de  $X$ . Da *lei dos grandes números* segue que, quando  $N \rightarrow \infty$ , esta média converge para o valor esperado de  $X$  com probabilidade 1.

De maneira mais geral, seja  $X$  uma variável aleatória com valor esperado  $EX = I^1$ , o qual queremos estimar. Suponha que são realizados  $N$  sorteios independentes de acordo com a distribuição de  $X$ . Se denotarmos por  $X_n$  a variável aleatória correspondente ao  $n$ -ésimo sorteio, então a média

$$I_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n$$

é uma variável aleatória que converge para  $I$  com probabilidade 1.

Logo, os resultados  $x_1, x_2, \dots$  de uma simulação das variáveis aleatórias  $X_1, X_2, \dots$  são tais que, *na maioria das vezes*, se especificarmos um número positivo arbitrariamente pequeno  $\epsilon$ , então para  $N$  suficientemente grande temos

$$|I - \bar{I}_N| < \epsilon$$

onde  $\bar{I}_N = (x_1 + x_2 + \dots + x_N)/N$  é a *média amostral* dos resultados. Veremos a seguir como escolher um valor adequado para  $N$  e como dar um sentido mais

<sup>1</sup>Esta notação não é padrão, mas é motivada pela aplicação ao cálculo de integrais.

preciso à expressão *na maioria das vezes* para a apresentação de resultados de simulação.

## 4 Intervalos de confiança

O *Teorema Limite Central* (TLC daqui em diante) garante que para  $N$  suficientemente grande, a variável aleatória  $I_N$  se distribui aproximadamente de acordo com a *Normal* de média  $I$  e variância  $\sigma^2/N$ , onde  $\sigma^2 = E[(X - I)^2]$  é a variância de  $X$ :

$$\text{Prob} \left\{ \frac{I_N - I}{\sigma/\sqrt{N}} \in (a, b) \right\} \approx \int_a^b \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx, \quad N \gg 1.$$

A primeira regra prática é assumir que  $I_N$  é normal e usar resultados conhecidos sobre a distribuição normal para deduzir algumas estimativas.

Uma variável aleatória normal  $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  com média  $\mu_Y$  e variância  $\sigma_Y^2$  tem a seguinte propriedade:

$$\gamma(c) := \text{Prob} \{ |Y - \mu_Y| < c \cdot \sigma_Y \} = \text{erf}(c/\sqrt{2})$$

onde  $\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$  é a função erro. Esta função é bem conhecida e valores podem ser obtidos de tabelas ou de bibliotecas matemáticas de vários softwares. Valores típicos destas probabilidades são:

$c$	1.96	2	3
$\gamma(c)$	0.95	0.9545	0.9973

Logo, podemos afirmar que, por exemplo,  $|I - I_N| < 2\sigma/\sqrt{N}$  com probabilidade 95.45%, e se  $\bar{I}_N$  for o resultado obtido da simulação, então para o valor  $I$  que desejamos calcular escrevemos

$$I \in [\bar{I}_N - 2\sigma/\sqrt{N}, \bar{I}_N + 2\sigma/\sqrt{N}] \quad \text{com probabilidade 95.45\%}.$$

Uma fórmula como a apresentada acima mostra uma propriedade importante de resultados de simulações: *o erro decai proporcionalmente a  $1/\sqrt{N}$* , onde  $N$  é o tamanho da amostra. Este decaimento depende apenas do tamanho da amostra é de uma generalidade essencial para aplicações a vários problemas complexos. Para usarmos estimativas de erro deste tipo precisamos do valor de  $\sigma$ , que em geral não é conhecido. Na prática, o uso de

$$\bar{\sigma} = \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{I}_N)^2 \right]^{1/2}$$

no lugar de  $\sigma$  funciona bem para a obtenção de intervalos de confiança <sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>A expressão  $N - 1$  deve ser usada no denominador para um estimador da variância. Os valores de  $N$  típicos em simulações são grandes e esta distinção é irrelevante.

## Exercícios

- 4.1 Calcule o valor (exato) de  $\sigma$  para o exemplo da Secção 2. Faça 2000 experimentos com amostras de tamanho  $N = 1000$  e use os resultados para averiguar intervalos de confiança.
- 4.2 Compare intervalos de confiança usando  $\sigma$  e  $\bar{\sigma}$  para diferentes tamanhos  $N$  de amostras.

## 5 Sumário

Podemos apresentar um procedimento geral a partir do que foi descrito nas seções anteriores:

- $X$  - Variável aleatória cujo valor esperado  $I = EX$  deseja-se calcular.
- Suponha que *sabemos simular* a variável  $X$ . Sorteie de forma *independente*  $N$  valores  $x_n$  de  $X$ ,  $1 \leq n \leq N$  e obtenha a aproximação para  $I$  usando a média amostral

$$\bar{I}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n.$$

- Estime a variância  $\sigma^2 = E[(X - I)^2]$  por

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{I}_N)^2.$$

- Construa um intervalo com índice de confiança  $\gamma(c)$  e apresente o resultado

$$I \in \left[ \bar{I}_N - c \cdot \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{N}}, \bar{I}_N + c \cdot \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{N}} \right] \quad \text{com probabilidade } 100\gamma(c)\%.$$

A simplicidade desses passos esconde as dificuldades práticas de executá-los. Porém, a sua generalidade permite o seu uso em vários problemas complexos, ou mesmo a modificação da formulação de um mesmo problema para explorar diferentes maneiras de resolvê-lo.

## 6 Integrais

Uma das aplicações do Método Monte Carlo é no cálculo de integrais em dimensões altas e domínios complicados, onde métodos tradicionais são pouco eficientes ou não podem ser usados. Integrais, após uma normalização se necessário, podem ser vistas como valores esperados em relação a uma distribuição de probabilidade. A seguir apresentaremos alguns exemplos para discutir a metodologia (não são casos onde o MMC é necessário, mas onde as idéias podem ser apresentadas sem complicações adicionais).

## 6.1 Integrais unidimensionais

A integral definida  $I = \int_a^b f(x) dx$  pode ser reescrita como

$$I = \int_a^b (b-a)f(x) \frac{1}{b-a} dx$$

e interpretada como o valor esperado de  $(b-a)f(X)$ , onde  $X \sim \mathcal{U}(a, b)$  é uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo  $(a, b)$ . Para aproximar o seu valor, podemos então sortear  $N$  números  $x_1, x_2, \dots, x_N$  de acordo com a distribuição uniforme em  $(a, b)$  e calcular a média  $\bar{I}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (b-a)f(x_n)$ .

Por exemplo, o valor de  $\pi/4$  pode ser calculado pela integral

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

Sorteamos então  $N$  números  $x_n$ ,  $1 \leq n \leq N$ , de acordo com  $\mathcal{U}(0, 1)$  e calculamos  $\bar{I}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sqrt{1-x_n^2}$ . Eis alguns resultados obtidos com o programa OCTAVE:

$N$	$\bar{I}_N$	$\bar{\sigma}$	$\gamma = 0.9545(95.45\%)$
$10^3$	0.77736	0.22415	(0.76318, 0.79153)
$10^4$	0.78503	0.22223	(0.78058, 0.78947)
$10^5$	0.78504	0.22302	(0.78363, 0.78645)
$10^6$	0.78538	0.22330	(0.78494, 0.78583)

Os valores de  $\bar{\sigma}$  tem ordens de grandeza próximos. Se escolhermos o valor de 0.23 para o desvio padrão (a favor da segurança), podemos estimar o valor de  $N$  para se garantir uma tolerância pré-fixada com (digamos) 95.45% de probabilidade. Para um erro de  $10^{-4}$  com probabilidade 95.45%, obtemos  $N > (2 * 0.23/10^{-4})^2 = 21160000$ .

Não precisamos nos restringir a integrais definidas. Conforme a Seção 5, podemos aproximar valores esperados de variáveis aleatórias cujas distribuições sabemos amostrar. Um caso de interesse é a distribuição normal. Existem bons geradores de números pseudo-aleatórios para esta distribuição, o que nos permite calcular aproximações para integrais da forma

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

(valor esperado de  $f(\xi)$ , onde  $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$  é uma variável aleatória normal padrão).

Por exemplo, considere o cálculo do preço de uma Opção Européia. Se  $S_0$  é o preço do ativo hoje,  $K$  o *strike*,  $r$  a taxa de juro livre de risco,  $\sigma$  a volatilidade e  $T$  o tempo até o vencimento, então o preço  $C(S_0, T)$  da opção é o valor esperado do *payoff* após aplicarmos o fator de desconto:

$$C(S_0, T) = e^{-rT} \mathbb{E}[\max(S(T) - K, 0)],$$

onde  $S(T)$  é o preço do ativo após o período  $T$  segundo a distribuição lognormal

$$S(T) = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)T + \sigma\sqrt{T}\xi}$$

com  $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Logo, o preço da opção é dado pela integral

$$C = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \max\left(S_0 e^{(r-\sigma^2/2)T + \sigma\sqrt{T}x} - K, 0\right) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

Para o cálculo desta integral, procedemos da seguinte forma:

- Sorteie  $N$  números  $\xi_n$ ,  $1 \leq n \leq N$ , de forma independente de acordo com a *distribuição normal*  $\mathcal{N}(0, 1)$ .
- Calcule os respectivos valores dos ativos

$$S_n = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)T + \sigma\sqrt{T}\xi_n}, \quad 1 \leq n \leq N.$$

- Obtenha a aproximação

$$\bar{C}_N = e^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \max(S_n - K, 0).$$

Na Figura 3 apresentamos resultados de simulações usando  $N = 2^{10+k}$ , para  $1 \leq k \leq 10$ , com os respectivos intervalos de confiança de 95.45%. Note que para  $N = 2^{15}$ , o valor correto não pertence ao intervalo de confiança (isto contradiz a teoria?)

## 6.2 Integrais multidimensionais

Do ponto de vista formal, não há novidade. Se  $p(x)$  for uma densidade de probabilidade em um subconjunto  $\Omega$  do  $\mathbb{R}^k$ , então, se soubermos sortear pontos distribuídos de acordo com esta densidade, a integral (valor esperado)

$$I = \int_{\Omega} f(x)p(x) dx_1 \dots dx_k$$

pode ser aproximada pela média amostral dos valores de  $f$  nos pontos sorteados.

Como exemplo <sup>3</sup> considere o cálculo do valor presente de uma unidade monetária em um período de quatro anos, cuja taxa de juros  $r_i$  para o período  $(i, i+1)$  segue o modelo lognormal

$$r_i = r_{i-1} e^{s\xi_i - 0.5s^2}, \quad i = 1, 2, 3$$

---

<sup>3</sup>Ver Russel E. Caflisch, *Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods*, Acta Numerica (1998), pp. 1–49

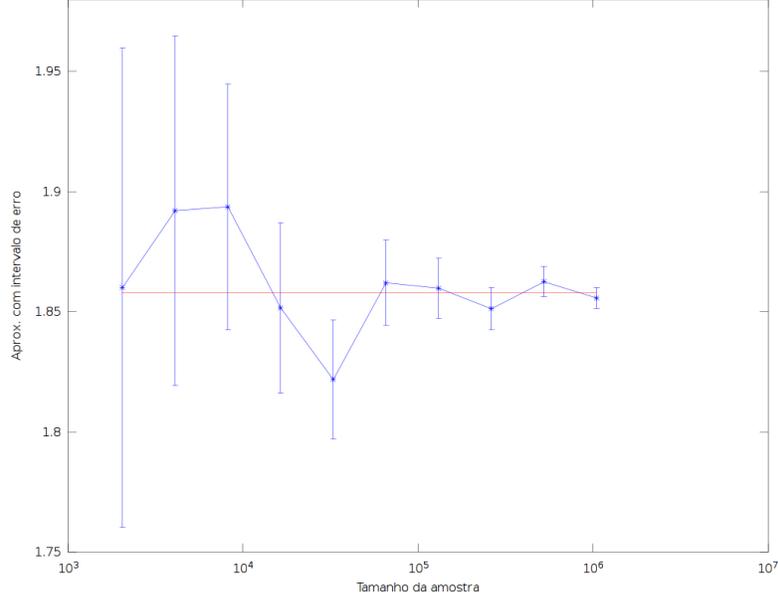


Figura 3: Cálculo do preço de uma opção de compra europeia com parâmetros  $r = 0.08$ ,  $\sigma = 0.35$ ,  $K = 10$ ,  $S_0 = 11$  e  $T = 0.5$ . A linha horizontal vermelha representa o valor obtido da fórmula de Black-Scholes

onde  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$  são independentes e identicamente distribuídas de acordo com  $\mathcal{N}(0, 1)$ ,  $s^2$  é a variância de  $\ln(r_i/r_{i-1})$  e  $r_0$  é a taxa de juros atual. O valor presente VP é igual ao valor esperado da variável aleatória

$$u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = [(1 + r_0)(1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3)]^{-1} \quad (1)$$

e portanto temos

$$VP = \iiint u(x_1, x_2, x_3) \frac{e^{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/2}}{(2\pi)^{3/2}} dx_1 dx_2 dx_3.$$

Podemos então sortear independentemente  $3N$  números normais  $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)})$ ,  $1 \leq n \leq N$  e calcular a aproximação  $\overline{VP}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)})$ .

## 7 Redução da variância

O comprimento do intervalo de confiança é proporcional a  $\sigma/\sqrt{N}$ , onde  $\sigma$  é o desvio padrão e  $N$  o tamanho da amostra. Logo, a maneira mais simples de se diminuir o erro é aumentar  $N$ , mas isto pode ter um custo computacional

proibitivo em alguns problemas. Note que para diminuirmos o erro por um fator de 10, este procedimento implica em multiplicar  $N$  por 100. Por isso um grande esforço é dedicado a técnicas para a diminuição do erro pela redução de  $\sigma$ . A seguir ilustraremos duas dessas técnicas de redução da variância.

## 7.1 Covariância

Se  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias, então uma conta simples nos dá o resultado

$$\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + 2\text{cov}(X, Y) + \text{var}(Y) \quad (2)$$

onde

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)] \quad (3)$$

é a covariância de  $X$  e  $Y$ . Intuitivamente, (3) indica que se a covariância é positiva então  $X$  e  $Y$  tendem a ser simultaneamente menores ou maiores do que suas médias, e se a covariância é negativa  $X$  tende a ser maior do que a sua média  $EX$  quando  $Y$  é menor que a sua média  $EY$  e vice-versa.

Uma simples manipulação de (3) implica que  $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - (EX)(EY)$ , e portanto se  $X$  e  $Y$  forem independentes a covariância é nula (a recíproca não é verdadeira). As técnicas que veremos adiante exploram conseqüências de (2) usando variáveis *dependentes* para a redução da variância no Método Monte Carlo.

## 7.2 Variáveis antitéticas

Suponha que  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias tais que

$$EX = EY = I \text{ e } \text{var}(X) = \text{var}(Y) = \sigma^2. \quad (4)$$

Então, da linearidade do valor esperado e de (2) segue que

$$E\left(\frac{X + Y}{2}\right) = I \text{ e } \text{var}\left(\frac{X + Y}{2}\right) = \frac{1}{2}(\sigma^2 + \text{cov}(X, Y)).$$

Como para quaisquer variáveis aleatórias temos  $|\text{cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}$ , segue que, neste caso,  $(X + Y)/2$  pode ser usado para estimar  $I$  com variância *menor ou igual* a  $\sigma^2$ . Não é claro que esta forma de diminuir a variância seja vantajosa, pois ela implica em simular não apenas  $X$  mas também  $Y$ , aumentando o custo computacional. Um ganho efetivo pode ocorrer se for possível escolher  $Y$  de modo que a *covariância seja negativa*.

Um caso típico ocorre quando  $X = f(U)$ , onde  $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$  é uniformemente distribuída no intervalo  $(0, 1)$ . Se escolhermos  $Y = f(1 - U)$ , as hipóteses (4) são satisfeitas. Outro caso ocorre quando  $X = f(\xi)$  com  $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$  sendo uma variável aleatória normal padrão. Se escolhermos  $Y = f(-\xi)$ , temos novamente satisfeitas as hipóteses (4). Nos dois casos, se  $f$  for uma função monótona crescente ou decrescente, pode-se mostrar que  $\text{cov}(X, Y) < 0$ , indicando a possibilidade de uma efetiva diminuição da variância.

### 7.3 Variável de controle

Suponha que  $Y$  seja uma variável aleatória com valor esperado  $EY = \mu_Y$  conhecido. Então, a variável aleatória  $Z$  definida por  $Z = X - (Y - \mu_Y)$  tem o mesmo valor esperado que  $X$ . Como  $Z = X - Y + \mu_Y$ , a variância de  $Z$  é igual à variância de  $X - Y$ . Logo, se a *variável de controle*  $Y$  for uma boa aproximação para  $X$ , podemos esperar bons resultados na redução da variância para estimar  $EX$ .

Uma generalização desta idéia é feita adicionando-se um parâmetro ao problema definindo

$$Z_\lambda = X - \lambda(Y - \mu_Y)$$

onde o parâmetro  $\lambda$  é determinado de forma a minizar a variância de  $Z_\lambda$ , cuja expressão é dada por

$$\text{var}(Z_\lambda) = \text{var}(X) - 2\text{cov}(X, Y)\lambda + \text{var}(Y)\lambda^2.$$

O ponto de mínimo  $\lambda_*$  e o valor mínimo  $\text{var}_* = \text{var}(Z_{\lambda_*})$  são iguais a

$$\lambda_* = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\text{var}(Y)}; \quad \text{var}_* = \text{var}(X) - \frac{\text{cov}(X, Y)^2}{\text{var}(Y)}.$$

A redução da variância independe do sinal da covariância <sup>4</sup>. O sinal de  $\lambda_*$  é o mesmo que o sinal da covariância e este fato tende a compensar o comportamento de  $X$  e  $Y$  em relação às suas médias. Observe que  $\text{cov}(X, Y)$  e  $\text{var}(Y)$  não são conhecidas e portanto não temos o valor exato de  $\lambda_*$ . Entretanto, este valor pode ser estimado durante uma simulação pelo Método Monte Carlo. Já vimos na Seção 4 como estimar a variância. Um estimador para a covariância é dado por

$$\overline{\text{cov}}(X, Y) = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{\mu}_X)(y_n - \bar{\mu}_Y)$$

onde  $x_n$  e  $y_n$ ,  $1 \leq n \leq N$  são valores simulados de  $X$  e  $Y$ , respectivamente, e  $\bar{\mu}_X$  e  $\bar{\mu}_Y$  são as respectivas médias amostrais.

### 7.4 Exemplo

As técnicas de redução da variância discutidas acima serão aplicadas ao exemplo do cálculo do valor presente introduzido na Seção 6.2. Serão apresentados resultados para

- MC\_PADR: Simulação padrão, sem redução da variância.
- MC\_ANTI: Simulação usando variáveis antitéticas para a redução da variância, onde o estimador usado é  $[u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + u(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3)]/2$ .
- MC\_CTRL: Simulação usando variável de controle para a redução da variância. Note que se  $r$  é pequeno, uma boa aproximação para  $1/(1+r)$  é

---

<sup>4</sup>Se  $\text{cov}(X, Y) = 0$  (e.g.  $X$  e  $Y$  independentes) não há redução da variância.

$1 - r$ . Como as probabilidades de  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  serem pequenas é grande, um candidato a variável de controle para (1), conforme sugerido na referência citada na Seção 6.2 é

$$v(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{(1 - r_1)(1 - r_2)(1 - r_3)}{1 + r_0}.$$

O valor esperado de  $v$  pode ser calculado e é igual a

$$\begin{aligned} I[v] &= \iiint v(x_1, x_2, x_3) \frac{e^{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/2}}{(2\pi)^{3/2}} dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \frac{1 - 3r_0 + e^{s^2}(e^{s^2} + 2)r_0^2 - e^{4s^2}r_0^3}{1 + r_0}. \end{aligned}$$

- MC\_ANCT: Simulação combinando variáveis antitéticas e variável de controle, onde  $[v(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + v(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3)]/2$  é usada como variável de controle para o estimador com variáveis antitéticas.

Na tabela abaixo são apresentados os desvios-padrão estimados de cada caso usando  $r_0 = 0.1$  e  $s = 0.1$ :

	desvio-padrão
MC_PADR	$2.3 \times 10^{-2}$
MC_ANTI	$1.5 \times 10^{-3}$
MC_CTRL <sup>(1)</sup>	$3.4 \times 10^{-4}$
MC_ANCT <sup>(2)</sup>	$7.6 \times 10^{-6}$

$$^{(1)}\lambda_* \approx 0.84$$

$$^{(2)}\lambda_* \approx 0.687$$

## Exercícios

7.1 Discuta os resultados do exemplo acima.

## Bibliografia

Uma introdução não técnica a vários aspectos de probabilidade é apresentada em

Richard Isaac, *The Pleasures of Probability*, Springer-Verlag New York, Inc., 1995

Para um tratamento mais formal, veja

Leo Breiman, *Probability and Stochastic Processes with a View Toward Applications*, Second Edition, The Scientific Press, 1985

Uma pequena introdução ao método Monte Carlo é encontrada em

Ilya M. Sobol, *A Primer for the Monte Carlo Method*, CRC Press, Inc., 1994

Um livro acessível no assunto é

Ronald W. Shonkwiler and Franklin Mendivil, *Explorations in Monte Carlo Methods*, Springer, 2009

Consulte também o excelente

Malvin H. Kalos and Paula A. Whitlock, *Monte Carlo Methods*, Second Revised and Enlarged Edition, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2008