



***PEF – 3528 – Ferramentas
Computacionais na Mecânica das
Estruturas Criação e Concepção***

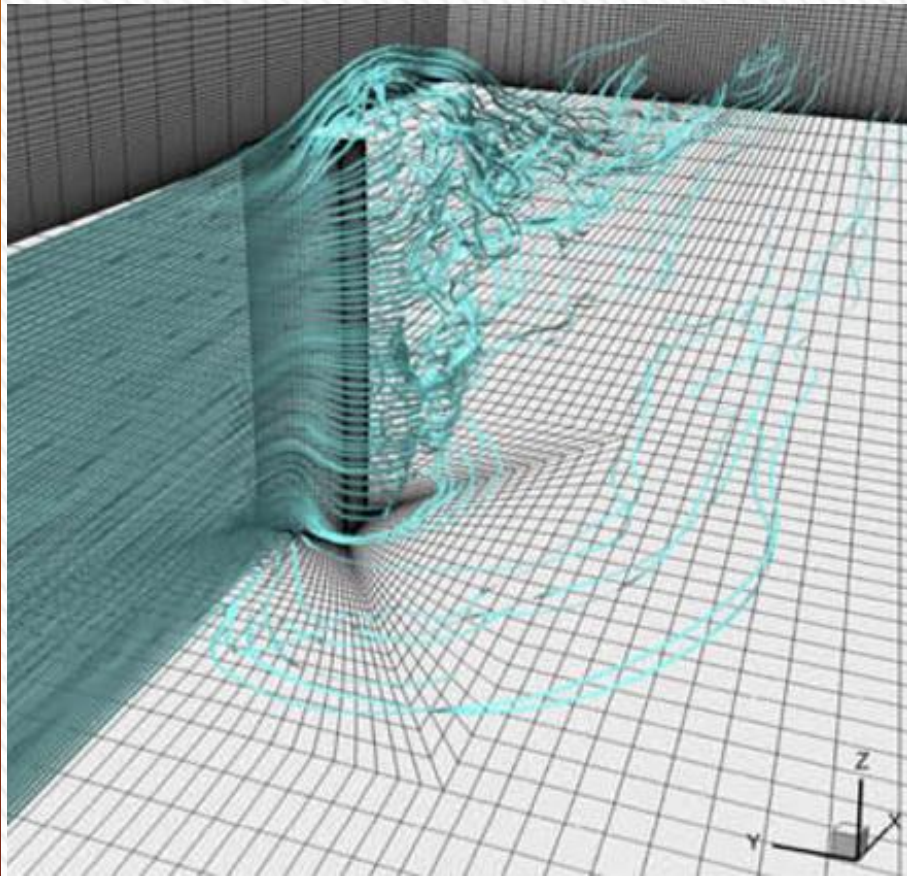
Aula: Dinâmica das estruturas

**Valério S. Almeida - 2020
valerio.almeida@usp.br**

ANALISE DINÂMICA NA ENGENHARIA

2

Análise dinâmica em certos projetos estruturais é imprescindível



DINÂMICA

AÇÕES: variam com o tempo (mag./direç./pos.)

Resposta da estrutura: deslocamento (t)

Ações dinâmicas

Determinísticas

Não - Determinísticas

*Ações (t) conhecidas:
prescritas (t)*

*Ações (t) senso
estatístico: randômicas*

TIPOS DE AÇÕES DETERMINÍSTICAS

Periódicas

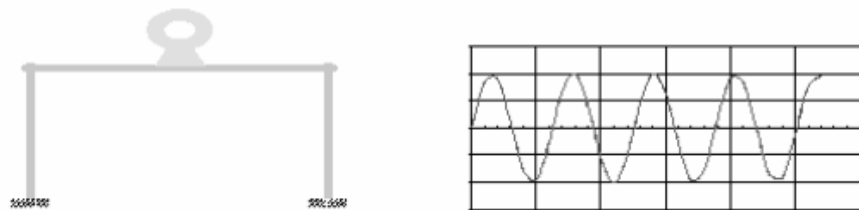


Figura 1.2: Carregamento periódico harmónico – vibração de máquina rotativa.

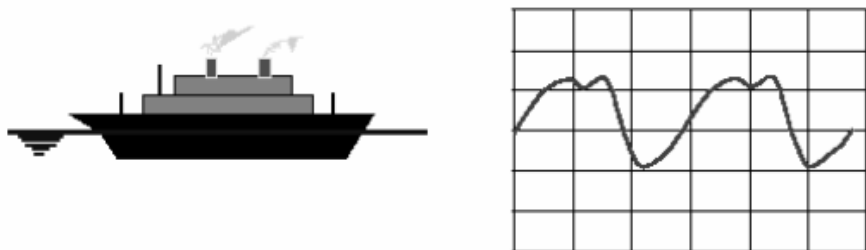


Figura 1.3: Carregamento periódico não harmónico – propulsor de navio.

Não Periódicas

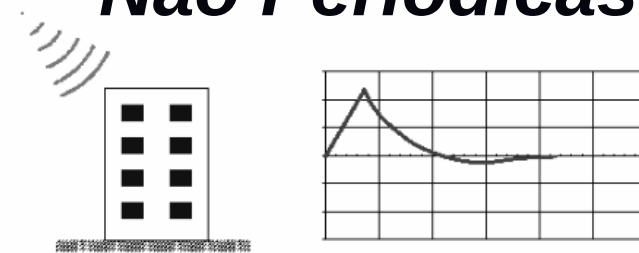


Figura 1.4: Carregamento impulsivo – onda de choque de uma explosão.

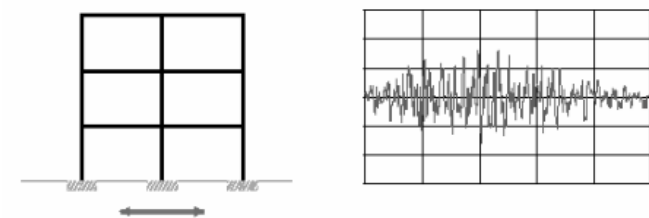


Figura 1.5: Solicitação de longa duração – ação sísmica.

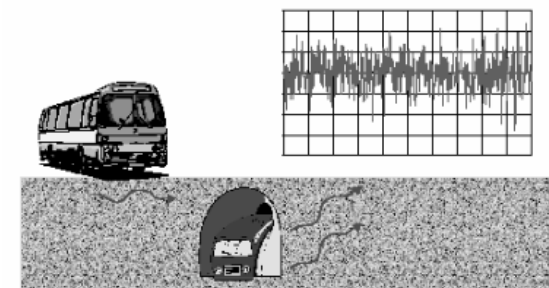
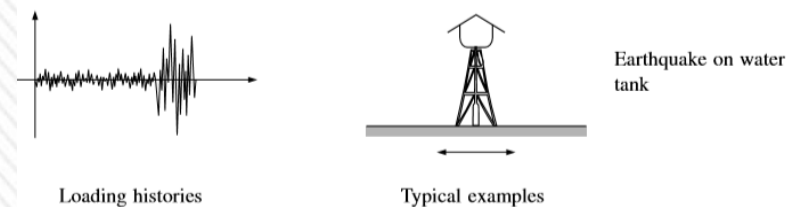
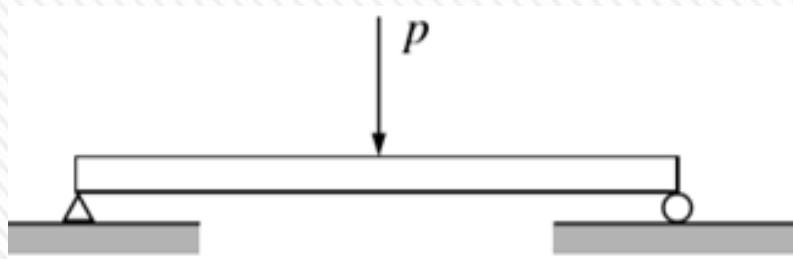


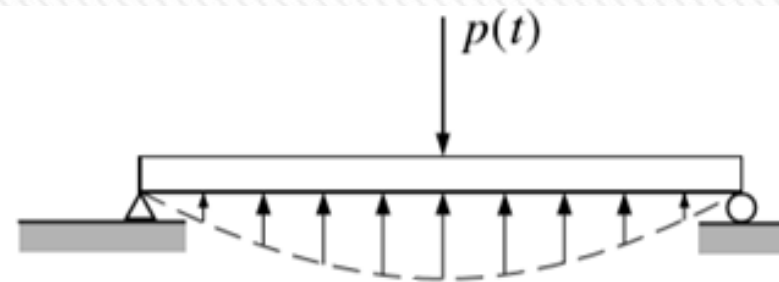
Figura 1.6: Carregamento aleatório – vibração ambiente.



PERFIS ESSENCIAIS DA DINÂMICA

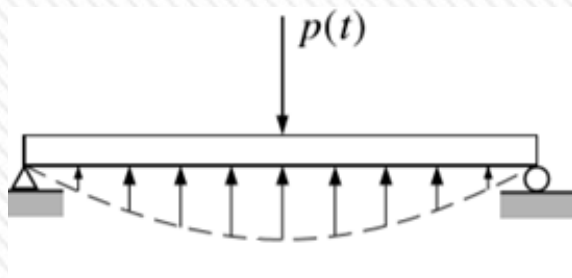


estática



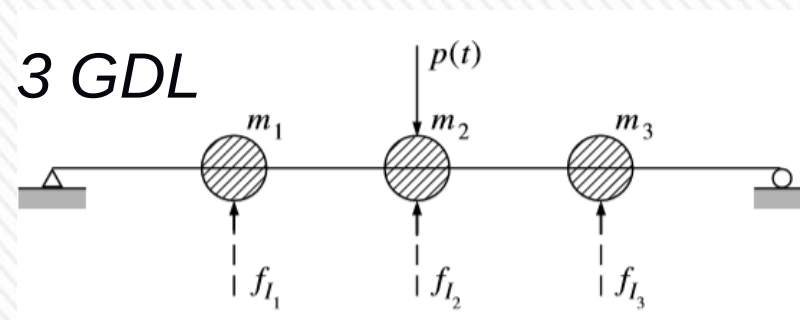
dinâmica

MÉTODO DE DISCRETIZAÇÃO



Formular Causa(t) e Efeito (t) → EDPs (x,t)

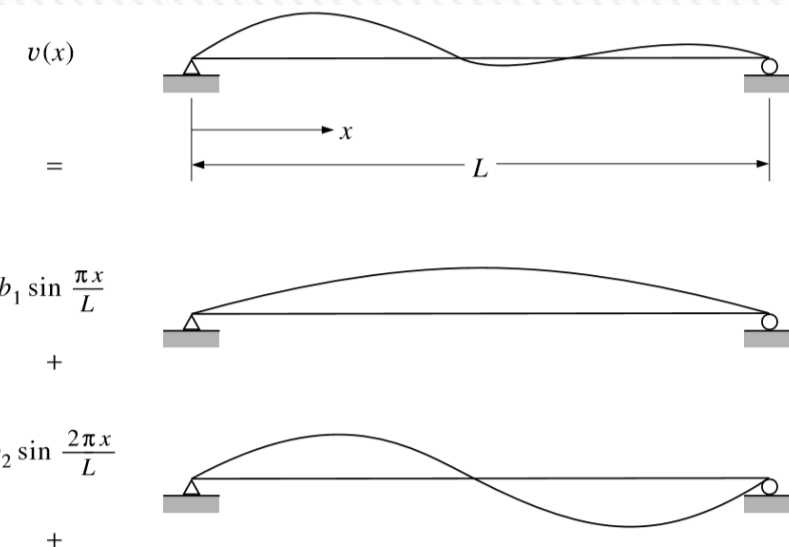
(1) Massa concentrada



(2) Deslocamentos generalizados (Z_n)*

$$v(x) = \sum_n Z_n \psi_n(x)$$

ψ_n : funções de forma



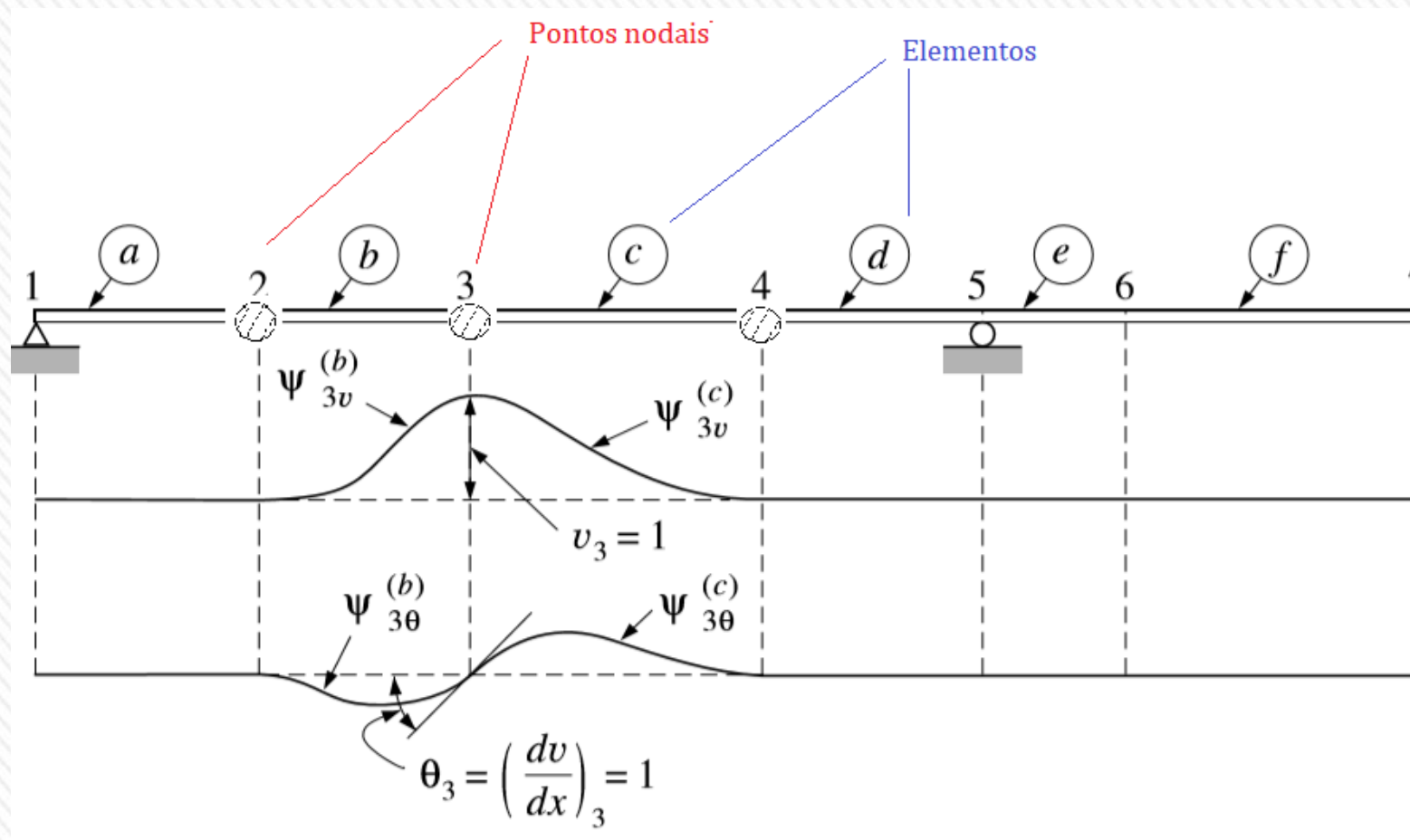
GDL: grau de liberdade

* Ideal: Massa distribuída

MÉTODO DE DISCRETIZAÇÃO

3) Elemento Finito

Combina (1) + (2)



ψ_n : funções de interpolação

FORMULAÇÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

1 Equilíbrio Direto: Princípio d'Alembert

$$\mathbf{p}(t) = m \frac{d^2 \mathbf{v}}{dt^2} \equiv m \ddot{\mathbf{v}}(t)$$

$$\mathbf{p}(t) - \underbrace{m \ddot{\mathbf{v}}(t)}_{\text{força inercial}} = \mathbf{0}$$

2 Princípio dos deslocamentos virtuais

3 Princípio de Hamilton

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(T - V) + \delta W] dt = 0$$

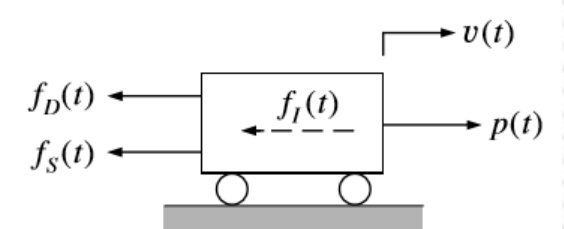
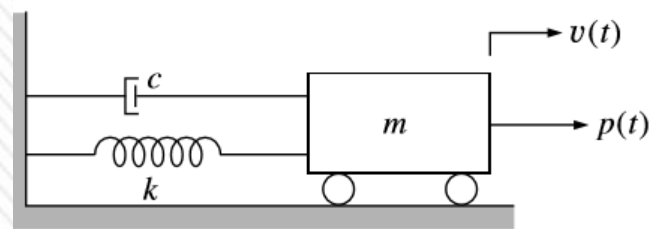
$\mathbf{v}(t)$: deslocamentos;

T : energia cinética total; V : energia potencial total;

W : trabalho de forças não conservativas

EQUAÇÃO DE MOVIMENTO 1 GDL

AÇÕES DETERMINÍSTICAS COMPORTAMENTO LINEAR



$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t)$$

$$f_I(t) = m \ddot{v}(t)$$

$$f_D(t) = c \dot{v}(t)$$

$$f_S(t) = k v(t)$$

$$m \ddot{v}(t) + c \dot{v}(t) + k v(t) = p(t)$$

**Eq. diferencial
de 2ª. ordem**

c: coeficiente de amortecimento viscoso linear

k: coeficiente de rigidez

m: massa

RESOLVER EQUAÇÃO DE MOVIMENTO – 1GDL

$$m \ddot{v}(t) + c \dot{v}(t) + k v(t) = p(t)$$

$$\text{Condições iniciais: } \begin{cases} v(t=0) = \bar{v} \\ \dot{v}(t=0) = \dot{v}_0 \end{cases}$$

Vibração livre: $m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = 0$

Não amortecida: $m\ddot{v}(t) + kv(t) = 0$

Amortecida: $m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = 0$

Resposta analítica

Vibrações forçadas: $m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = p(t)$

Não amortecida: $m\ddot{v}(t) + cp(t)$

Amortecida: $m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = p(t)$

Resposta analítica: carregamentos periódicos

Resposta aproximada (avaliação numérica, série de Fourier): carreg. gerais

RESOLVER EQUAÇÃO DE MOVIMENTO – N GDL

Resposta Estática: $[K] \cdot \{U\} = \{F\}$ Ações não variam no tempo

Resposta Dinâmica: $[K] \cdot \{U\} + [M] \cdot \{\ddot{U}\} = \{F\}$
Ações variam no tempo, inclusão das forças inerciais

[M]: matriz de massa da estrutura

Respostas Dinâmicas, duas classes a ser analisado, para obter:

- as frequências naturais das vibrações livres e seus correspondentes modos:

$$[K] \cdot \{U\} + [M] \cdot \{\ddot{U}\} = \{0\}$$

- Movimentos e esforços devidos a ações prescritas forçadas:

$$[K] \cdot \{U\} + [M] \cdot \{\ddot{U}\} = \{F\}$$

Respostas Dinâmicas

Matriz de Massa Consistente: Uma das formas mais usadas.

Advém do uso das funções de forma da matriz de rigidez. Assim, para

cada elemento “e”:

$$m^e = \int_0^{\ell} \rho \cdot [N]^t \cdot [N] \, d\xi \quad N : \text{funções de forma}$$

$$m^e = \frac{\rho \cdot L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & -22 \cdot L & 0 & 54 & 13 \cdot L \\ 0 & -22 \cdot L & 4 \cdot L^2 & 0 & -13 \cdot L & -3 \cdot L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & -13 \cdot L & 0 & 156 & 22 \cdot L \\ 0 & 13 \cdot L & -3 \cdot L^2 & 0 & 22 \cdot L & 4 \cdot L^2 \end{bmatrix}$$

Onde ρ é massa por comprimento ($\rho = A \cdot \gamma$)

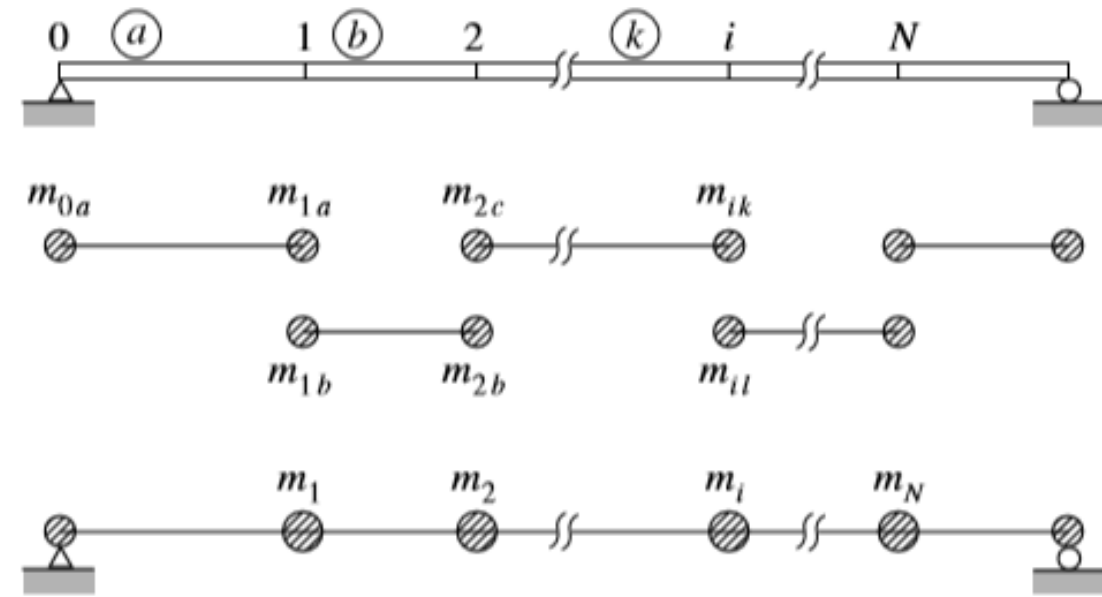
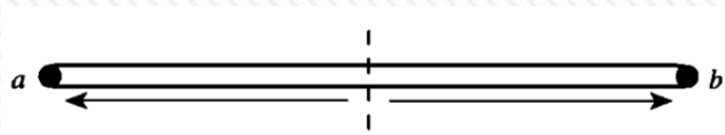
$\gamma : \text{kg/m}^3$ (massa específica)

Respostas Dinâmicas

Matriz de Massa *Lumped* (massa concentrada; “amontoadora”)

Matriz alternativa, concentrar a massa em seus nós, para cada elemento “e”.

$$m^e = \frac{\rho \cdot L}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$m_{rot}^e = \frac{\rho \cdot L}{2} \left(\frac{I}{A} + \frac{L^2}{12} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz com vantagem p/ montagem, economia de memória e processamento.

Matriz de Massa *Lumped* (massa concentrada; “amontoadora”)

É interessante seu uso para aplicações onde simulam-se massas não-estruturais, como na engenharia aeronáutica, considerando massas concentradas devidos a: cargas, combustíveis, etc..

The first appearance of a mass matrix in a journal article occurs in two early-1930s papers⁵ by Duncan and Collar [34,35]. There it is called “inertia matrix” and denoted by $[m]$. The original example [34, p. 869] displays the 3×3 diagonal mass of a triple pendulum. In the book [55] the notation changes to A .

Diagonally lumped mass matrices (DLMM) dominate pre-1963 work. Computational simplicity was not the only reason. Direct lumping gives an obvious way to account for *nonstructural masses* in simple discrete models of the spring-dashpot-particle variety. For example, in a multistory building “stick model” wherein each floor is treated as one DOF in lateral sway under earthquake or wind action, it is natural to take the entire mass of the floor (including furniture, isolation, etc.) and assign it to that freedom. Nondiagonal masses pop-up occasionally in aircraft matrix analysis — e.g. wing oscillations in [55, §10.11] — as a result of measurements. As such they necessarily account for nonstructural masses due to fuel, control equipment, etc.

Matriz de Massa Consistente

The formulation of the consistent mass matrix (CMM) by Archer [6,7] was a major advance. All CMMs displayed in §31.3 were first derived in those papers. The underlying idea is old. In fact it follows directly from the 18th-Century Lagrange dynamic equations [84], a proven technique to produce generalized masses.

These had to wait until three things became well established by the early 1960s: (i) the Direct Stiffness Method, (ii) the concept of shape functions, and (iii) the FEM connection to Rayleigh-Ritz. The critical ingredient (iii) was established in Melosh's thesis [97] under Harold Martin. The link to dynamics was closed with Archer's contributions, and CMM became a staple of FEM. But only a loose staple. Problems persisted:

- (a) Nonstructural masses are not naturally handled by CMM. In systems such as ships or aircraft, the structural mass is only a fraction (10 to 20%) of the total.
- (b) It is inefficient in some solution processes, notably explicit dynamics.⁶
- (c) It may not give the best results compared to other alternatives.⁷
- (d) For elements derived outside the assumed-displacement framework, the stiffness shape functions may be unknown or be altogether missing.

Problem (a) can be addressed by constructing "rigid mass elements" accounting for inertia (and possibly gravity or centrifugal forces) but no stiffness. Nodes of these elements must be linked to structural (elastic)

nodes by MFC constraints that enforce kinematic constraints. This is more of an implementation issue than a research topic, although numerical difficulties typical of rigid body dynamics may crop up.

Problems (b,c,d) can be attacked by parametrization. The father of NASTRAN, Dick MacNeal, was the first to observe [87,90] that averaging the DLMM and CMM of the 2-node bar element produced better results than using either alone. This idea was further studied by Belytschko and Mullen [163] using Fourier analysis. Krieg and Key [171] had emphasized that in transient analysis the introduction of a time discretization operator brings new compensation phenomena, and consequently the time integrator and the mass matrix should be not be chosen separately.

A good discussion of mass diagonalization schemes can be found in the textbook by Cook et al. [28].

The template approach addresses the problems by allowing and encouraging full customization of the mass to the problem at hand. It was first described in [47,48] for a Bernoulli-Euler plane beam using Fourier methods. It is presented in more generality in the following Chapter, where it is applied to other elements. The general concept of template as parametrized form of FEM matrices is discussed in [46].

Matriz de Massa: Combinação entre a *Lumped* e a Consistente



ELSEVIER

Computers & Structures

Volume 46, Issue 6, 17 March 1993, Pages 1041-1048



A review of mass matrices for eigenproblems

Ki-ook Kim

 **Show more**

[https://doi.org/10.1016/0045-7949\(93\)90090-Z](https://doi.org/10.1016/0045-7949(93)90090-Z)

[Get rights and content](#)

Abstract

Various nonconsistent mass matrices have been presented to achieve more accurate natural frequencies in eigenproblems of the finite element analysis. The matrices are obtained as a linear combination of lumped and consistent mass matrices. For an improved accuracy, the consistent mass should be more weighted than the lumped mass. Instead of the mass combination, the interpolation functions can be combined to give nonconsistent mass matrices, which show the same tendency. To find a nonsingular lumped mass matrix for the bending vibration of beams, a translational inertia has been proposed for rotational degrees of freedom. The inertia effect is highly overestimated and hence lower natural frequencies are obtained. When combined with the consistent mass matrix, however, the modified lumped mass matrix gives a significant improvement for the natural frequencies of intermediate and higher modes. A simple corrective method was applied to get a better estimation of the natural frequencies through the use of the frequency dependent stiffness and mass matrices. The method shows high accuracy without complicated calculations.

Respostas Dinâmicas

Matriz de Massa Global:

Como se faz para a matriz de rigidez **sistema global**:

$$[M]_{6 \times 6}^e = [[R]^T]^e \cdot [m]^e \cdot [R]^e$$

Matriz de Massa Global: Endereçamento idem.

$$[Mest]_{3nn \times 3nn} = \sum_{e=1}^{ne} [M]_{6 \times 6}^e$$

Elemento ne :
Nó inicial $\rightarrow j$
Nó final $\rightarrow k$

Nó Global	Posição Local	Posição Global
j	1	$3 \cdot j - 2$
	2	$3 \cdot j - 1$
	3	$3 \cdot j$
k	4	$3 \cdot k - 2$
	5	$3 \cdot k - 1$
	6	$3 \cdot k$

Respostas Dinâmicas

As equações para o movimento então pode ser representadas matricialmente, após inserir as condições de contorno da estrutura, e são dadas por:

$$[K] \cdot \{U\} + [M] \cdot \{\ddot{U}\} = \{F\}$$

Onde as condições de contorno podem ser inseridas nas matrizes $[K]$ e $[M]$ da maneira usual, por exemplo, pela técnica de “zeros” e “uns”, não **usar penalidade**.

Análise de Vibração Livre:

As equações para o movimento livre, após inserir as condições de contorno da estrutura, são dadas por:

$$[K] \cdot \{U\} + [M] \cdot \{\ddot{U}\} = \{0\}$$

Considerando movimento harmônico: $U = \phi \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$

Com ϕ e ω sendo, respectivamente, os modos fundamentais de vibração e suas frequências naturais.

De modo que se leva a resolução do auto-problema:

$$([K] - \omega^2 \cdot [M]) \cdot \phi = \{0\}$$

Como ϕ é não-trivial, assim:

Análise de Vibração Livre:

Como ϕ é não-trivial, assim: $|[K] - \omega^2 \cdot [M]| = 0$

E tomando:

$$\omega^2 = \lambda$$

Chega-se a equação característica: $|[K] - \lambda \cdot [M]| = 0$

E λ são os auto-valores dessa equação. A estrutura tem seu modo de vibração, ϕ , associado a cada um *dos auto-valores*, λ :

Existem vários algoritmos para resolver esse auto-problema na literatura.

Análise de Vibração Livre:

- Os diferentes tipos de matriz de massa levam a diferenças suaves no cálculo dos auto-valores;
- Não há indicação definitiva de qual matriz é melhor para quaisquer problema em estruturas;
- Com o uso dessa matriz lumped (“amontoadora”), a convergência para a solução exata dos auto-valores acontece por baixo;
- Os auto-valores obtidos com o uso da matriz de massa consistente levam a valores maiores que os exatos. Esse tipo de matriz leva respostas mais precisas para problemas de flexão.

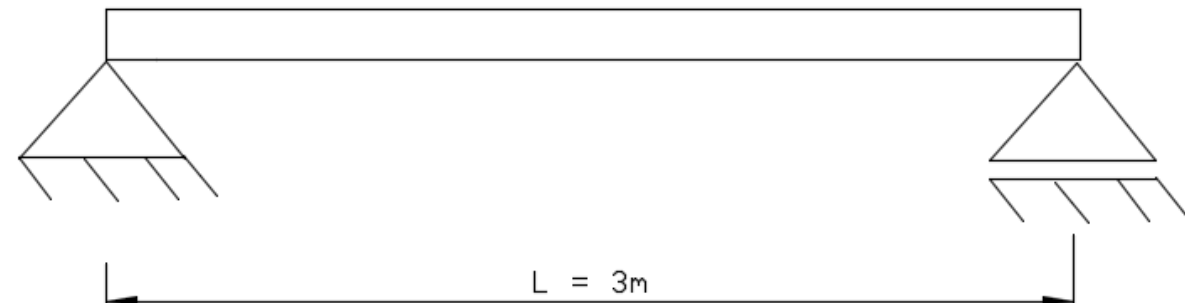
Análise de Vibração Livre: Comparar MEF com Solução analítica de uma viga bi-apoiada

Solução analítica de uma viga bi-apoiada:

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \rightarrow n = 1, 2, \dots$$

E: Modulo de Young em N/m²;
ρ: massa especifica em kg/m³

E = 31 000 MPa ρ = 2500 kg/m³
I = 6,4 E-4 m⁴ A = 0,048 m² Seção (12cm x 40cm)



Solução analítica de uma viga bi-apoiada:

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \rightarrow n = 1, 2, \dots$$

$E = 31\text{E}9 \text{ N/m}^2$; $L = 3 \text{ m}$; $I = 6,4\text{E}-4 \text{ m}^4$; $A = 0,048 \text{ m}^2$, $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$

$\omega_1 = 445,9 \text{ rad/s}$ ou $f_1 = \omega_1/(2\pi) = \mathbf{70,97 \text{ Hz}}$

$\omega_2 = 1.783,6 \text{ rad/s}$ ou $f_2 = \omega_2/(2\pi) = \mathbf{283,9 \text{ Hz}}$

Matriz Consistente

MEF:
2 EF:

	Freq(rad/s)	Freq(Hz)
AUTOVALOR(1)=	570.80	90.85
AUTOVALOR(2)=	1891.46	301.04
AUTOVALOR(3)=	1979.65	315.07
AUTOVALOR(4)=	3902.52	621.11
AUTOVALOR(5)=	6607.61	1051.63
AUTOVALOR(6)=	9071.89	1443.84

MEF:
10 EF:

	Freq(rad/s)	Freq(Hz)
AUTOVALOR(1)=	1.00	0.16
AUTOVALOR(2)=	451.36	71.84
AUTOVALOR(3)=	1845.68	293.75
AUTOVALOR(4)=	1871.38	297.84
AUTOVALOR(5)=	4457.16	709.38
AUTOVALOR(6)=	5582.66	888.51
AUTOVALOR(7)=	8507.34	1353.99
AUTOVALOR(8)=	9457.30	1505.18
AUTOVALOR(9)=	13562.16	2158.48

Solução analítica de uma viga bi-apoiada:

$$E = 31\text{E}9 \text{ N/m}^2 ; L = 3 \text{ m}; I = 6,4\text{E}-4 \text{ m}^4 ; A = 0,048 \text{ m}^2 , \rho = 2500 \text{ kg/m}^3$$

$$\omega_1 = 445,9 \text{ rad/s} \quad \text{ou } f_1 = \omega_1/(2\pi) = \mathbf{70,97 \text{ Hz}}$$

$$\omega_2 = 1.783,6 \text{ rad/s} \quad \text{ou } f_2 = \omega_2/(2\pi) = \mathbf{283,9 \text{ Hz}}$$

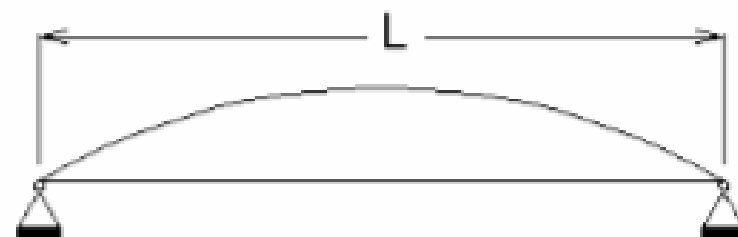
MEF: 10 EF

Matriz Lumped

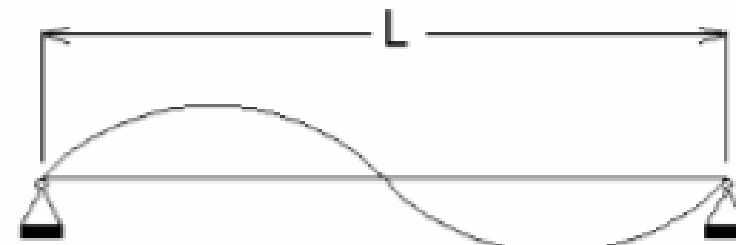
**MEF:
2 EF**

	Freq(rad/s)	Freq(Hz)
AUTOVALOR(1)=	401.99	63.98
AUTOVALOR(2)=	1209.77	192.54
AUTOVALOR(3)=	1796.76	285.96
AUTOVALOR(4)=	1883.95	299.84
AUTOVALOR(5)=	2095.37	333.49
AUTOVALOR(6)=	4337.75	690.38

	Freq(rad/s)	Freq(Hz)
AUTOVALOR(1)=	440.89	70.17
AUTOVALOR(2)=	1707.01	271.68
AUTOVALOR(3)=	1841.89	293.15
AUTOVALOR(4)=	3650.90	581.06
AUTOVALOR(5)=	5480.31	872.22
AUTOVALOR(6)=	6079.71	967.62
AUTOVALOR(7)=	8790.46	1399.05
AUTOVALOR(8)=	8983.78	1429.81
AUTOVALOR(9)=	11582.15	1843.36
AUTOVALOR(10)=	12266.05	1952.20



primeiro modo



segundo modo

RESPOSTAS FORÇADAS

$$[K] \cdot \{U(t)\} + [C] \cdot \{\dot{U}(t)\} + [M] \cdot \{\ddot{U}(t)\} = \{F(t)\}$$

Amortecimento viscoso ou proporcional

A parcela de amortecimento surge em decorrência de dois tipo:

Amortecimento Interno: Ocorre no material, devido a micro defeitos, deslizamentos de cristais, etc.

Amortecimento externo: devido aos efeitos de contorno, contato entre diferentes corpos, como edifício e solo, impactos entre meios, etc.

MATRIZ DE AMORTECIMENTO DE RAYLEIGH

Matriz formulada considerando desacoplamento entre as eq. de movimento devidos aos diferentes modos, ou seja, condição de ortogonalidade entre diferentes modos:

$$\varphi_m^T \cdot m \cdot \varphi_n = 0 \qquad \varphi_m^T \cdot k \cdot \varphi_n = 0 \qquad m \neq n$$

Considera-se também essa condição para a matriz de amortecimento:

$$\varphi_m^T \cdot c \cdot \varphi_n = 0$$

Rayleigh mostrou que essa matriz poderia ser escrita da forma:

$$[C] = a_0 \cdot [M] + a_1 \cdot [K] \qquad \text{ou} \qquad [C] = \alpha \cdot [M] + \beta \cdot [K]$$

Onde os fatores a_0 e a_1 são determinados experimentalmente.



MATRIZ DE AMORTECIMENTO DE RAYLEIGH

Os fatores a_1 e a_0 podem também serem calculadas em função das duas primeiras frequências naturais obtidas pela análise modal (ω_1 e ω_2), da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{Bmatrix} = 2 \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \begin{bmatrix} -1/\omega_2 & 1/\omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix}$$

$\xi = \frac{c}{c_c}$: razão de amortecimento

Para estruturas, é comum esses valores serem menores que 20%

SISTEMA	ξ
Metal (regime elástico)	< 0.01
Estrutura Metálica Contínua	0.02 a 0.04
Estrutura Metálica com Juntas	0.03 a 0.07
Alumínio / Linhas de Transmissão	0.0004
Tubulação com Pequenos Diâmetros	0.01 a 0.02
Tubulação com Grandes Diâmetros	0.02 a 0.03
Absorvedores de Choque	0.03
Borracha	0.05
Grandes Construções Durante Terremotos	0.01 a 0.05

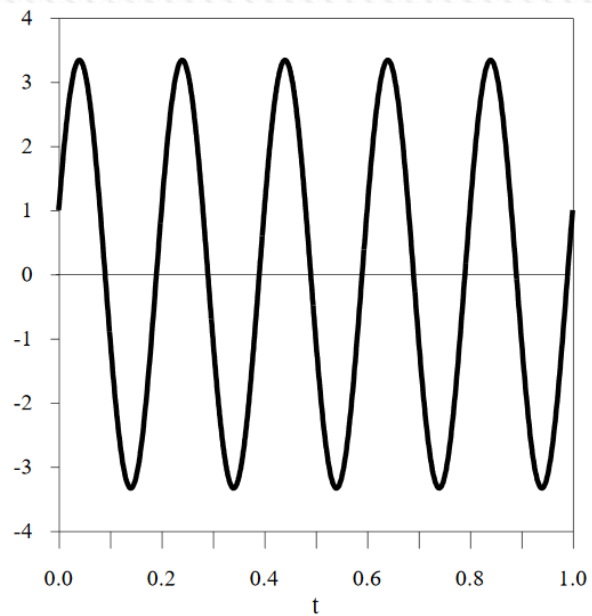
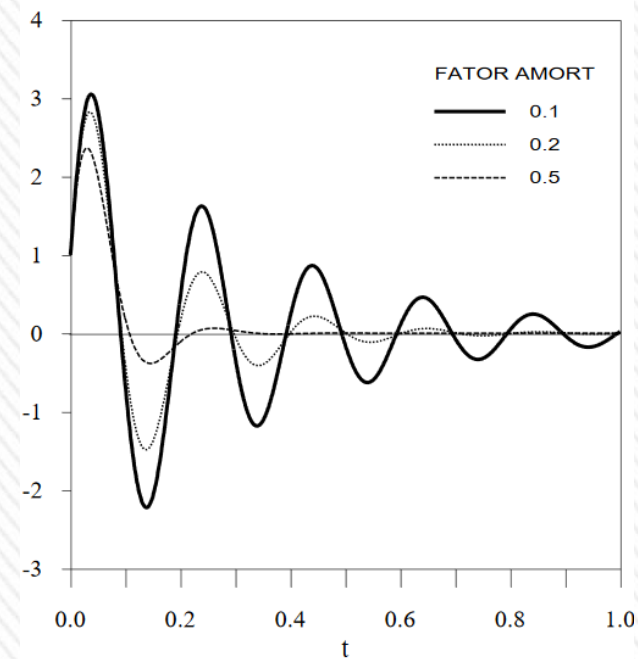
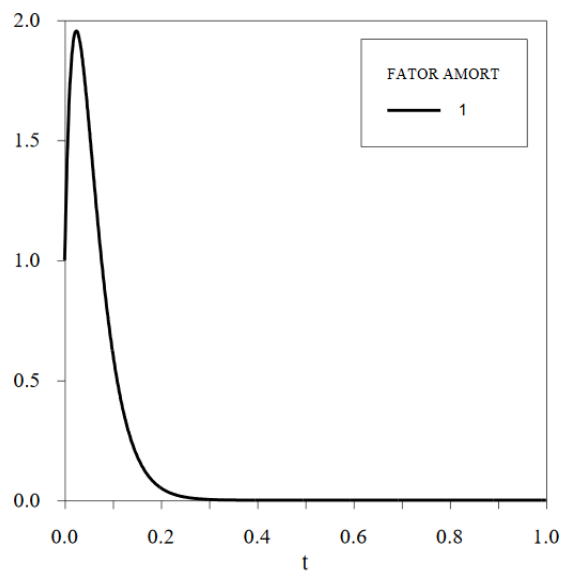


Figura 2.1 - Vibração livre de sistemas não amortecidos.



a 2.2 - Vibração livre de sistemas subamortecidos.



ura 2.3 - Vibração livre de sistemas com amortecimento

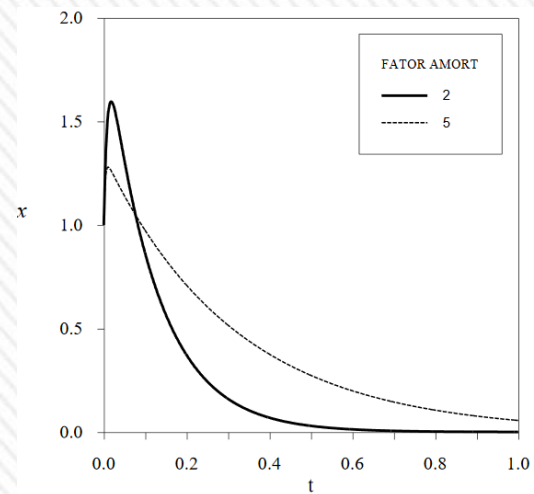


Figura 2.4 - Vibração livre de sistemas sobreamortecidos.

RESPOSTAS FORÇADAS

$$[K] \cdot \{U(t)\} + [C] \cdot \{\dot{U}(t)\} + [M] \cdot \{\ddot{U}(t)\} = \{F(t)\}$$

Pode ser resolvida por **superposição modal** para análise linear ou usando **integração direta**, via aproximações em passos de tempo.

Inicia-se com a prescrições de condições iniciais, tais como:

$$U_0 = 0 \quad e \quad \dot{U}_0 = 0$$

MÉTODO DA INTEGRAÇÃO DIRETA

CLASSIFICAM-SE EM:

❑ *INTEGRAÇÃO EXPLÍCITA*

Equação de equilíbrio é resolvida em (t)

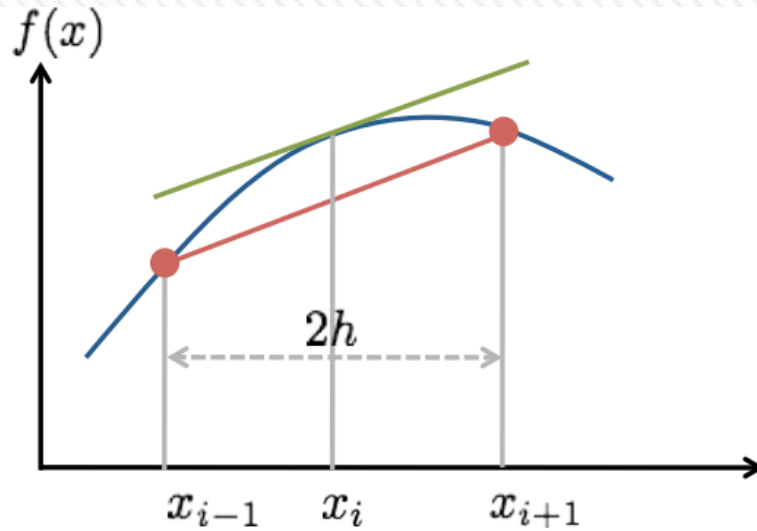
Exemplo: Diferença Central

❑ *INTEGRAÇÃO IMPLÍCITA*

Equação de equilíbrio é resolvida em (t+ Δt)

Exemplos: Método de Houbolt, Método de Wilson θ , Método de Newmark β

MÉTODO DA DIFERENÇA CENTRAL



$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + \dots$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

Diferença central é mais precisa conforme o erro seja $\mathcal{O}(h^2)$

MÉTODO DA DIFERENÇA CENTRAL

Qualquer expressão de diferenças finitas que aproxima $\dot{U}$ e $\ddot{U}$ em termos de U podem ser usadas

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U}_i + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}}_i + \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}}_i = \mathbf{p}_i$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U(t = 0) = U_0 \\ \dot{U}(t = 0) = \dot{U}_0 \\ \ddot{U}(t = 0) = \ddot{U}_0 \end{array} \right.$$

Diferença centrada:

$$\dot{U}_n = \frac{1}{2\Delta t} \cdot [U_{n+1} - U_{n-1}] \quad (1)$$

$$\ddot{U}_n = \frac{1}{\Delta t^2} \cdot [U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}] \quad (2)$$

MÉTODO DA DIFERENÇA CENTRAL

O deslocamento em $(n+1)\Delta t$ é obtido substituindo os valores no tempo $(n)\Delta t$ em (1) e (2), na equação do movimento:

$$[K] \cdot U_n + [C] \cdot \dot{U}_n + [M] \cdot \ddot{U}_n = \bar{F}_n \quad (3)$$

Assim, chega-se a:

$$[K] \cdot U_n + [C] \cdot \left\{ \frac{1}{2\Delta t} \cdot [U_{n+1} - U_{n-1}] \right\} + [M] \cdot \left\{ \frac{1}{\Delta t^2} \cdot [U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}] \right\} = \bar{F}_n \quad (4)$$

Que pode ser organizada como:

$$\left[K - \frac{2}{\Delta t^2} M \right] \cdot U_n + \left[\frac{C}{2\Delta t} + \frac{M}{\Delta t^2} \right] \cdot U_{n+1} + \left[\frac{M}{\Delta t^2} - \frac{C}{2\Delta t} \right] \cdot U_{n-1} = \bar{F}_n \quad (5)$$

MÉTODO DA DIFERENÇA CENTRAL

E o deslocamento no tempo $(n+1)\Delta t$ é obtido isolando-o em (5), como:

$$\left[\frac{C}{2\Delta t} + \frac{M}{\Delta t^2}\right] \cdot U_{n+1} = \bar{F}_n - \left[K - \frac{2}{\Delta t^2} M\right] \cdot U_n - \left[\frac{M}{\Delta t^2} - \frac{C}{2\Delta t}\right] \cdot U_{n-1}$$

Ou de maneira sintética:

$$[\hat{K}] \cdot U_{n+1} = \hat{F}_{n+1} \quad (6)$$

$$\text{Com: } [\hat{K}] = \left[\frac{C}{2\Delta t} + \frac{M}{\Delta t^2}\right] \quad \hat{F}_{n+1} = \bar{F}_n - \left[K - \frac{2}{\Delta t^2} M\right] \cdot U_n - \left[\frac{M}{\Delta t^2} - \frac{C}{2\Delta t}\right] \cdot U_{n-1}$$

Resolve-se, para cada passo de tempo, o sistema linear (6), contendo o seu deslocamento.

MÉTODO DA DIFERENÇA CENTRAL

Para 1º. passo: $U_{-1} = ?$

$$\ddot{U}_n = \frac{1}{\Delta t^2} \cdot [U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}] \rightarrow U_{n-1} = \ddot{U}_n \cdot \Delta t^2 + 2U_n - U_{n+1}$$

$n = 0$

$$U_{-1} = U_0 - \dot{U}_0 \cdot \Delta t + 0,5 \cdot \ddot{U}_0 \cdot \Delta t^2$$

FLUXOGRAMA: DIFERENÇA CENTRAL

1. Calcule as freq. naturais (ω). Defina $\Delta t \leq \frac{2}{\max(\omega)}$

2. Defina: $K, M, C, F(t), t_{\text{final}}, U_0, \dot{U}_0$ e calcule: $\ddot{U}_0$ e U_{-1}

3. Calcule uma única vez:

$$[\hat{K}] = [R2] = \left[\frac{C}{2\Delta t} + \frac{M}{\Delta t^2} \right], [R3] = \left[\frac{M}{\Delta t^2} - \frac{C}{2\Delta t} \right] \text{ e } [R4] = \left[K - \frac{2}{\Delta t^2} M \right]$$

4. $t_i = 0, n = 0$

5. Enquanto $t_i \leq t_{\text{final}}$ faça:

a. $\hat{F}_{n+1} = \bar{F}(t_i)_n - [R4] \cdot U_n - [R3] \cdot U_{n-1}$

b. Resolva sistema linear: $[R2] \cdot U_{n+1} = \hat{F}_{n+1}$

c. $n = n + 1; t_i = t_i + \Delta t$

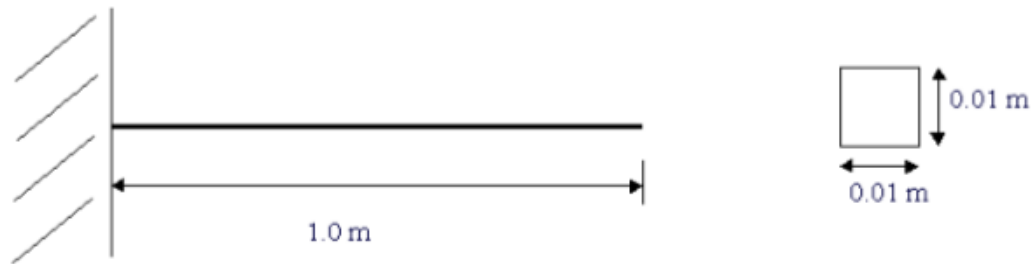
6. Fim enquanto

Viga em balanço com Força de Impulso sem amortecimento

Transient Analysis of a Cantilever Beam

Introduction

This tutorial was created using ANSYS 7.0 The purpose of this tutorial is to show the steps involved to perform a simple transient analysis.



Modulus of Elasticity (E) = $206800(10^6)$ N/m²

Density = 7830 kg/m³

Transient dynamic analysis is a technique used to determine the dynamic response of a structure under a time-varying load.

The time frame for this type of analysis is such that inertia or damping effects of the structure are considered to be important. Cases where such effects play a major role are under **step** or **impulse** loading conditions, for example, where there is a sharp load change in a fraction of time.

If inertia effects are negligible for the loading conditions being considered, a static analysis may be used instead.

For our case, we will impact the end of the beam with an impulse force and view the response at the location of impact.

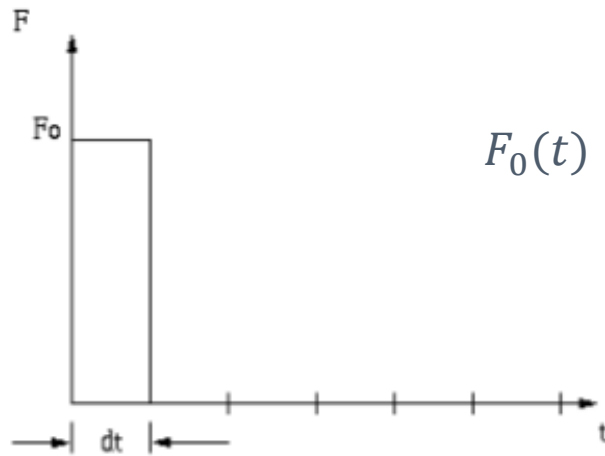
Sem amortecimento

$$[C] = [0]$$

Viga em balanço com Força de Impulso sem amortecimento



Since an ideal impulse force excites all modes of a structure, the response of the beam should contain all mode frequencies. However, we cannot produce an ideal impulse force numerically. We have to apply a load over a discrete amount of time dt .

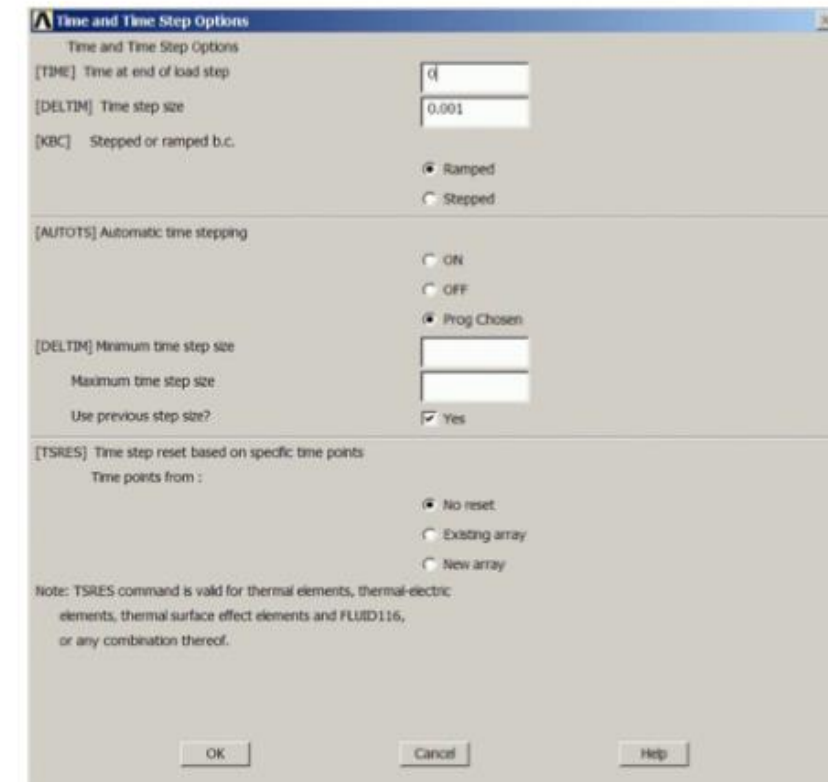


$$F_0(t) = 100N$$

$$dt = 0,001 \text{ seg.}$$

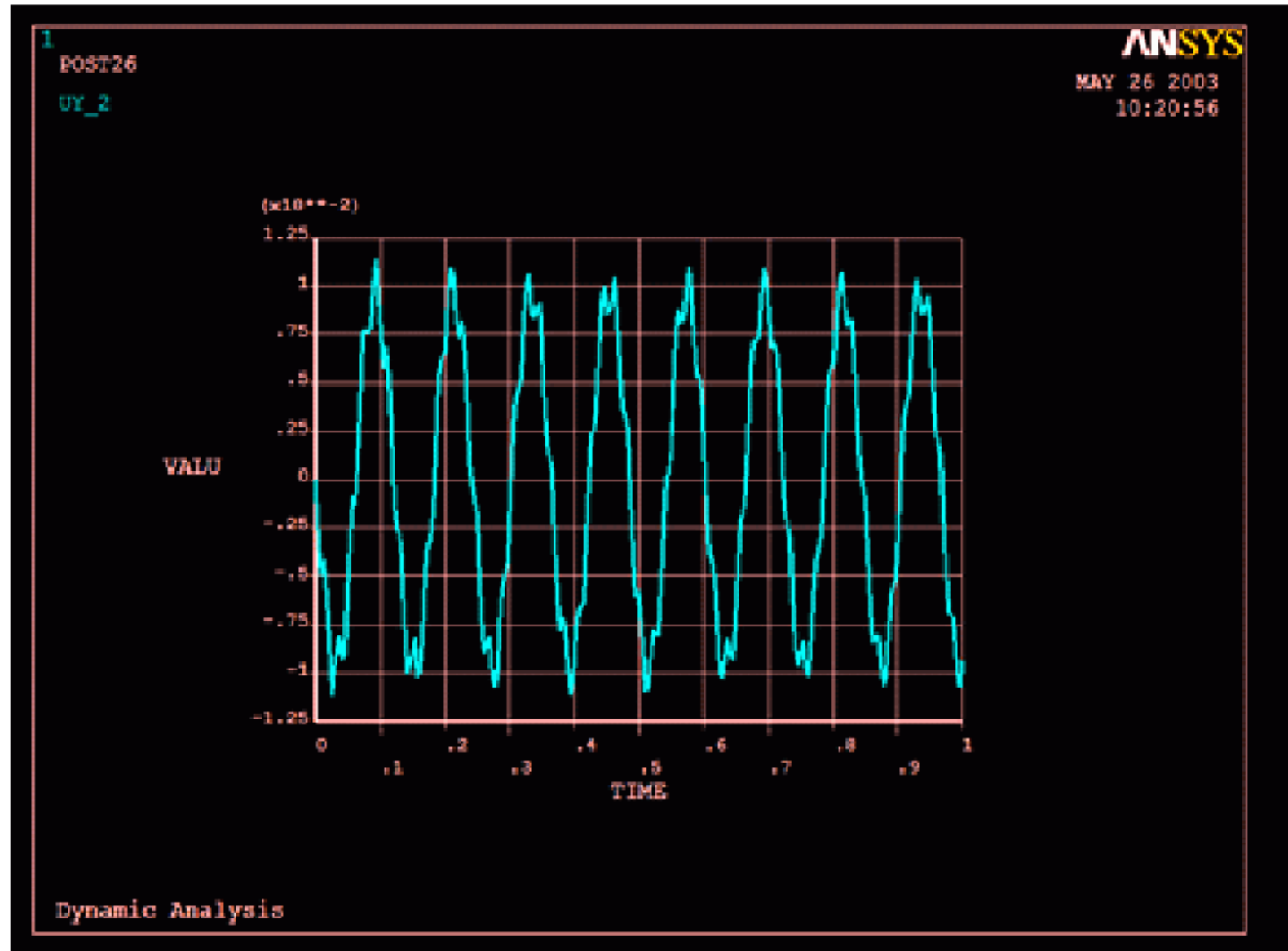
ii. Specify Time and Time Step Options

- Select **Solution > Load Step Opts > Time/Frequenc > Time - Time Step**
 - set a time of 0 for the end of the load step (as shown below).
 - set [DELTIM] to 0.001. This will specify a time step size of 0.001 seconds to be used for this load step.



Respostas para desloc. vertical do ponto extremo da viga

The following graph should be plotted in the main ANSYS window.



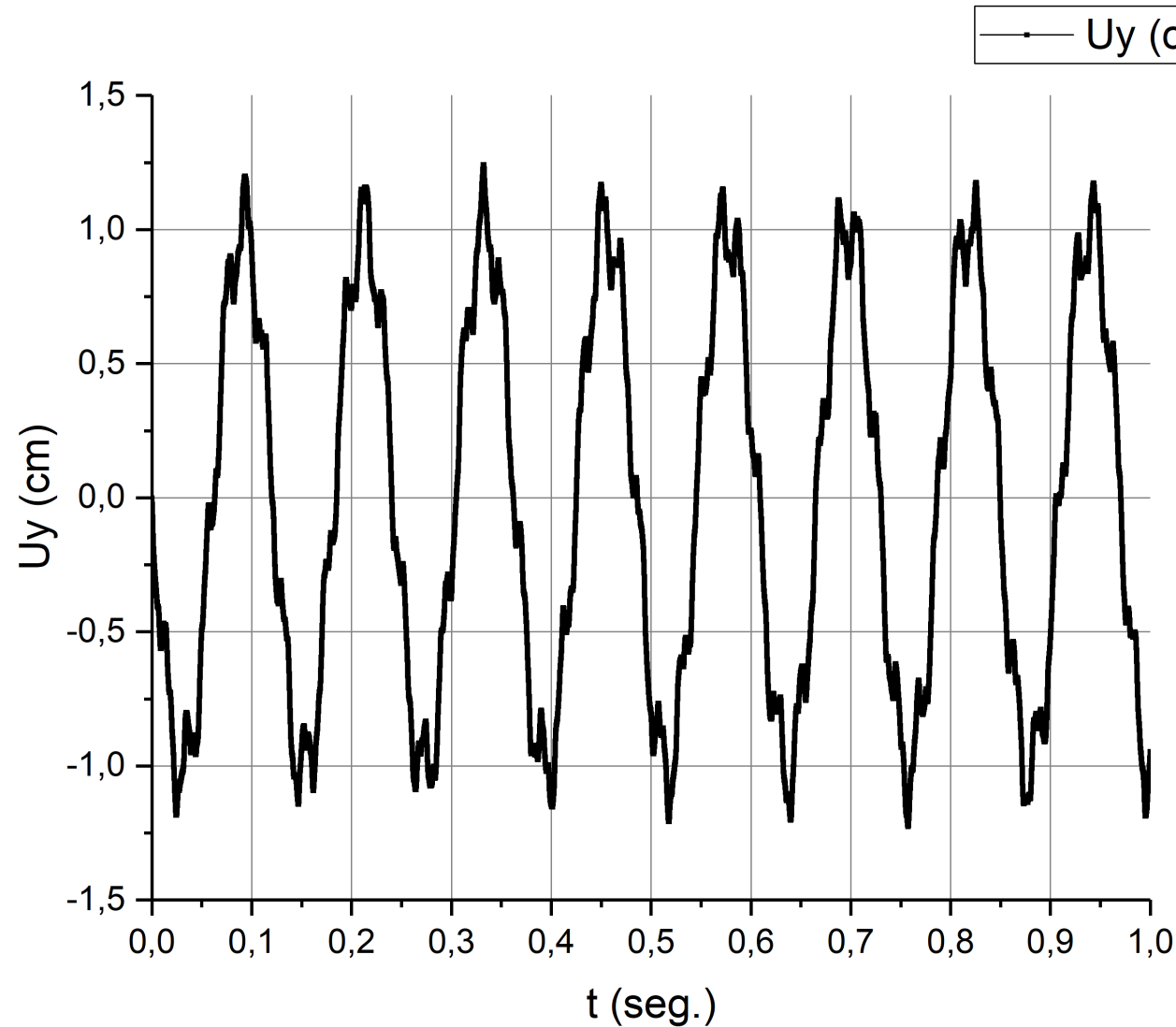
Viga em balanço com Força de Impulso sem amortecimento

Programa desenvolvido por Diferenças Centradas

```
Viga em balanço, exemplo do tutorial do Ansys.
NNOS
11
NÓ X Y
1 0 0
2 0.1 0
3 0.2 0
4 0.3 0
5 0.4 0
6 0.5 0
7 0.6 0
8 0.7 0
9 0.8 0
10 0.9 0
11 1.0 0
NÚMERO DE EL.
10
EL. NO_INICI NO_FINAL S E Iz COEF.DILAT TS TI H Massa especifica (massa/l3) MatrizConsistente(=1), Lumped(=0)
1 1 2 1e-4 2.068e11 8.3333e-10 1E-5 0 0 0.1 7830 0
2 2 3 1e-4 2.068e11 8.3333e-10 1E-5 0 0 0.1 7830 0
3 3 4 1e-4 2.068e11 8.3333e-10 1E-5 0 0 0.1 7830 0
4 4 5 1e-4 2.068e11 8.3333e-10 1E-5 0 0 0.1 7830 0
5 5 6 1e-4 2.068e11 8.3333e-10 1E-5 0 0 0.1 7830 0
6 6 7 1e-4 2.068e11 8.3333e-10 1E-5 0 0 0.1 7830 0
7 7 8 1e-4 2.068e11 8.3333e-10 1E-5 0 0 0.1 7830 0
8 8 9 1e-4 2.068e11 8.3333e-10 1E-5 0 0 0.1 7830 0
9 9 10 1e-4 2.068e11 8.3333e-10 1E-5 0 0 0.1 7830 0
10 10 11 1e-4 2.068e11 8.3333e-10 1E-5 0 0 0.1 7830 0
NÓS CARREG.
1
NO FX FY M
1 0. 0 0
NÚMERO DE EL. CARREG.
1
EL PX PY
1 0.0 0.0
NÚMERO DE NÓS VINC.
1
NÓ RESTX RESTY RESTZ
1 1 1 1
NÚMERO DE APOIOS ELÁSTICOS
1
NÓ MOLA(X) MOLA(Y) MOLA(Z)
1 0 0 0
N_ROTULAS
0
NOS ROTULADOS (SE NAO TEM -1)
-1
N_NOS_COM_RECALQUE_APOIO
1
NO RECX RECY RECZ
1 0 0 0
```

Viga em balanço com Força de Impulso sem amortecimento

Programa desenvolvido por Diferenças Centradas

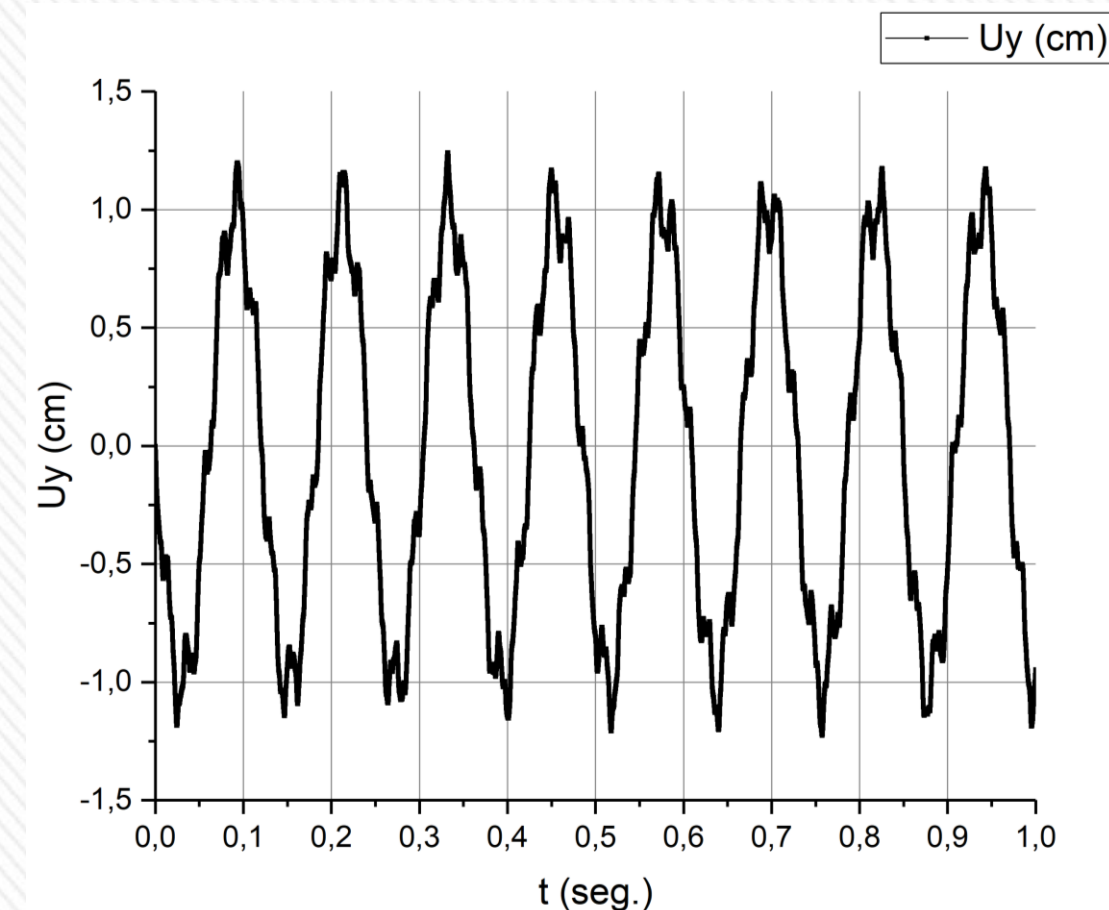
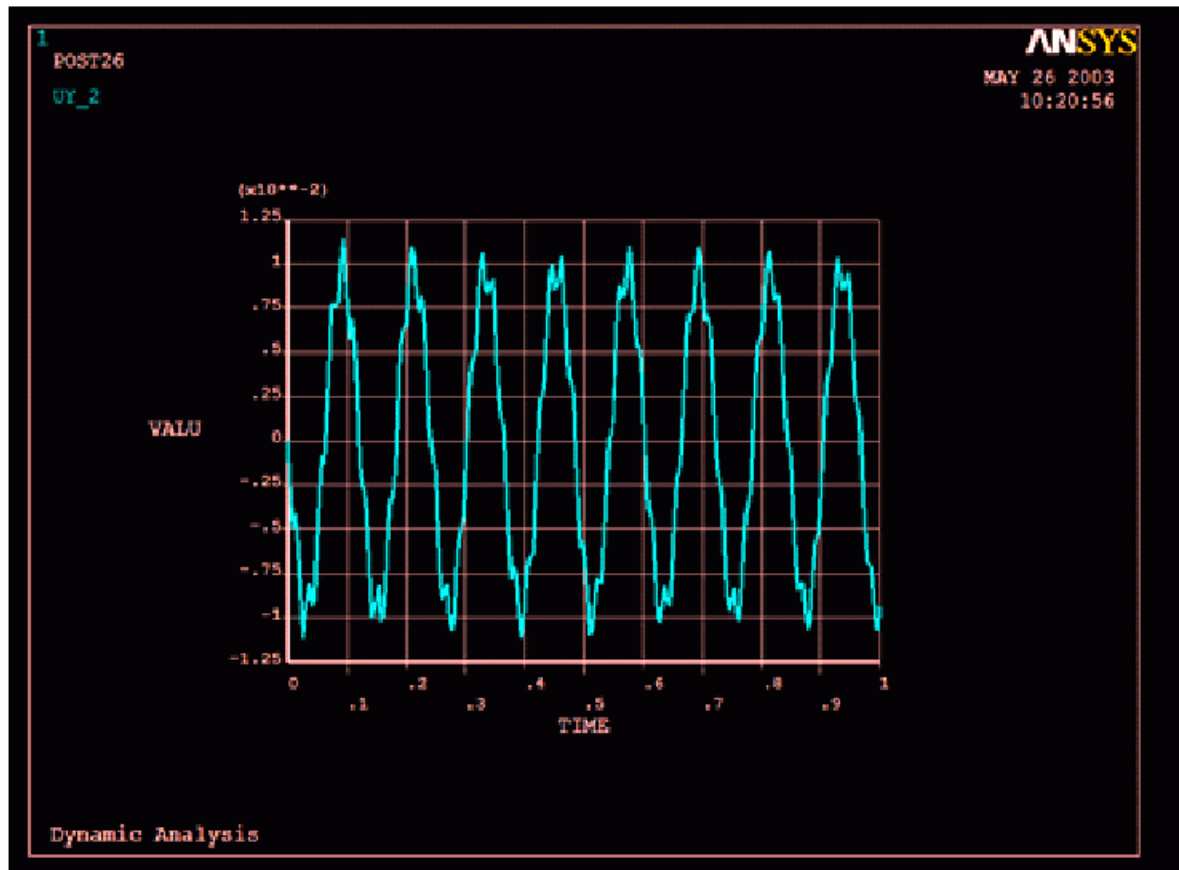


Viga em balanço com Força de Impulso sem amortecimento

Programa desenvolvido por Diferenças Centradas

Ansys x Meu Programinha (Diferença Central)

The following graph should be plotted in the main ANSYS window.



Viga em balanço com Força de Impulso com amortecimento

Damped Response of the Cantilever Beam

We did not specify damping in our transient analysis of the beam. We specify damping at the same time we specify our time & time steps for each load step.

We will now re-run our transient analysis, but now we will consider damping. Here is where the use of load step files comes in handy. We can easily change a few values in these files and re-run our whole solution from these load case files.

- Open up the first load step file (Dynamic.s01) for editing Utility Menu > File > List > Other > Dynamic.s01. The file should look like the following..

```
/COM,ANSYS RELEASE 5.7.1 UP20010418 14:44:02 08/20/2001
/NOPR
/TITLE, Dynamic Analysis
_LSNUM= 1
```

Copyright 2003 - University of Alberta

<http://www.mece.ualberta.ca/tutorials/ansys/IT/Transient/Transient.html>

```
ANTYPE, 4
TRNOPT,REDU,,DAMP
BFUNIF,TEMP,_TINY
DELTIM, 1.000000000E-03
TIME, 0.00000000
TREF, 0.00000000
ALPHAD, 0.00000000
BETAD, 0.00000000
DMPRAT, 0.00000000
TINTP,R5.0, 5.000000000E-03,,,
TINTP,R5.0, -1.00000000, 0.500000000, -1.00000000
NCNV, 1, 0.00000000, 0, 0.00000000, 0.00000000
ERESX,DEFA
ACEL, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000
OMEGA, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0
DOMEGA, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000
CGLOC, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000
CGOMEGA, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000
DCGOMG, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000

D, 1,UX, 0.00000000, 0.00000000
D, 1,UY, 0.00000000, 0.00000000
D, 1,ROTZ, 0.00000000, 0.00000000
/GOPR
```

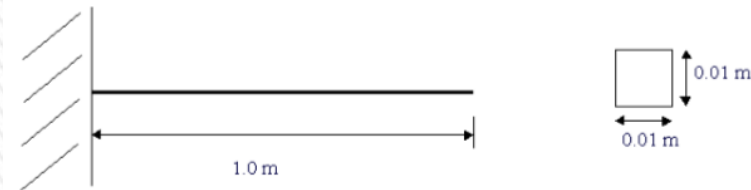
- Change the damping value BETAD from 0 to 0.01 in all three load step files.

$$[C] = 0,01 \cdot [K]$$

Transient Analysis of a Cantilever Beam

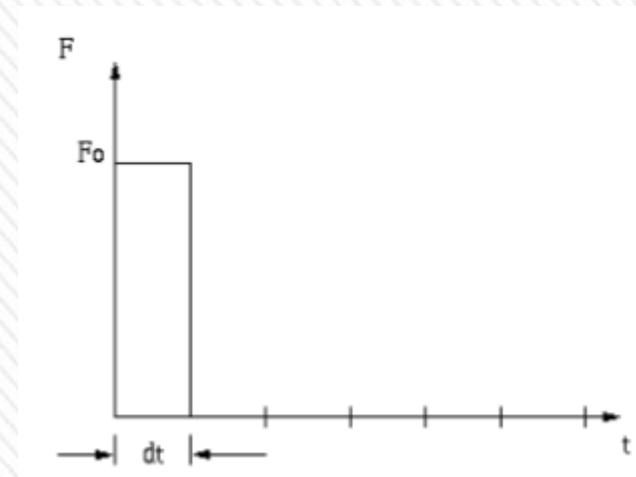
Introduction

This tutorial was created using ANSYS 7.0 The purpose of this tutorial is to show the steps involved to perform a simple transient analysis.



Modulus of Elasticity (E) = $206800(10^6)$ N/m²

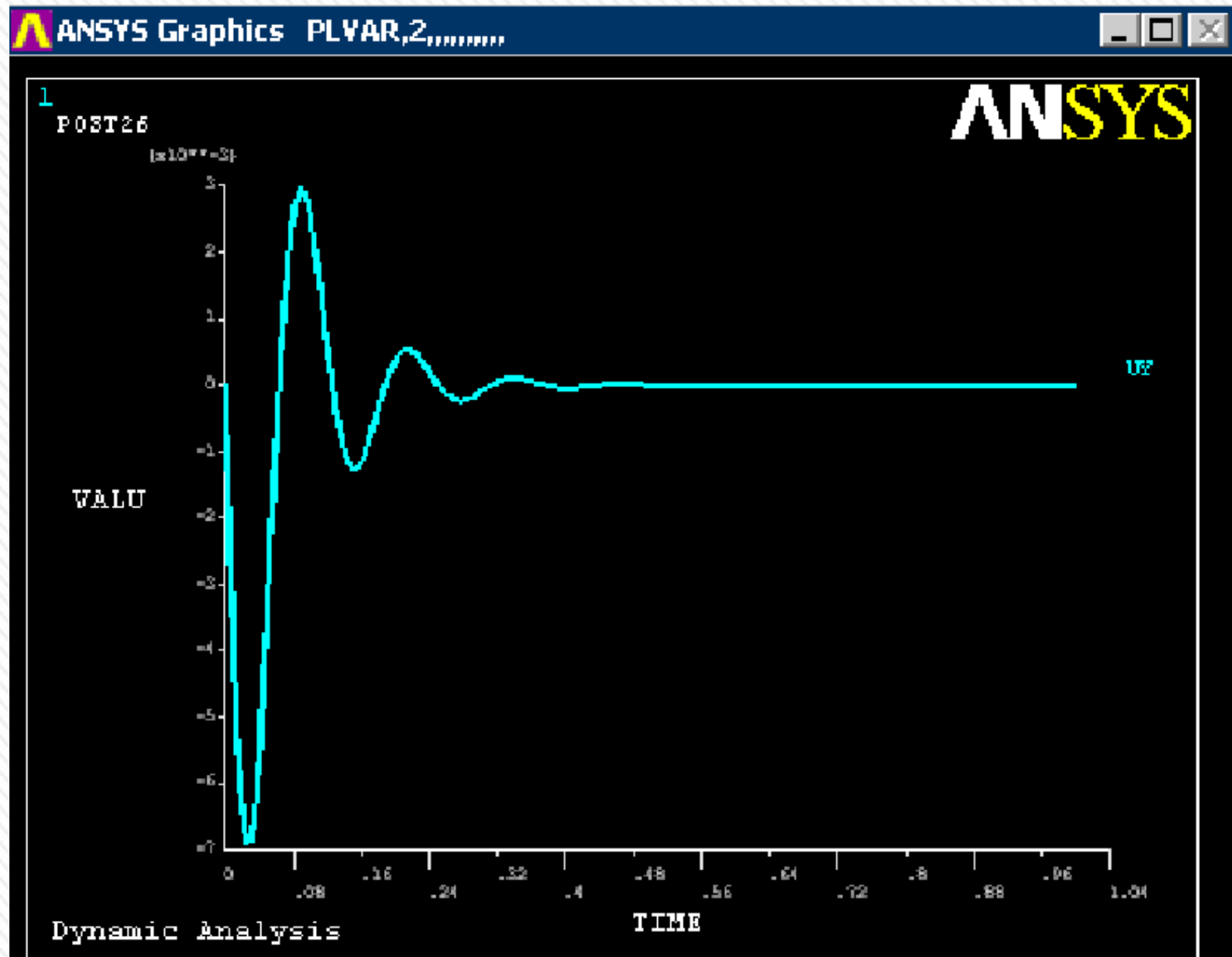
Density = 7830 kg/m³



$$dt = 0,001$$

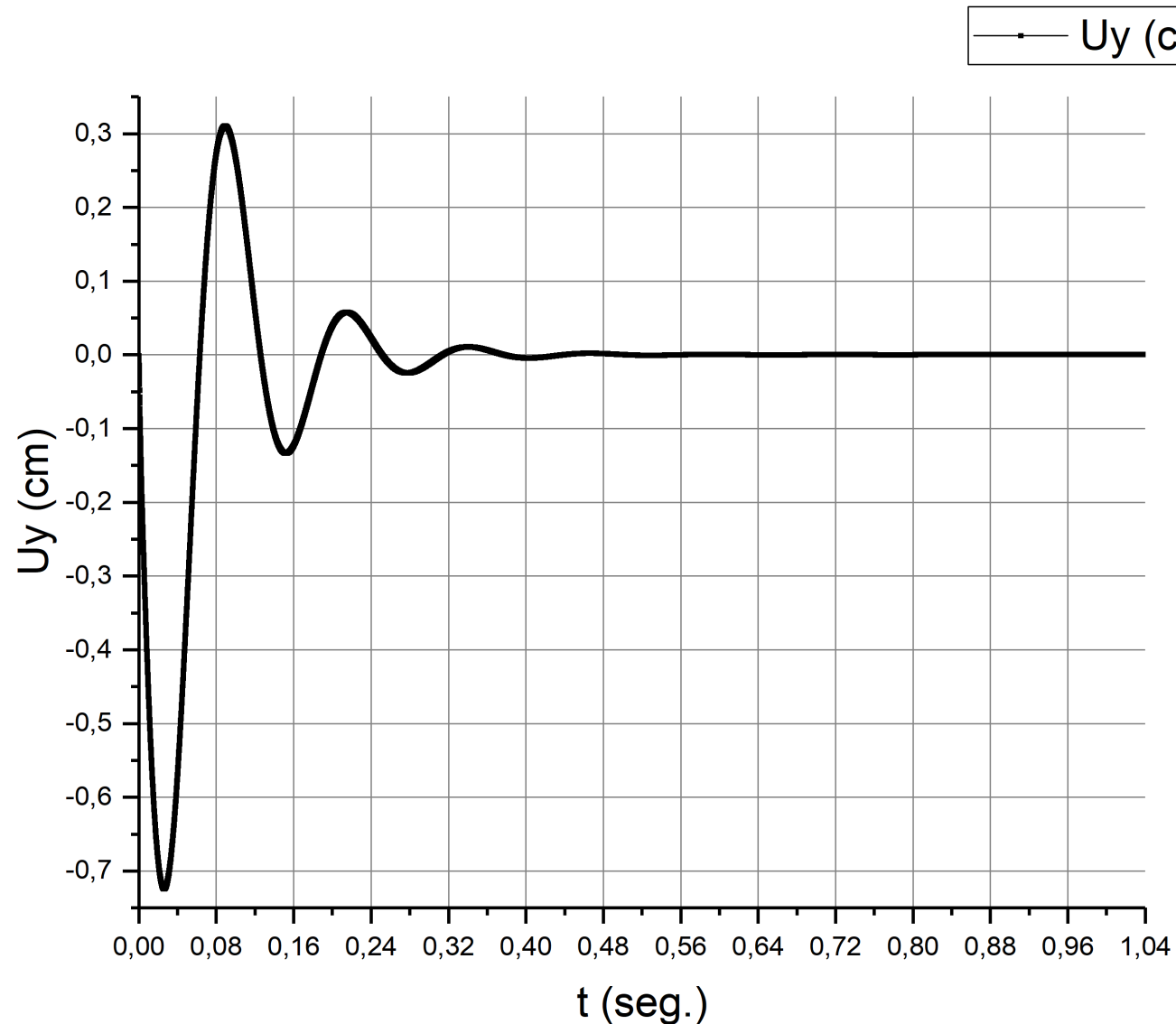
Viga em balanço com Força de Impulso com amortecimento

Respostas para desloc. vertical do ponto extremo da viga



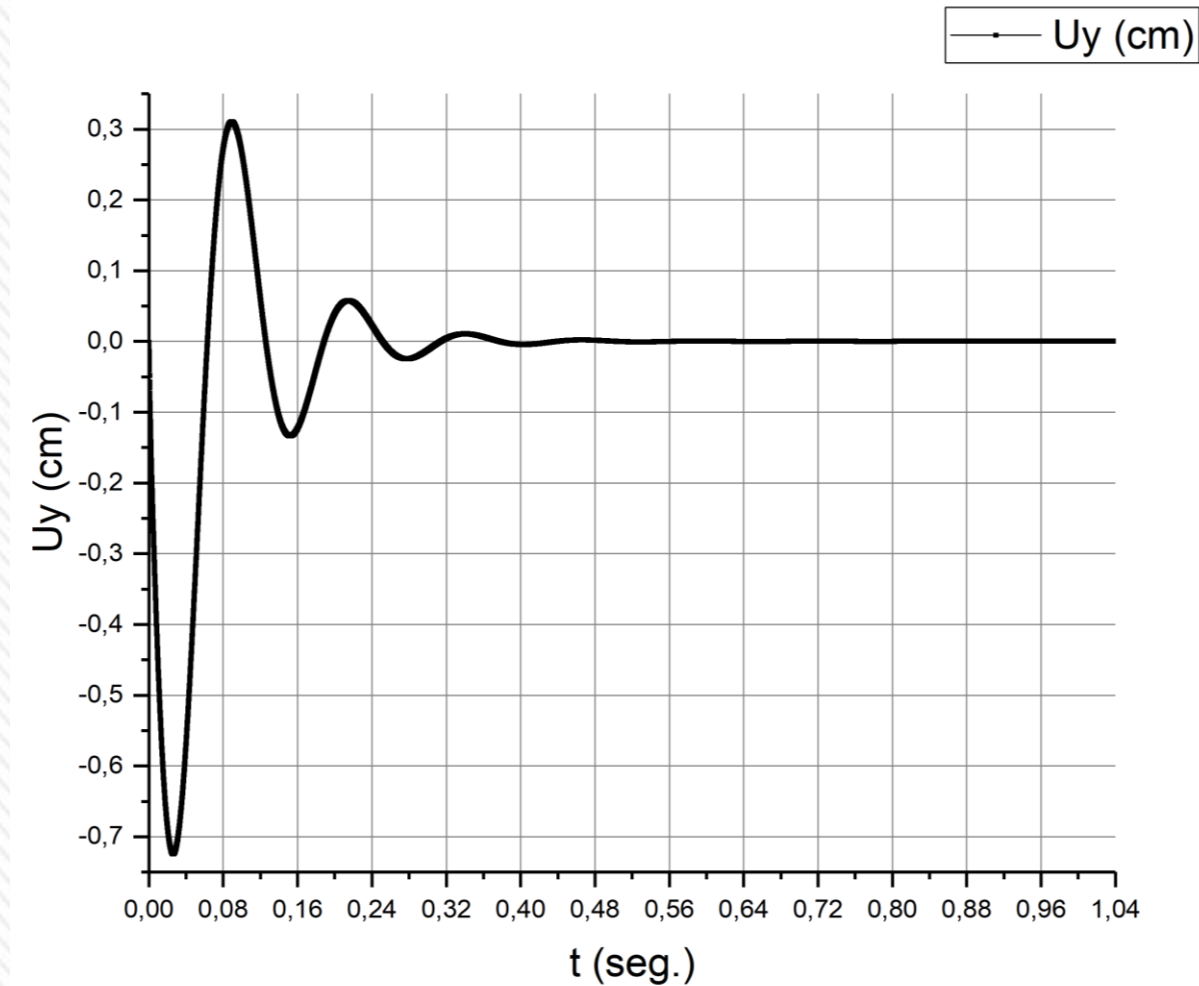
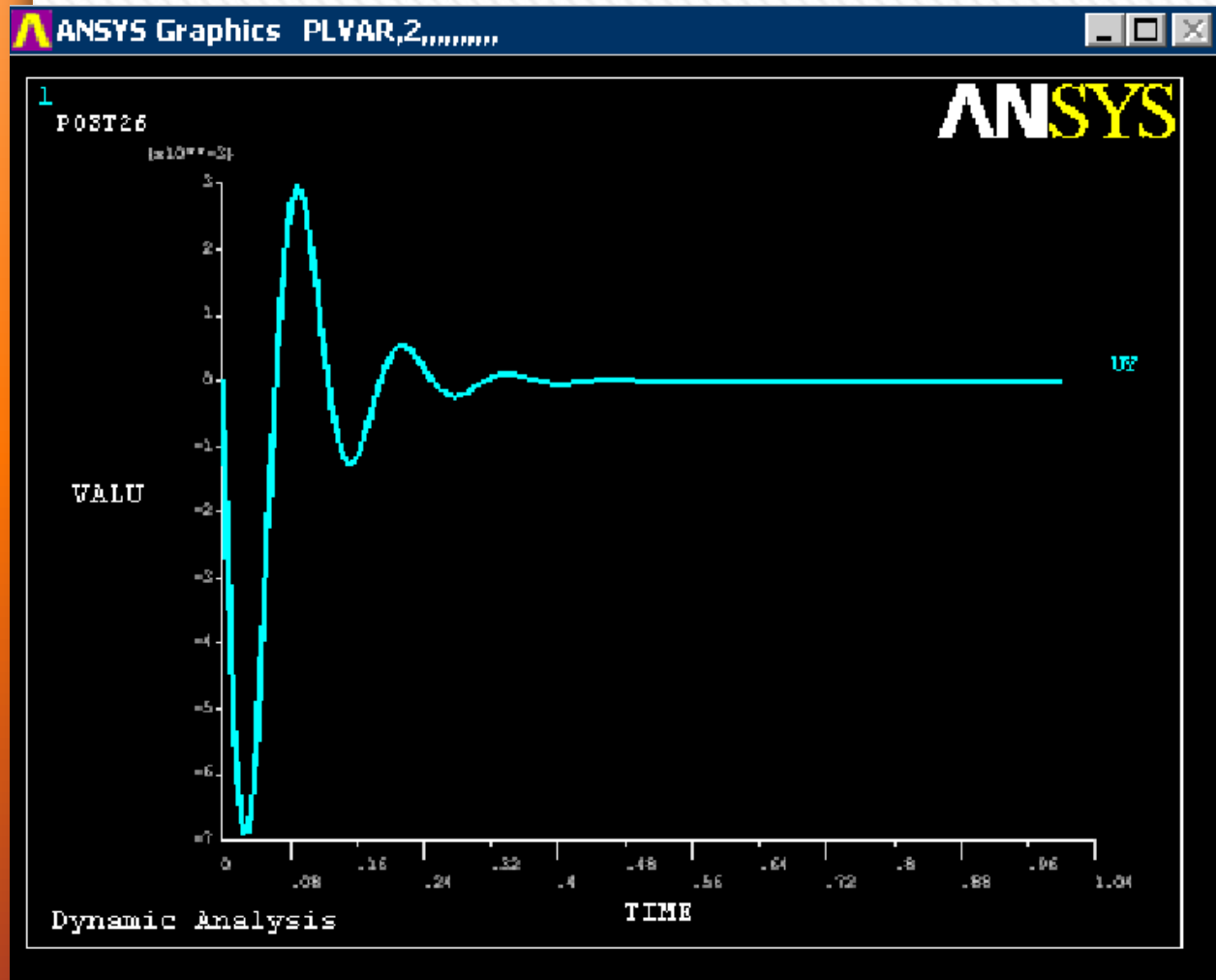
Viga em balanço com Força de Impulso com amortecimento

Respostas para desloc. vertical do ponto extremo da viga



Viga em balanço com Força de Impulso com amortecimento

Ansys x Meu Programinha (Diferença Central)



REFERENCIAS DE ESTUDO

CLOUGH, R.W.; PENZIEN, J. Dynamics of structures. Computers & Structures, 3rd Edition, 2003.

WUNDERLICH, W.; PILKEY, W. Mechanics of structures. Variational and Computational Methods. 2a. Edition. CRC Press, 2002.