

PEF-5916
Dinâmica e Estabilidade das
Estruturas

Prof. Dr. Carlos Eduardo Nigro Mazzilli

Formulação das equações de movimento para sistemas de pontos materiais

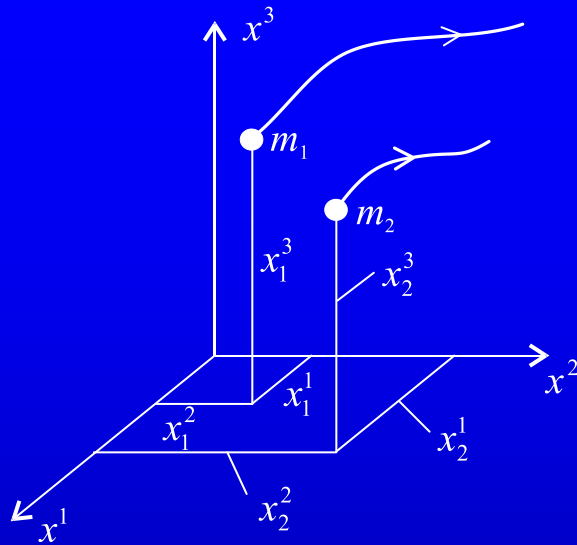
- Leis de Newton

1ª lei (inércia): existem observadores privilegiados, chamados inerciais, em relação aos quais pontos materiais isolados, isto é, submetidos à ação de força resultante nula, estão em repouso ou descrevem MRU (movimento retilíneo uniforme).

2ª lei (fundamental): a força resultante em um ponto material é proporcional à aceleração que o anima, definida em relação a um observador inercial. A constante de proporcionalidade é uma propriedade do ponto material e denomina-se massa. $\vec{F} = m \vec{a}$, $m > 0$

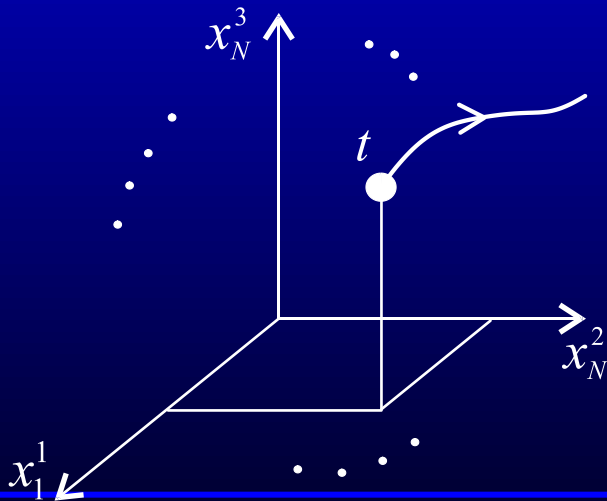
3ª lei (ação e reação): a toda ação de um ponto material sobre outro corresponde uma reação de mesma intensidade e direção, porém de sentido oposto.

Espaço físico: espaço afim Euclidiano de dimensão 3.



- N pontos materiais
- posição de m_i caracterizada por 3 coordenadas: x_i^1, x_i^2, x_i^3

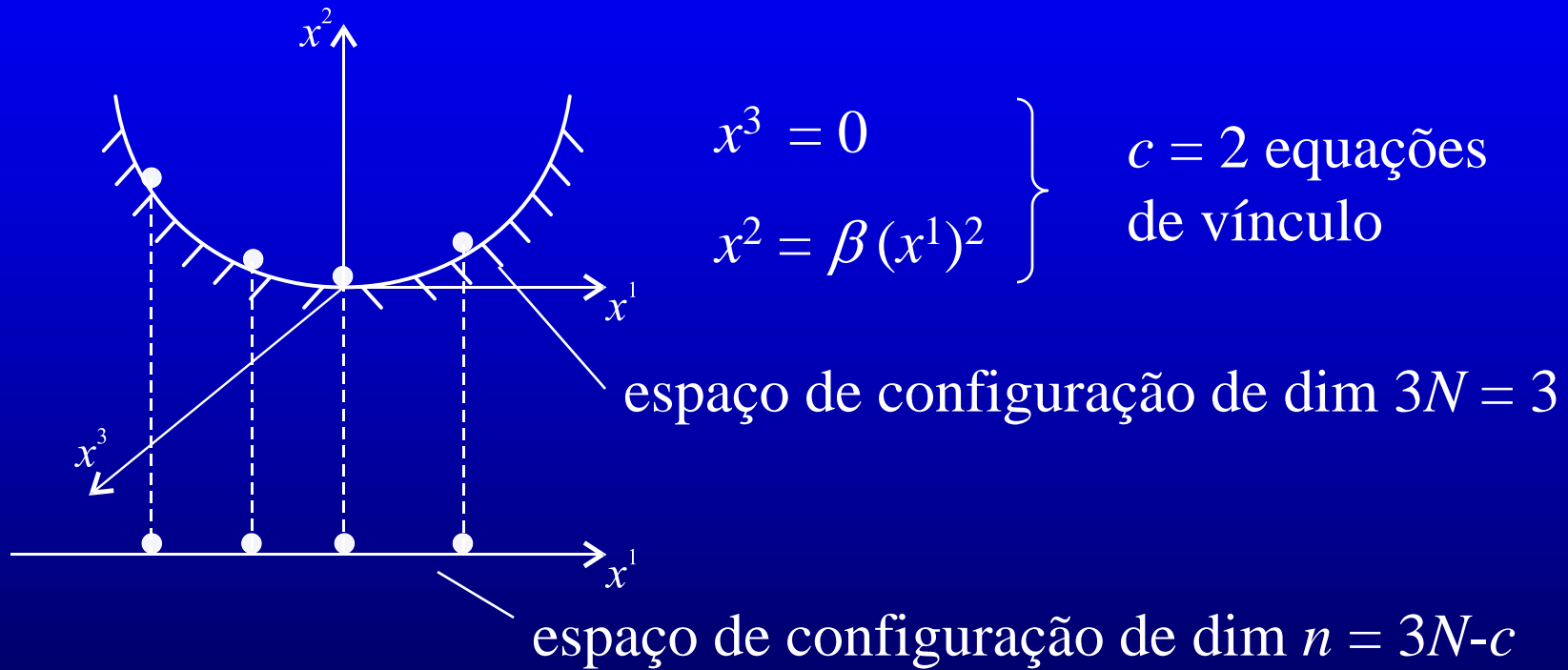
Espaço de configuração: espaço afim Euclidiano de dimensão $3N$ (se as $3N$ coordenadas dos N pontos materiais forem independentes).



- um “ponto” nesse espaço caracteriza completamente a configuração do sistema de pontos materiais em um instante t (coordenadas dos pontos materiais obtidas por “projeções”)

- se houver c equações de vínculo relacionando as coordenadas é possível utilizar um espaço de configuração de dimensão $n = 3N - c$ (nº de “graus de liberdade”)

Exemplo: um ponto material movimentando-se sobre uma parábola



$$n = 1$$

- Coordenadas generalizadas $Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_n(t)$, sendo $n = n^\circ$ de graus de liberdade, são escalares convenientemente escolhidos de sorte que permitam estabelecer uma relação biunívoca com as $3N$ coordenadas do sistema de pontos materiais.

$$\left. \begin{array}{l} x_1^1 = x_1^1(Q_1, Q_2, \dots, Q_n, t) \\ x_1^2 = x_1^2(Q_1, Q_2, \dots, Q_n, t) \\ \vdots \\ x_N^3 = x_N^3(Q_1, Q_2, \dots, Q_n, t) \end{array} \right\} 3N \text{ equações de vínculo holônomo}$$

- as funções $x_\alpha^i(Q_1, Q_2, \dots, Q_n, t)$ são finitas de classe C^1
- Matriz de transformação
- Jacobiano da transformação é não-nulo

- Caso particular de vínculo holônomo: vínculo escleronômico

$$x_{\alpha}^i = x_{\alpha}^i(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$$

Exemplo: um ponto material movimentando-se sobre uma parábola

$$x^1 = Q$$

$$x^2 = \beta (x^1)^2 = \beta Q^2$$

$$x^3 = 0$$

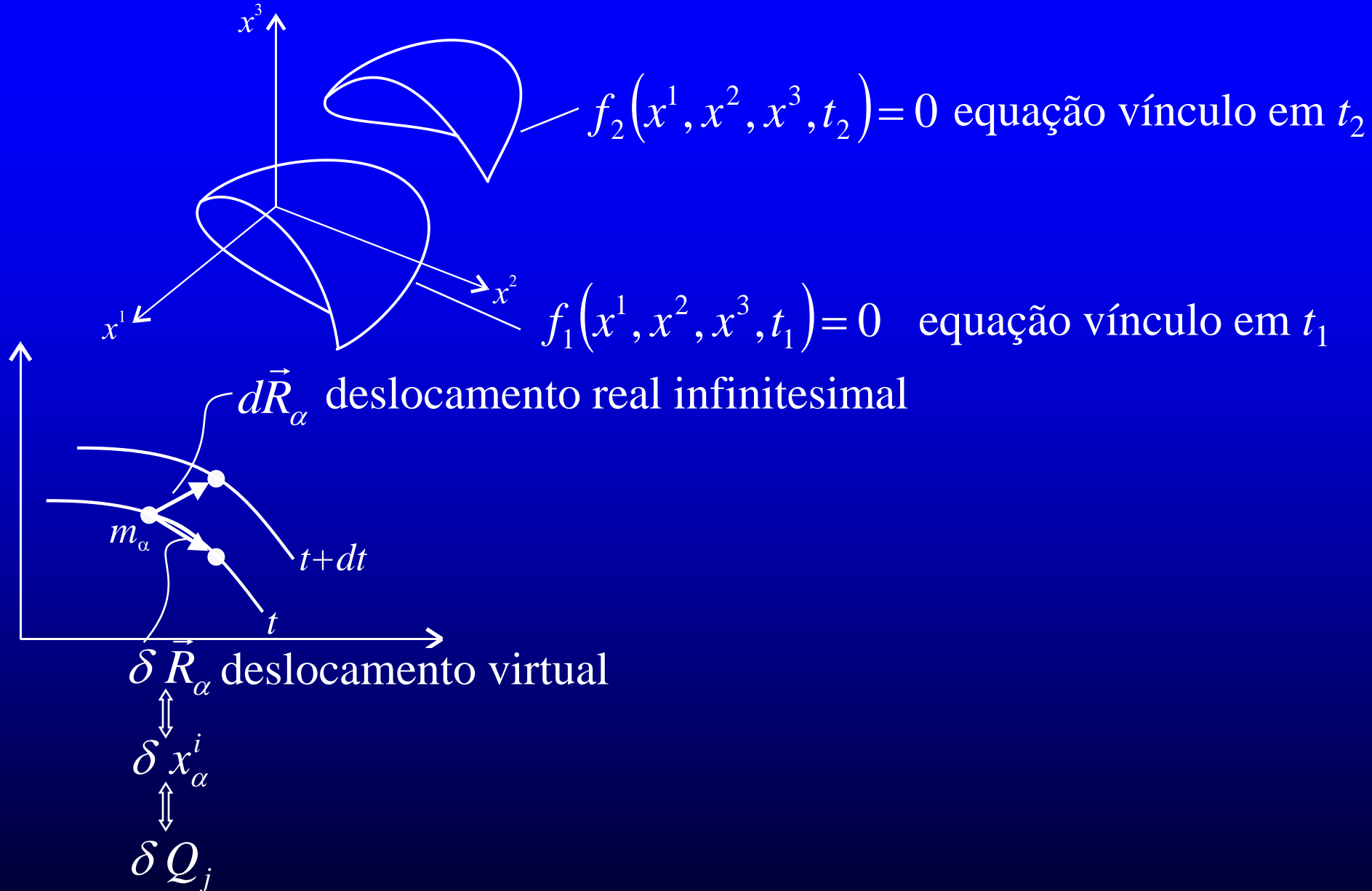
\exists uma “matriz” de transformação T
(de ordem $n = 1$) com $\det T \neq 0$

$$\left. \frac{\partial x^1}{\partial Q} = 1 \right\}$$

Seja $T = \left[\frac{\partial x^1}{\partial Q} \right]$

$J = \det T = 1$

Deslocamentos virtuais - vínculos holônomos



- Deslocamentos virtuais são deslocamentos cinematicamente admissíveis em um instante \underline{t} fixo, isto é satisfazem às equações de vínculo para aquele instante \underline{t} .
- A classe dos deslocamentos reais não coincide, necessariamente, com a dos deslocamentos virtuais, para vínculos holônomos.
- Para vínculos escleronômicos, entretanto, como as equações de vínculo independem de \underline{t} , a classe dos deslocamentos reais coincide com a dos deslocamentos virtuais, ou seja os deslocamentos reais são um caso particular dos deslocamentos virtuais.
- Reações de vínculos ideais são ortogonais aos deslocamentos virtuais dos vínculos. Portanto, as reações de vínculo ideais não realizam trabalho virtual:

$$\delta W = \vec{F}_\alpha^{vi} \cdot \delta \vec{R}_\alpha = 0$$

Princípio de D'Alembert

2ª lei de Newton $\vec{F}_\alpha = m_\alpha \frac{d^2 \vec{R}_\alpha}{dt^2} \quad \alpha = 1 \text{ a } N$

$$\vec{F}_\alpha - m_\alpha \frac{d^2 \vec{R}_\alpha}{dt^2} = \vec{0} \quad \alpha = 1 \text{ a } N$$

$$\vec{F}_\alpha = \underbrace{\vec{F}_\alpha^a}_{\text{ativa}} + \underbrace{\vec{F}_\alpha^{vi}}_{\text{vínculo ideal}} + \underbrace{\vec{F}_\alpha^{vn}}_{\text{vínculo não-ideal}} = \text{força resultante}$$

$$\vec{F}_\alpha^I = -m_\alpha \frac{d^2 \vec{R}_\alpha}{dt^2} = \text{força de inércia}$$

a soma da resultante com a força de inércia é o vetor nulo

(“fechamento” do polígono de forças, como na estática)

$$\sum_{\alpha=1}^N \left(\vec{F}_\alpha^a + \vec{F}_\alpha^{vi} + \vec{F}_\alpha^{vn} + \vec{F}_\alpha^I \right) \cdot \delta \vec{R}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N \vec{0} \cdot \delta \vec{R}_\alpha = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^N \left(\vec{F}_\alpha^a + \vec{F}_\alpha^{vn} + \vec{F}_\alpha^I \right) \cdot \delta \vec{R}_\alpha = 0$$

Princípio generalizado de D'Alembert

- Nota 1 Força efetiva $\vec{F}_\alpha^e = \vec{F}_\alpha^a + \vec{F}_\alpha^{vn}$
- Nota 2 Sistema com vínculos ideais, apenas:
$$\sum_{\alpha=1}^N (\vec{F}_\alpha^a + \vec{F}_\alpha^I) \cdot \delta\vec{R}_\alpha = 0$$

(não é necessário conhecer reações vinculares para formular equações da dinâmica / estática)
- Nota 3 Princípio dos deslocamentos virtuais da estática é caso particular:
$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha^a \cdot \delta\vec{R}_\alpha = 0 \iff \text{equilíbrio}$$

Princípio de Hamilton

2ª lei de Newton \iff Princípio de D'Alembert \iff Princípio de Hamilton

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta W^{nc}) dt = 0$$

δT = variação virtual da energia cinética
 δV = variação virtual da energia potencial
 δW^{nc} = trabalho virtual das forças não - conservativas

$$T = \text{energia cinética} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \left(\frac{d\vec{R}_{\alpha}}{dt} \cdot \frac{d\vec{R}_{\alpha}}{dt} \right)$$

$$\delta T = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \left(\dot{\vec{R}}_{\alpha} \cdot \delta \dot{\vec{R}}_{\alpha} \right) \quad \text{notação} \quad (\dot{\quad}) = \frac{d}{dt}(\quad)$$

$$\delta V = - \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha}^c \cdot \delta \vec{R}_{\alpha} = - \text{trabalho virtual das forças conservativas}$$

$$\delta W^{nc} = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha}^{nc} \cdot \delta \vec{R}_{\alpha} = \text{trabalho virtual das forças não conservativas}$$

Equações de Lagrange

Princípio de Hamilton \iff Equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial Q_i} = - \frac{\partial V}{\partial Q_i} + N_i$$

$T = T(Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \dots, \dot{Q}_n, t)$ energia cinética

$V = V(Q_1, Q_2, \dots, Q_n, t)$ energia potencial

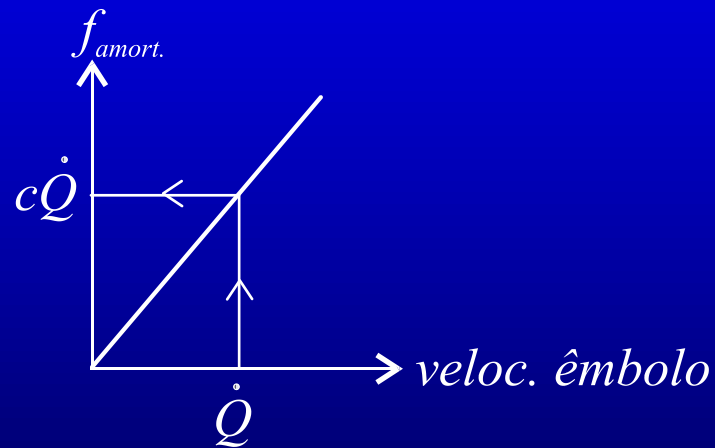
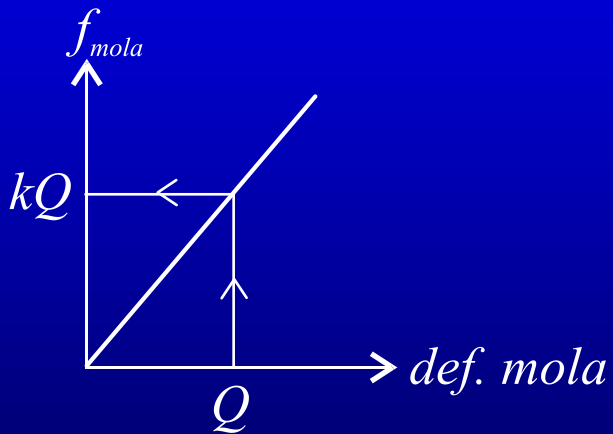
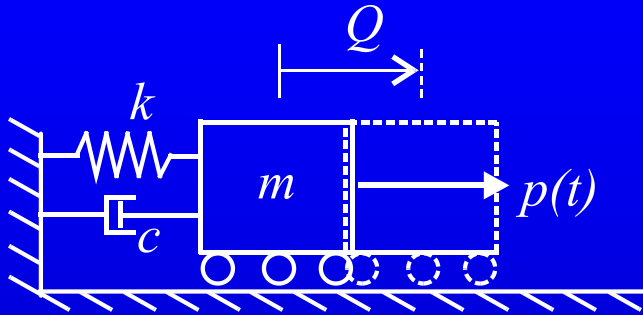
$N_i =$ força generalizada da não - conservativa $= \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha^{nc} \cdot \frac{\partial \vec{R}_\alpha}{\partial Q_i}$

• Nota

$\sum_{i=1}^n N_i \delta Q_i = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha^{nc} \cdot \delta \vec{R}_\alpha = \delta W^{nc}$ trabalho virtual das forças não-conservativas

Formulação das equações de movimento

Exemplo 1: Oscilador linear de 1 grau de liberdade



2ª lei de Newton:

$$p(t) - kQ - c\dot{Q} = m\ddot{Q}$$

Princípio de D'Alembert:

$$p(t) - kQ - c\dot{Q} - m\ddot{Q} = 0$$

$$m\ddot{Q} + c\dot{Q} + kQ = p(t)$$

Princípio generalizado de D'Alembert:

$$[p(t) - kQ - c\dot{Q} - m\ddot{Q}]\delta Q = 0 \quad \forall \delta Q$$

Princípio de Hamilton:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta W^{nc}) dt = 0$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{Q}^2 \quad \Longrightarrow \quad \delta T = m \dot{Q} \delta \dot{Q}$$

$$V = \frac{1}{2} k Q^2 \quad \Longrightarrow \quad \delta V = k Q \delta Q$$

$$\delta W^{nc} = N \delta Q = (p(t) - c \dot{Q}) \delta Q$$

Substituindo, vem:

$$\int_{t_1}^{t_2} m \dot{Q} \delta \dot{Q} dt + \int_{t_1}^{t_2} [-kQ + p(t) - c \dot{Q}] \delta Q dt = 0$$

integrando por partes

$$\delta Q(t_1) = \delta Q(t_2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{m \dot{Q} \delta Q}_{\dot{0}} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} [m \ddot{Q} + c \dot{Q} + kQ - p(t)] \delta Q dt = 0$$

Logo,

$$\int_{t_1}^{t_2} [m \ddot{Q} + c \dot{Q} + kQ - p(t)] \delta Q dt = 0 \quad \forall \delta Q$$

$$\boxed{m \ddot{Q} + c \dot{Q} + kQ = p(t)}$$

Equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial Q} = - \frac{\partial V}{\partial Q} + N$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{Q}^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{Q}} = m \dot{Q} \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial Q} = 0$$
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}} \right) = m \ddot{Q}$$

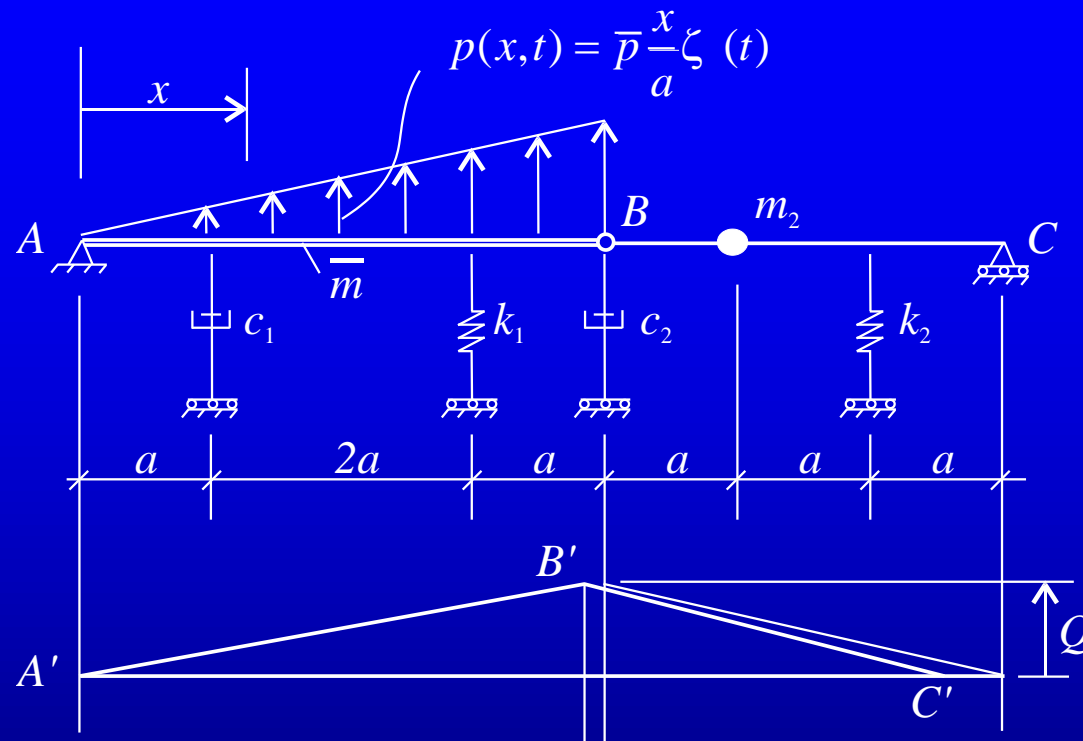
$$V = \frac{1}{2} k Q^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial Q} = k Q$$

$$\delta W^{nc} = N \delta Q = (p(t) - c \dot{Q}) \delta Q \quad \Longrightarrow \quad N = p(t) - c \dot{Q}$$

Substituindo, vem: $m \ddot{Q} = -k Q + p(t) - c \dot{Q}$

$$m \ddot{Q} + c \dot{Q} + k Q = p(t)$$

Exemplo 2



AB e BC rígidas

BC imponderável

Dinâmica linear: Despreza-se deslocamento horizontal de B e C, o que é razoável para Q pequeno.

$$T = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{2}{3} \dot{Q} \right)^2 + \int_0^{4a} \frac{1}{2} \bar{m} \left(\frac{x}{4a} \dot{Q} \right)^2 dx = \frac{1}{2} m^* \dot{Q}^2$$

$$\text{com} \quad m^* = \frac{4}{9} m_2 + \frac{4}{3} \bar{m} a$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 \left(\frac{3}{4} Q \right)^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(\frac{1}{3} Q \right)^2 + \int_0^{4a} \bar{m} g \left(\frac{x}{4a} Q \right) dx + m_2 g \left(\frac{2}{3} Q \right)$$

$$V = \frac{1}{2} k^* Q^2 - p_0^* Q$$

$$\text{com} \quad k^* = \frac{9}{16} k_1 + \frac{1}{9} k_2 \quad \text{e} \quad p_0^* = - \left(2\bar{m} a + \frac{2}{3} m_2 \right) g$$

$$\delta W^{nc} = -c_1 \frac{\dot{Q}}{4} \frac{\delta Q}{4} - c_2 \dot{Q} \delta Q + \int_0^{4a} \bar{p} \frac{x}{a} \zeta(t) \left(\frac{x}{4a} \delta Q \right) dx = N \delta Q$$

$$N = -c^* \dot{Q} + p^*(t)$$

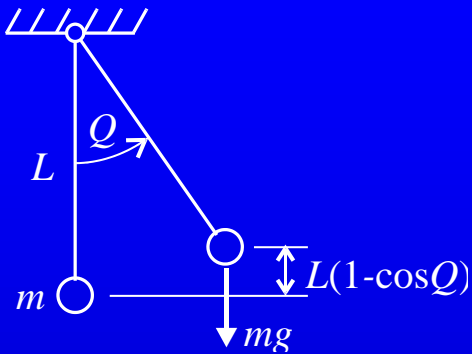
$$\text{com } c^* = \frac{c_1}{16} + c_2 \quad \text{e } p^*(t) = \frac{16}{3} \bar{p} a \zeta(t)$$

Equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial Q} = - \frac{\partial V}{\partial Q} + N$$

$$m^* \ddot{Q} + c^* \dot{Q} + k^* Q = p_0^* + p^*(t)$$

Exemplo 3: Pêndulo simples



$$T = \frac{1}{2} m (L\dot{Q})^2$$

$$V = +mgL(1 - \cos Q)$$

Equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial Q} = - \frac{\partial V}{\partial Q} + N$$

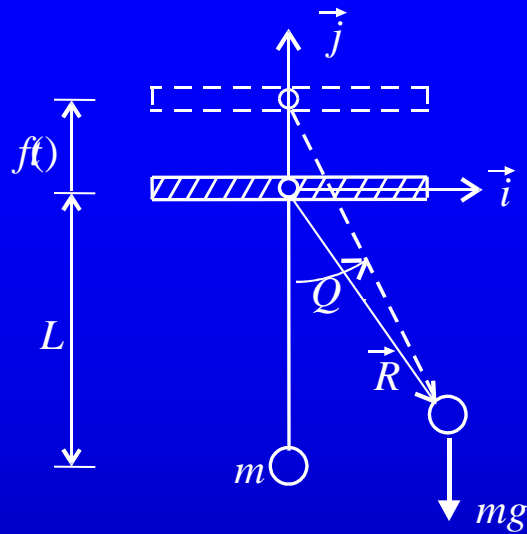
(Note: In the original image, the terms $\frac{\partial T}{\partial Q}$ and N are crossed out with diagonal lines, and the number 0 is written above each.)

$$mL^2\ddot{Q} = -mgL \sin Q$$

ou $\ddot{Q} + \frac{g}{L} \sin Q = 0$ (análise não-linear)

$$\ddot{Q} + \frac{g}{L} Q = 0 \quad (\text{análise linear})$$

Exemplo 4: Pêndulo simples submetido a excitação de suporte



$$\vec{R} = L \operatorname{sen} Q \vec{i} + (f - L \cos Q) \vec{j}$$

$$\dot{\vec{R}} = L \dot{Q} \cos Q \vec{i} + (\dot{f} + L \dot{Q} \operatorname{sen} Q) \vec{j}$$

$$V = mg[f + L(1 - \cos Q)]$$

$$T = \frac{1}{2} m \left(L^2 \dot{Q}^2 \cos^2 Q + L^2 \dot{Q}^2 \operatorname{sen}^2 Q + 2L \dot{f} \dot{Q} \operatorname{sen} Q + \dot{f}^2 \right)$$

$$T = \frac{1}{2} mL^2 \dot{Q}^2 + \frac{1}{2} m \dot{f}^2 + mL \dot{f} \dot{Q} \operatorname{sen} Q$$

Equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial Q} = - \frac{\partial V}{\partial Q} + \cancel{N}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}} \right) = mL^2 \ddot{Q} + mL\dot{f} \operatorname{sen} Q + mLf \dot{Q} \cos Q$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}} = mLf \dot{Q} \cos Q \qquad \frac{\partial V}{\partial Q} = mgL \operatorname{sen} Q$$

Substituindo, vem:

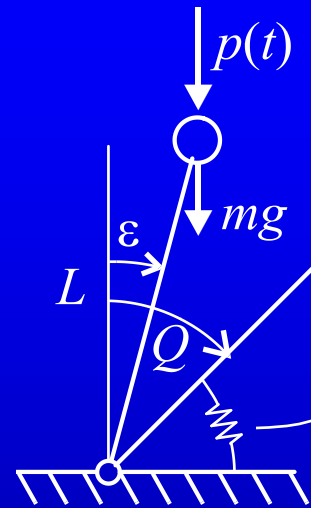
$$mL^2 \ddot{Q} + mL\dot{f} \operatorname{sen} Q + \cancel{mLf \dot{Q} \cos Q} - \cancel{mLf \dot{Q} \cos Q} = -mgL \operatorname{sen} Q$$

$$mL^2 \ddot{Q} + mL(g + \ddot{f}) \operatorname{sen} Q = 0$$

$$\text{ou } \ddot{Q} + \frac{1}{L}(g + \ddot{f}) \operatorname{sen} Q = 0 \quad (\text{análise não-linear})$$

$$\ddot{Q} + \frac{1}{L}(g + \ddot{f})Q = 0 \quad (\text{análise linear})$$

Exemplo 5: Barra rígida com rigidez não-linear e imperfeição, submetida a carregamento dinâmico $p(t)$ e pré-carregamento estático mg



$$M(Q) = K(Q - \varepsilon) \left[1 - (Q - \varepsilon)^2 \right] \quad \text{Equação "constitutiva" não-linear}$$

imperfeição o $\varepsilon \ll 1$

$$T = \frac{1}{2} mL^2 \dot{Q}^2$$

$$V = \int_0^{Q-\varepsilon} K\theta [1 - \theta^2] d\theta - mgL(\cos \varepsilon - \cos Q) = K \left[\frac{(Q - \varepsilon)^2}{2} - \frac{(Q - \varepsilon)^4}{4} \right] - mgL(\cos \varepsilon - \cos Q)$$

$$\delta W^{nc} = N \delta Q = P(t) L \operatorname{sen} Q \delta Q \quad \Longrightarrow \quad N = P(t) L \operatorname{sen} Q$$

Equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial Q} = - \frac{\partial V}{\partial Q} + N$$

$$mL^2 \ddot{Q} = -K(Q - \varepsilon) \left[1 - (Q - \varepsilon)^2 \right] + [mg + P(t)] L \operatorname{sen} Q$$

$$mL^2 \ddot{Q} + K(Q - \varepsilon) \left[1 - (Q - \varepsilon)^2 \right] = [mg + P(t)] L \operatorname{sen} Q$$