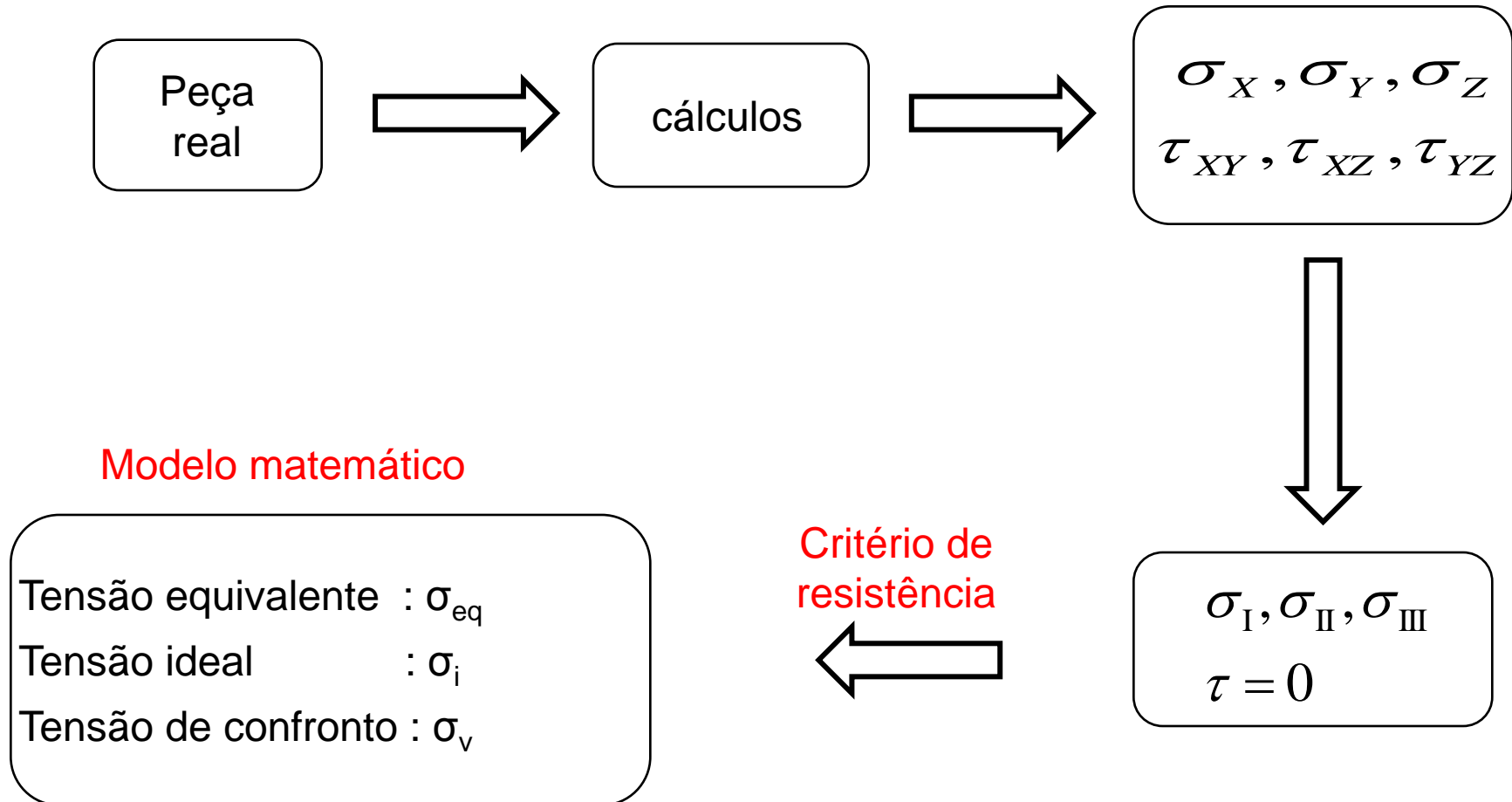
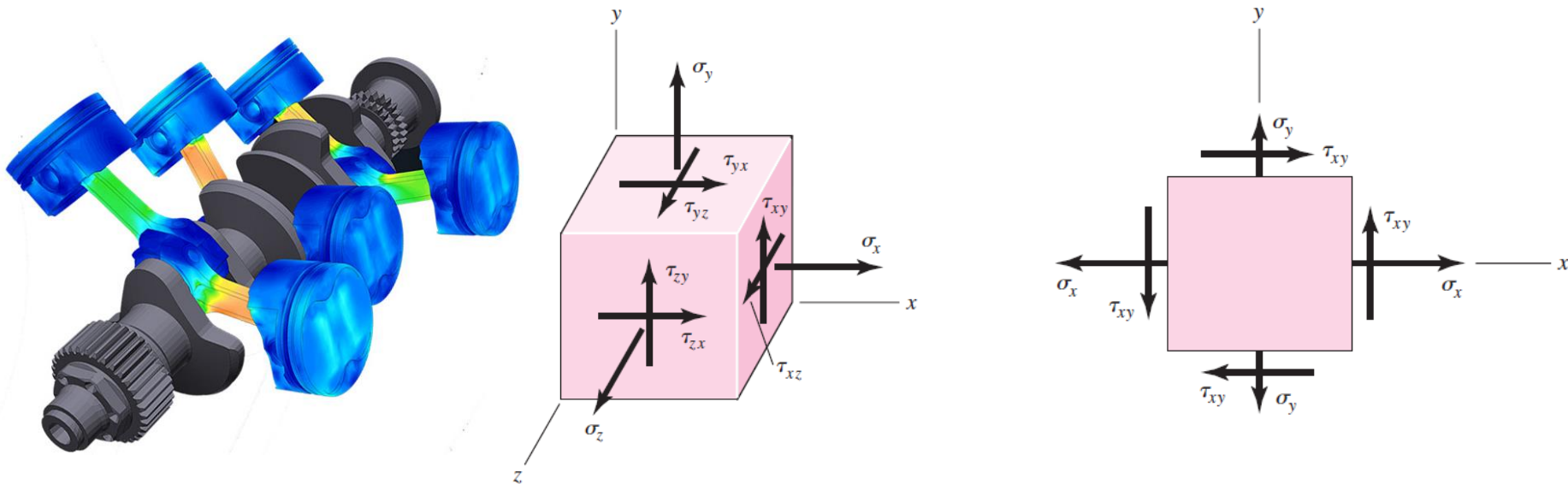


3.8 - Tensão equivalente e tensão admissível



Se $\sigma_{eq} \leq \sigma_{adm}$ a peça não romperá !

3.8.1 Peças submetidas a carregamentos em geral → Estado geral de tensões



Critérios de Resistência

Para se aplicar os resultados de um ensaio (tração, compressão, torção) a um elemento que esteja submetido a um carregamento multiaxial é necessário se considerar o **mecanismo real de falha**.

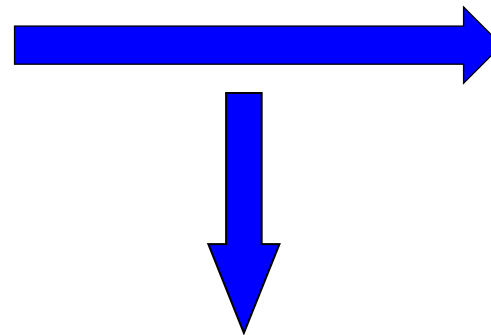
3.8.2 Falhas

Um componente mecânico, associado em conjunto a outros componentes, tem seu comportamento não tão bem delimitado e podem apresentar falha. São aplicados Critérios de Resistências que se utilizam de conceitos de segurança para o dimensionamento de componentes.

Resistência de uma peça mecânica (projeto)

- ✓ material;
- ✓ tratamento térmico;
- ✓ processamento.

Utiliza-se de dados de corpos de prova → mesmas condições de carregamento, fabricação, acabamento.



Resistência da peça fabricada

- ✓ quantidade do lote;
- ✓ variações no processo;
- ✓ acabamento superficial;
- ✓ esforços na conformação;
- ✓ combinações com outros no conjunto.

Falha

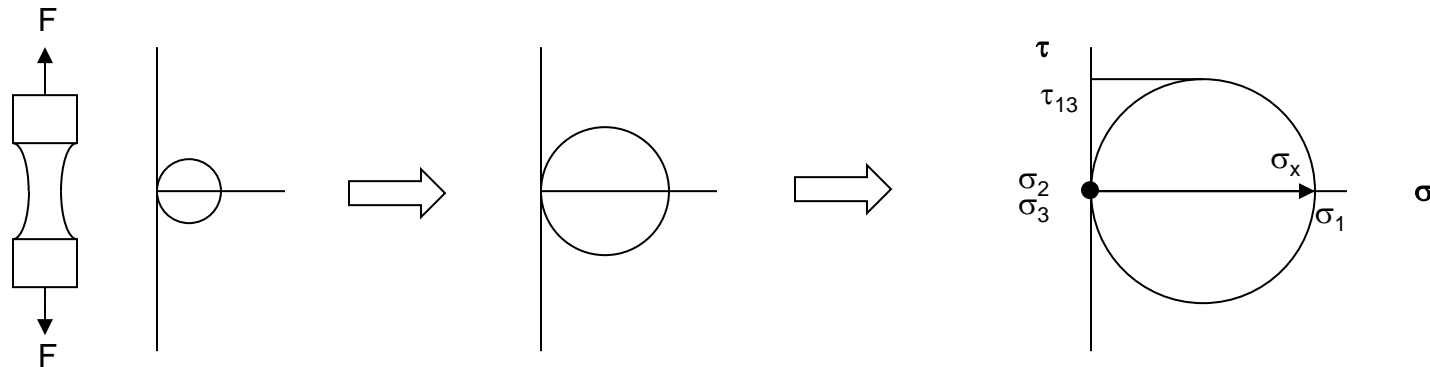
- ✓ quebra;
- ✓ deformação permanente;

A falha depende da:

- ✓ tipo de tensão (tração, compressão, cisalhamento);
- ✓ tipo de carregamento (estático, dinâmico).

QUAL TENSÃO CAUSOU A FALHA??

Ensaio de tração: se observarmos o círculo de Mohr para tração pura aplicada lentamente nota se que há também a existência de tensão de cisalhamento, cujo valor máximo é exatamente a metade da tensão normal.

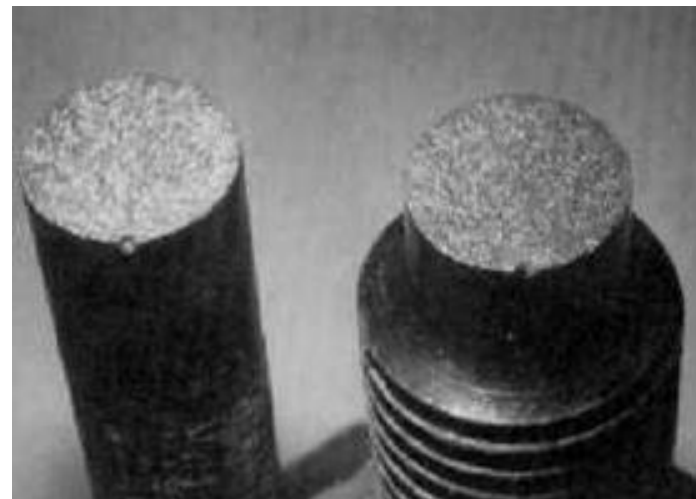


Em geral materiais dúcteis submetidos a carregamentos estáticos são limitados pelas suas tensões de cisalhamento, enquanto que os materiais frágeis pela tensão normal.

Material Dúctil

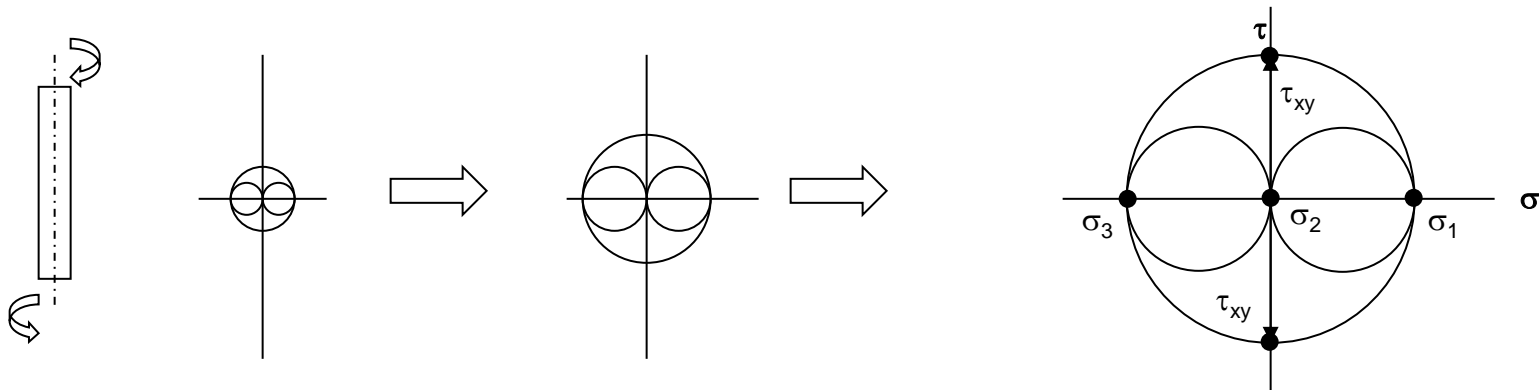


Material Frágil

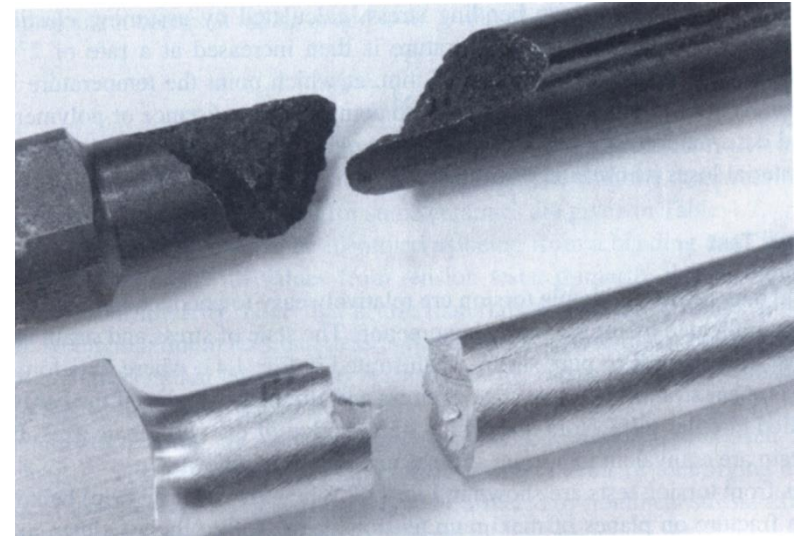
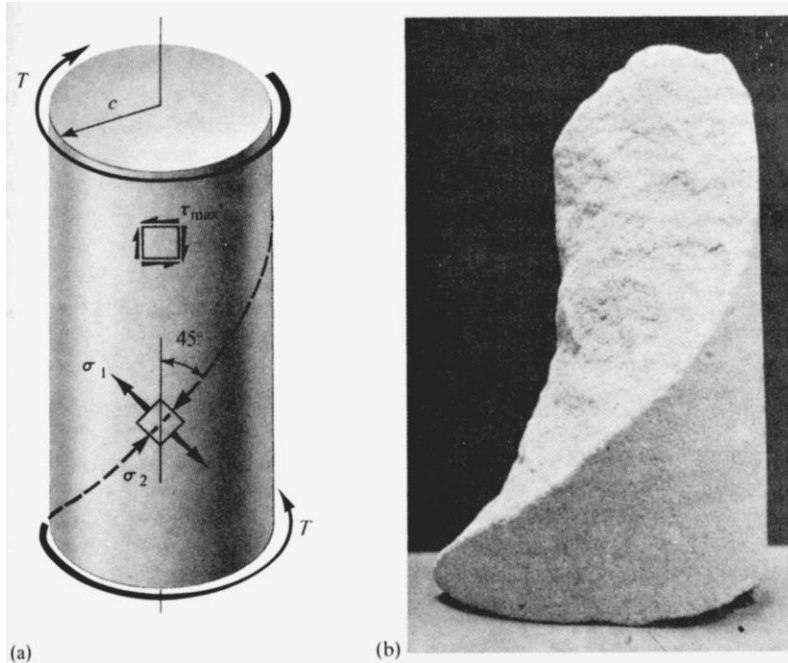


QUAL TENSÃO CAUSOU A FALHA??

Ensaio de torção: se observarmos o círculo de Mohr torção pura aplicada lentamente nota-se que há também a presença de tensão normal cujo valor máximo é igual a tensão de cisalhamento.



Em geral materiais dúcteis submetidos a carregamentos estáticos são limitados pelas suas tensões de cisalhamento, enquanto que os materiais frágeis pela tensão normal.



Acima: Ferro fundido cinzento,
Abaixo: liga de alumínio 2024-T351

a) Descrição alternativa das tensões para um eixo em torção, b) amostra de pedra arenosa após ensaio de torção

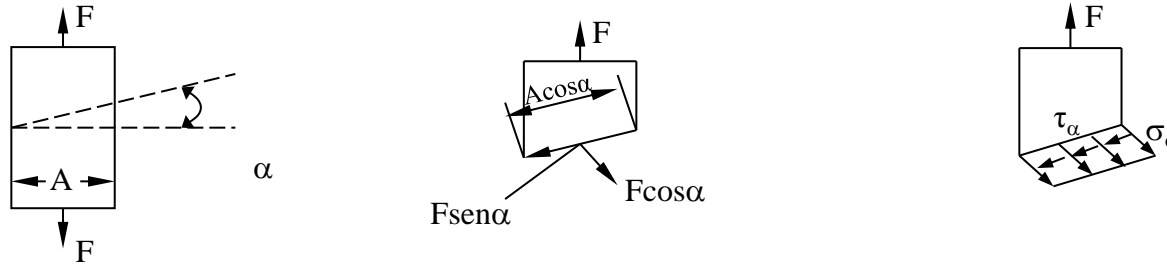
c) Torção em materiais de baixa resistência ao cisalhamento, quebra perpendicular ao eixo.

Fonte: POPOV EP. *Introdução à mecânica dos sólidos*. Trad. AMORELLI MOC. Ed. Edgard Blücher, 1978.

Fonte: Dowling NE. *Mechanical Behavior of Materials*. 3ª ed Ed. Pearson Prentice Hall.2007. p.156.

3.8.3 Estado de tensões – Círculo de Mohr

a) Estado simples de tensões



Tensão normal :

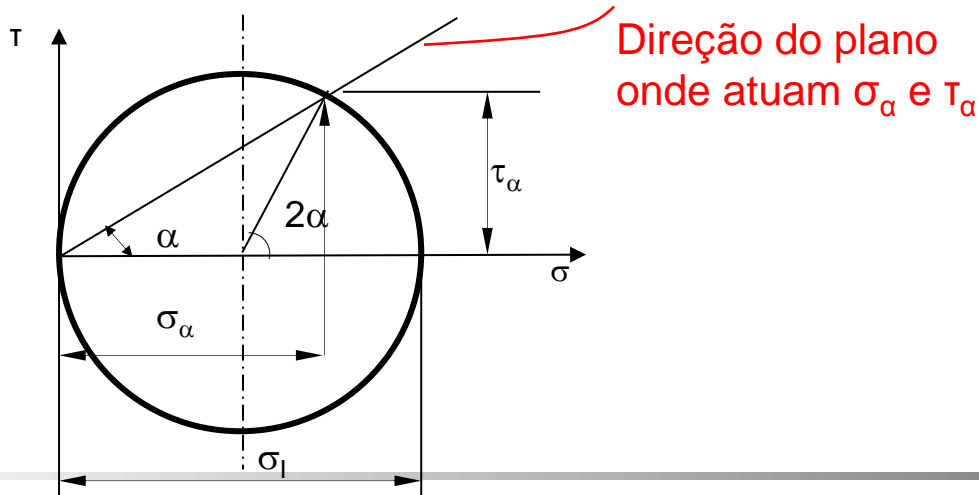
$$\sigma_{\alpha} = \frac{F}{A} \cdot \cos^2 \alpha = \frac{F}{2 \cdot A} \cdot (1 + \cos(2 \cdot \alpha))$$

Tensão tangencial :

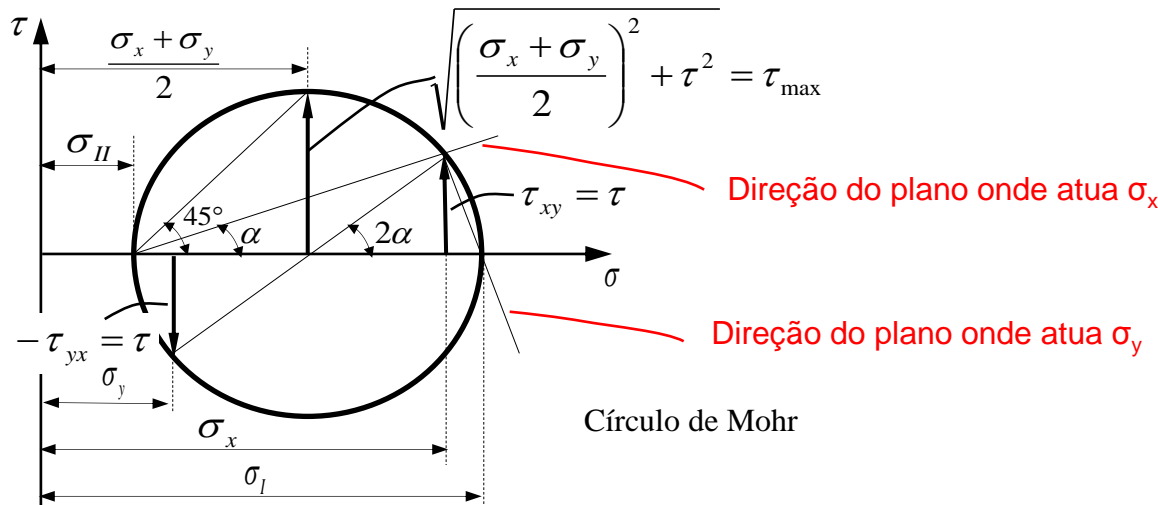
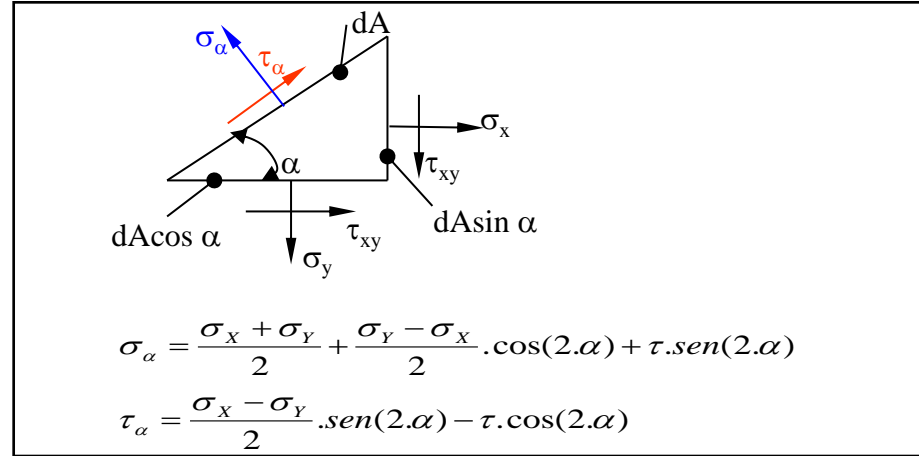
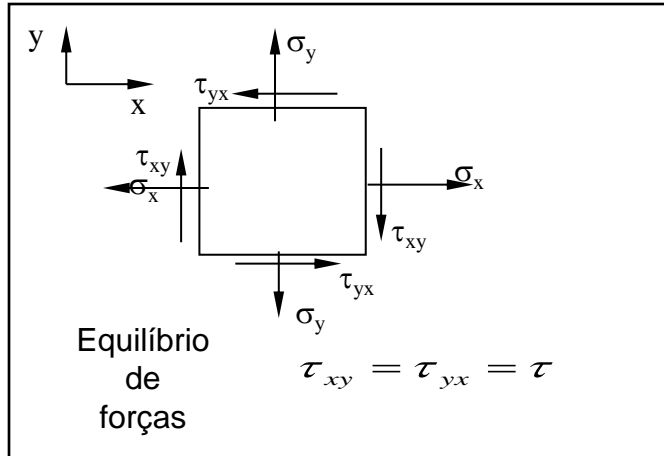
$$\tau_{\alpha} = \frac{F}{A} \cdot \text{sen} \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{F}{2 \cdot A} \cdot \text{sen}(2 \cdot \alpha)$$

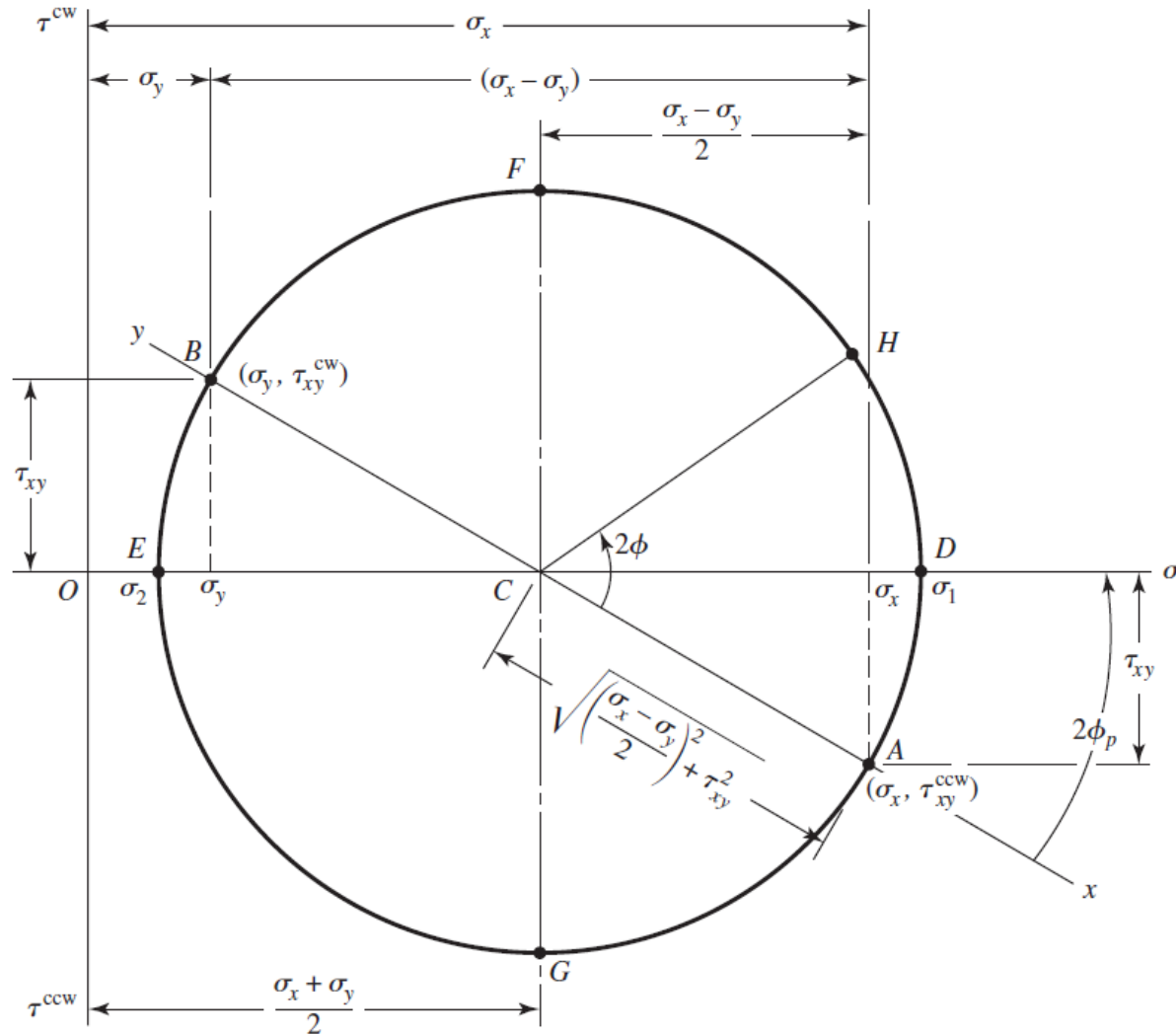
Equações paramétricas do círculo

Círculo de Mohr

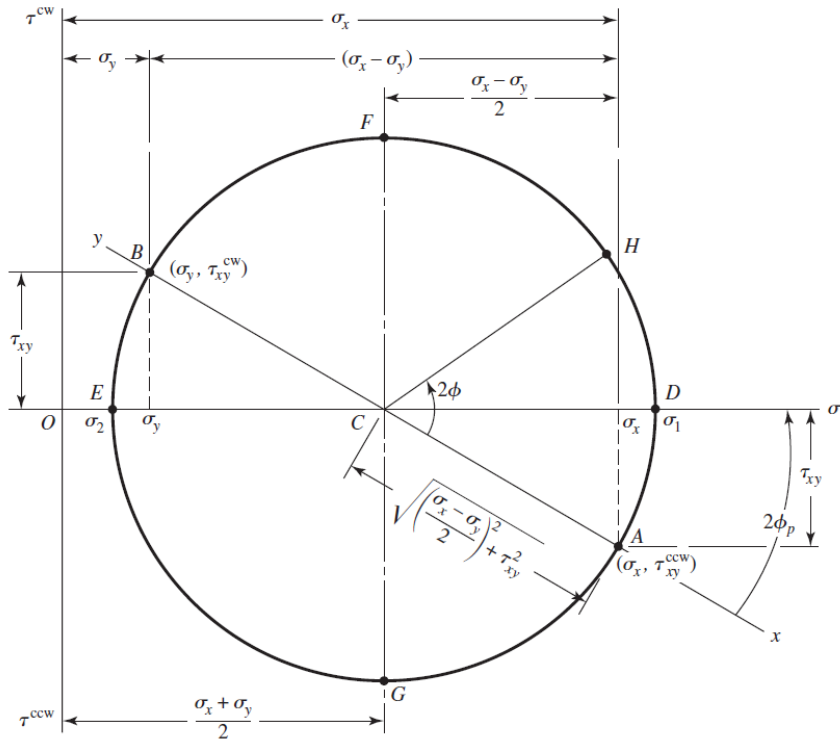


b) Estado duplo de tensões





Fonte: Budynas, R.G., Nisbett, J.K., *Shigley's Mechanical Engineering Design*, McGraw-Hill, 2011



• Tensões principais

• Tensão tangencial máxima

• Ângulo dos planos principais

• Tensões em um ângulo qualquer

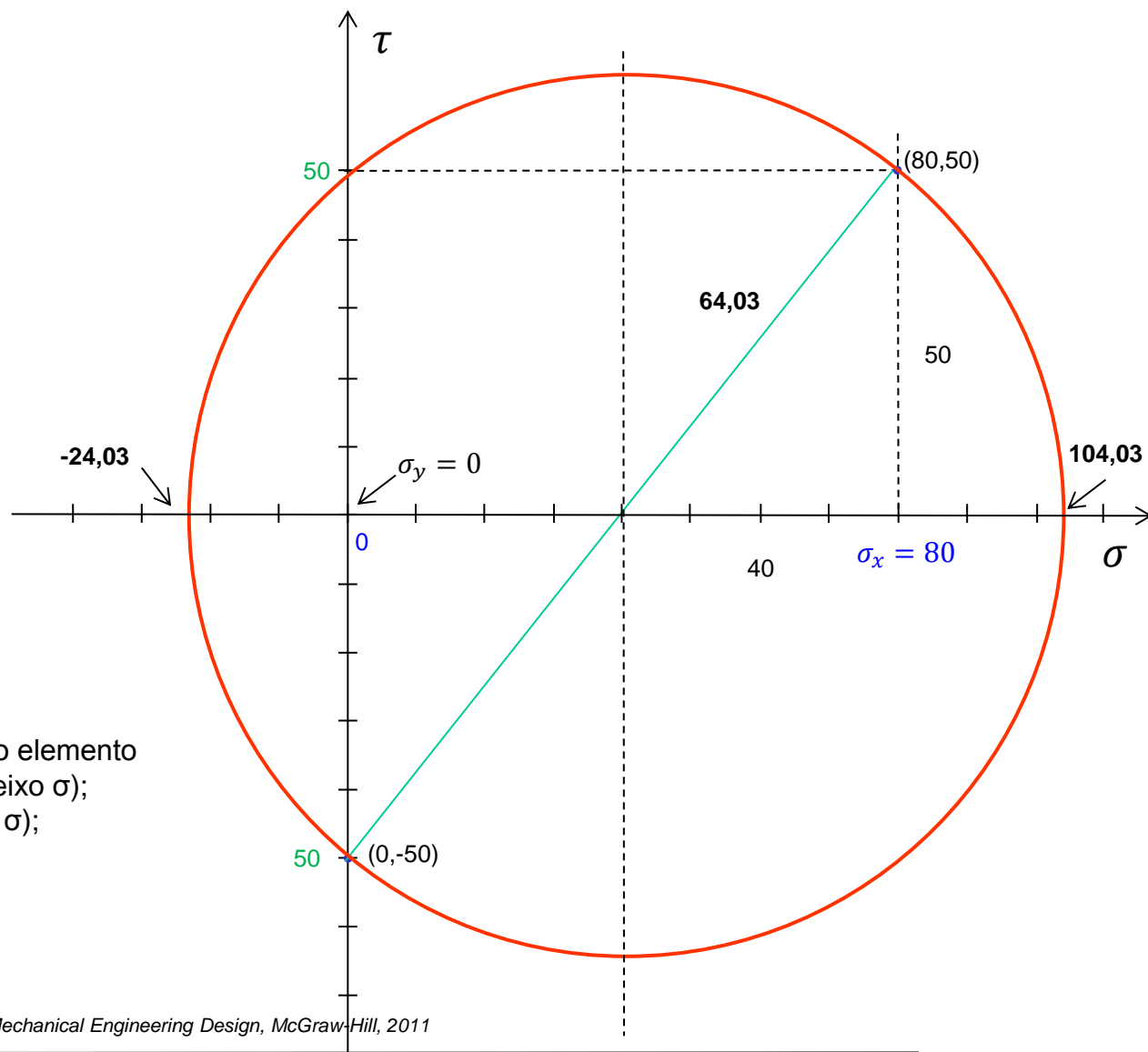
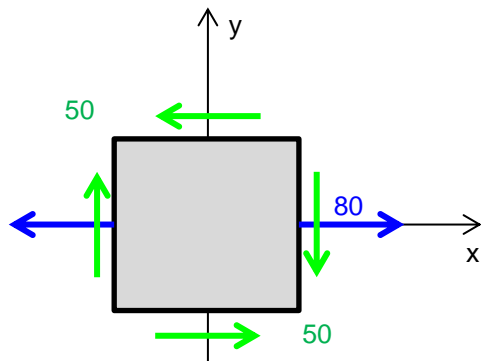
$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_X + \sigma_Y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\tan(2. \alpha) = \frac{2. \tau}{\sigma_X - \sigma_Y}$$

$$\begin{cases} \sigma_{X,Y} = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} + \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \cdot \cos(2. \alpha) \\ \tau = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \cdot \text{sen}(2. \alpha) \end{cases}$$

Exemplo (Shigley):

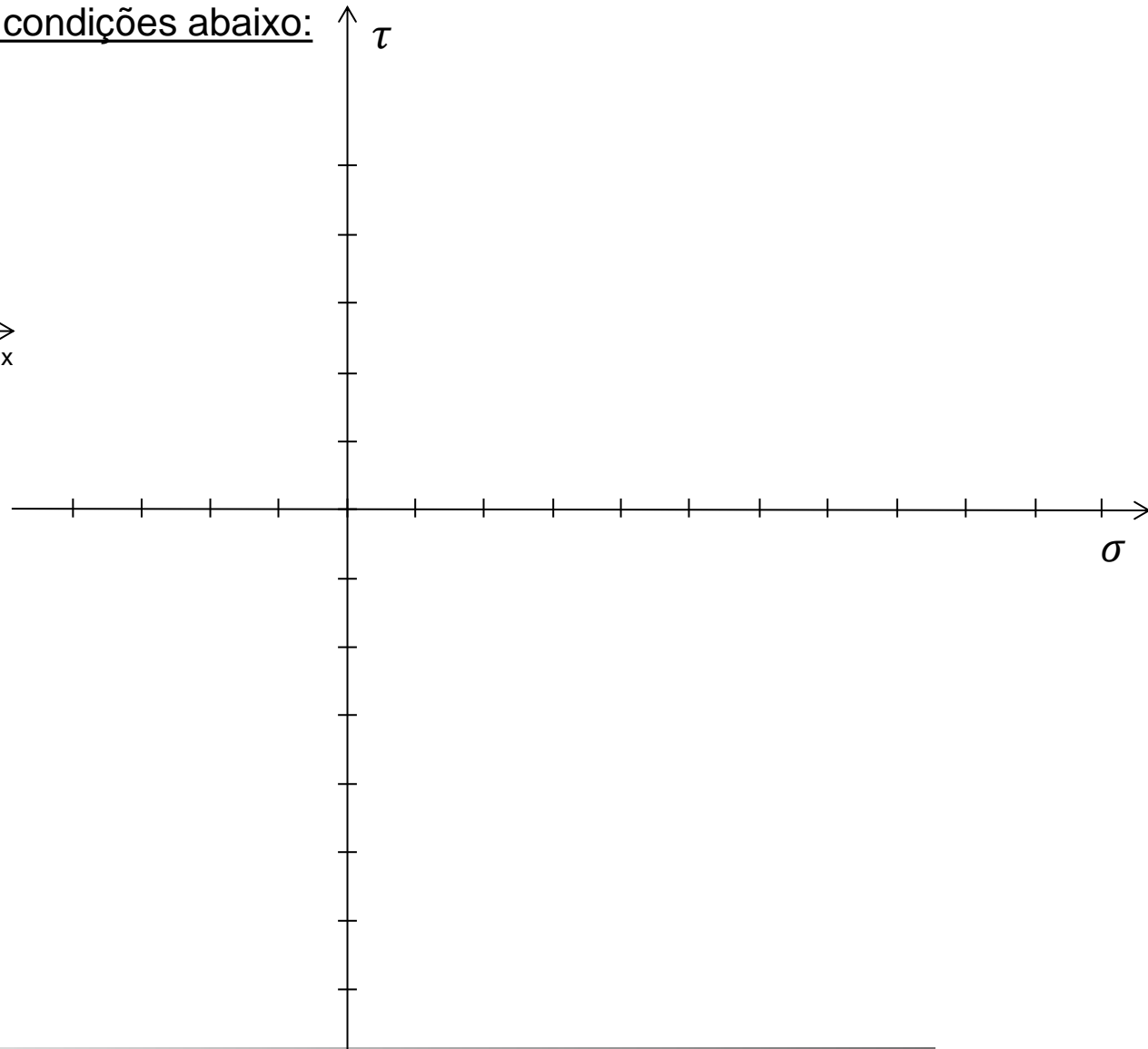
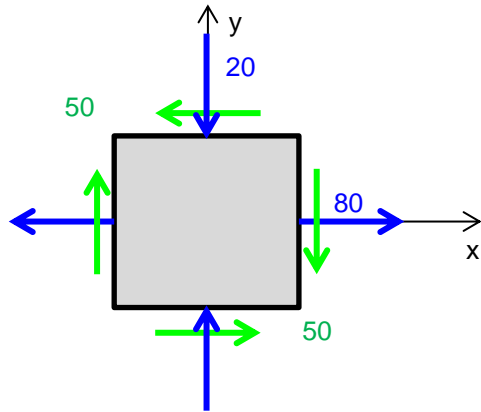


Convenção:

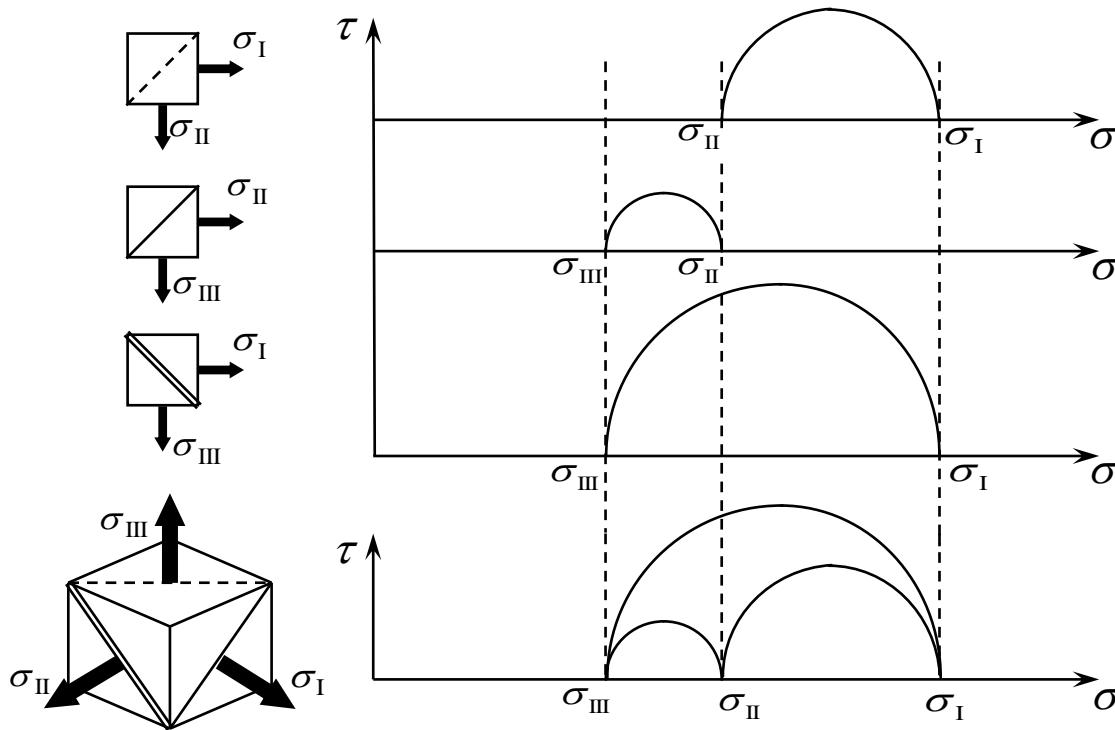
- Tensões de cisalhamento “girando” o elemento no sentido horário: positivo (acima do eixo σ);
- anti-horário: negativo (abaixo do eixo σ);

Fonte: Budynas, R.G., Nisbett, J.K., *Shigley's Mechanical Engineering Design*, McGraw-Hill, 2011

Exemplo: refazer para as condições abaixo:

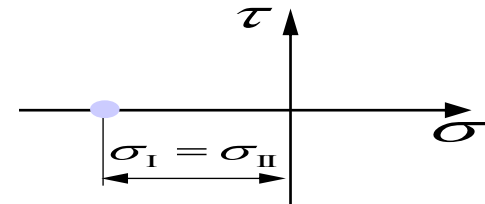
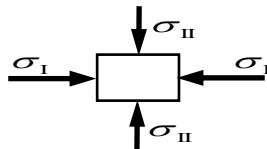


c) Estado triplo de tensões

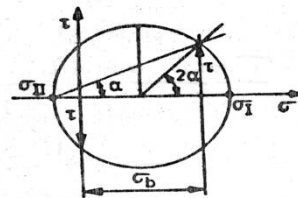
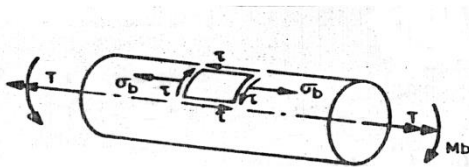


3.8.4 Círculos de Mohr para casos particulares de solicitações

- Pressão hidrostática biaxial

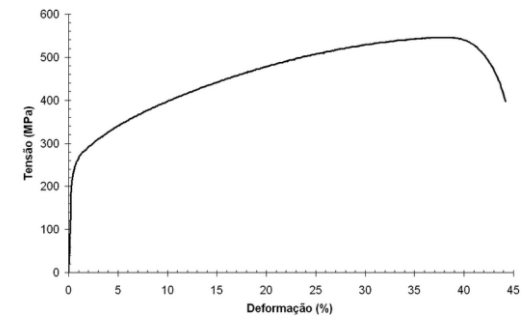
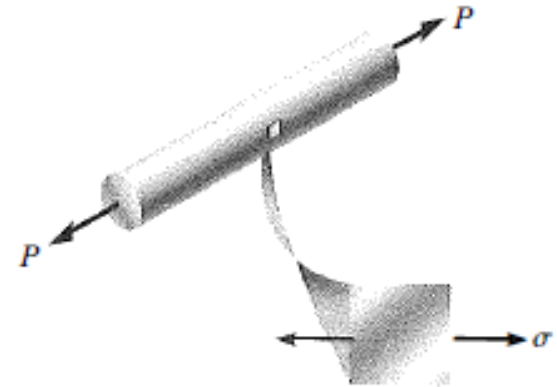
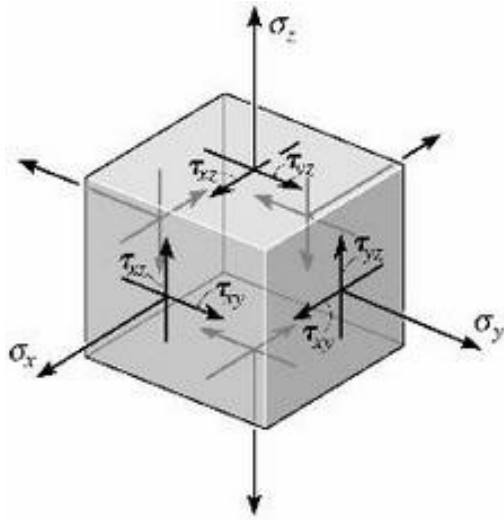


- Eixo solicitado à flexo-torção



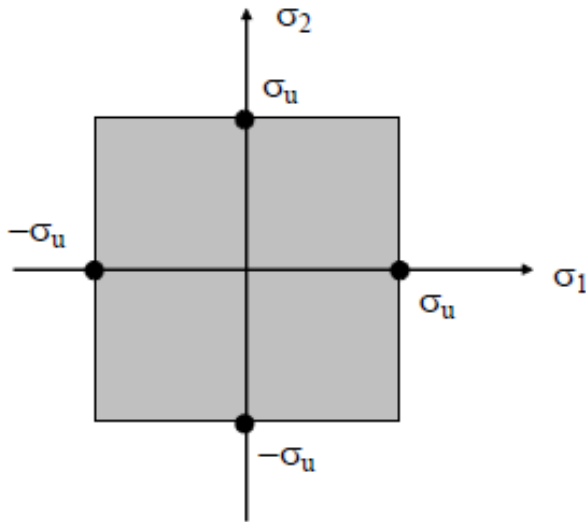
$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{2}\right)^2 + \tau^2} ; \tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

3.8.5 CRITÉRIOS DE RESISTÊNCIA



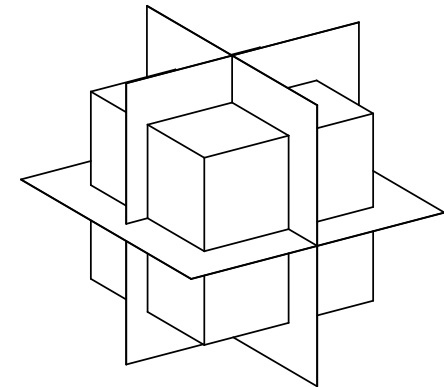
Cada critério: σ_{eq} diferente

a) Critério da tensão normal máxima (Rankine): Considera que um elemento constituído de material frágil falha quando a tensão principal máxima no material atinge a tensão normal máxima que o material pode suportar em um teste de tração uniaxial.

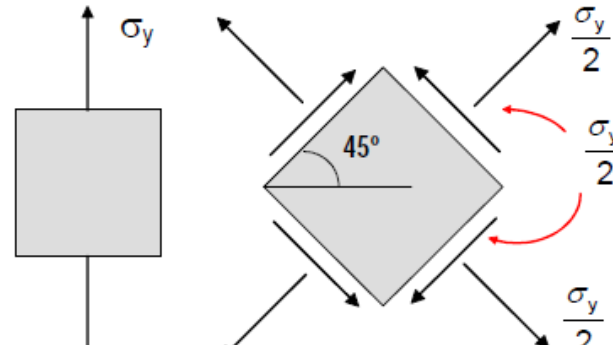
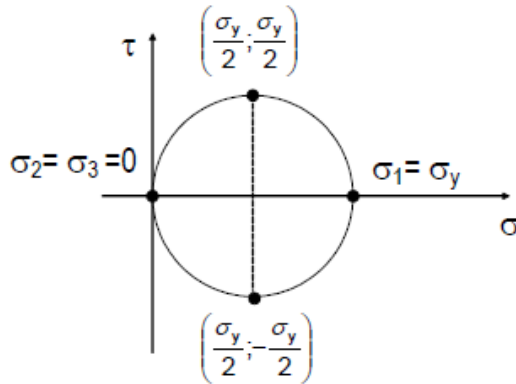


$$|\sigma_1| = \sigma_u$$

$$|\sigma_2| = \sigma_u$$

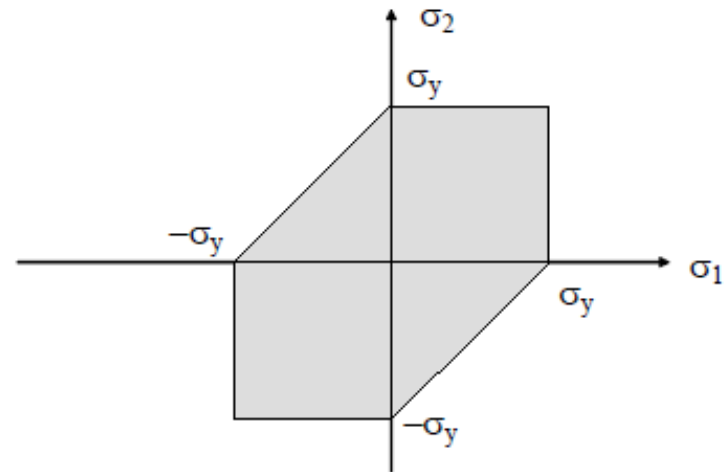


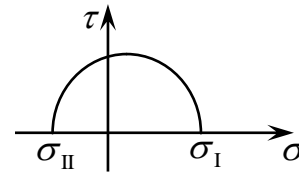
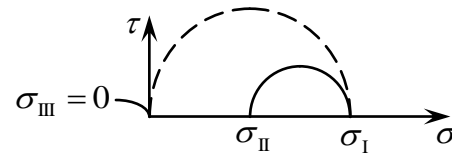
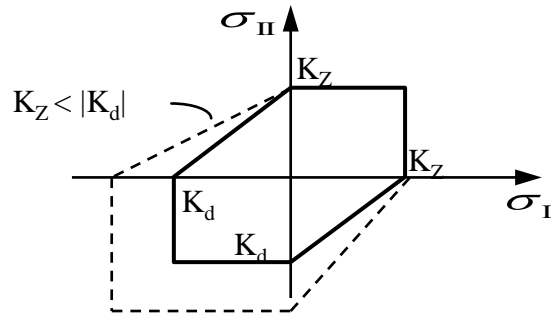
b) Máxima tensão tangencial (Tresca): considera que em um material dúctil sob qualquer estado de tensão (uniaxial, biaxial ou triaxial) a falha ocorre quando a tensão cisalhante em qualquer plano atinge o valor de $\sigma_y/2$.



$$\left. \begin{aligned} |\sigma_1| = \sigma_y \text{ se } |\sigma_1| \geq |\sigma_2| \\ |\sigma_2| = \sigma_y \text{ se } |\sigma_2| \geq |\sigma_1| \end{aligned} \right\} \text{se } \sigma_1 \text{ e } \sigma_2 \text{ têm o mesmo sinal}$$

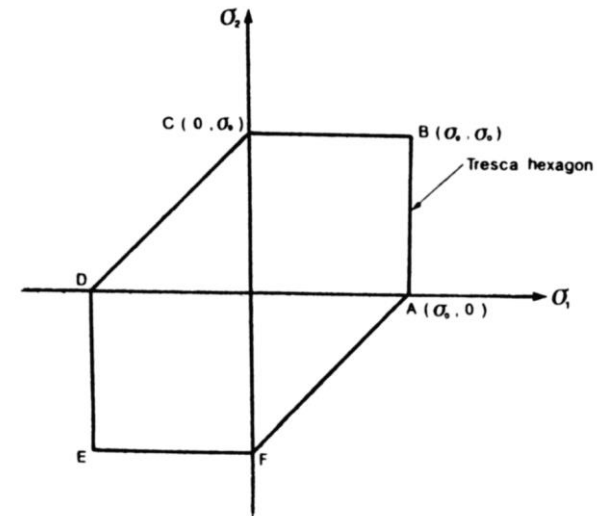
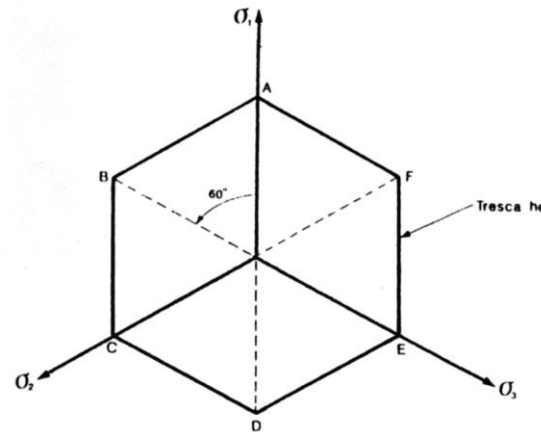
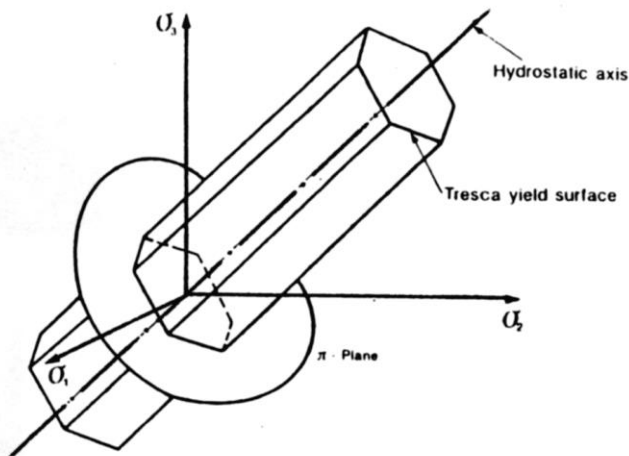
$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_y \text{ se } \sigma_1 \text{ e } \sigma_2 \text{ têm sinais opostos}$$





$$\sigma_V = \sigma_I \leq K_Z \text{ ou } D$$

$$\sigma_V = \pm(\sigma_I + \sigma_{II}) \leq K$$



c) Máxima energia de distorção (von Mises)

A energia total de deformação em uma peça carregada consiste em duas componentes: uma devido ao carregamento hidrostático que muda seu volume; e outra devido a distorção que muda sua forma.

A tensão de cisalhamento presente deve-se a parcela da energia de distorção.

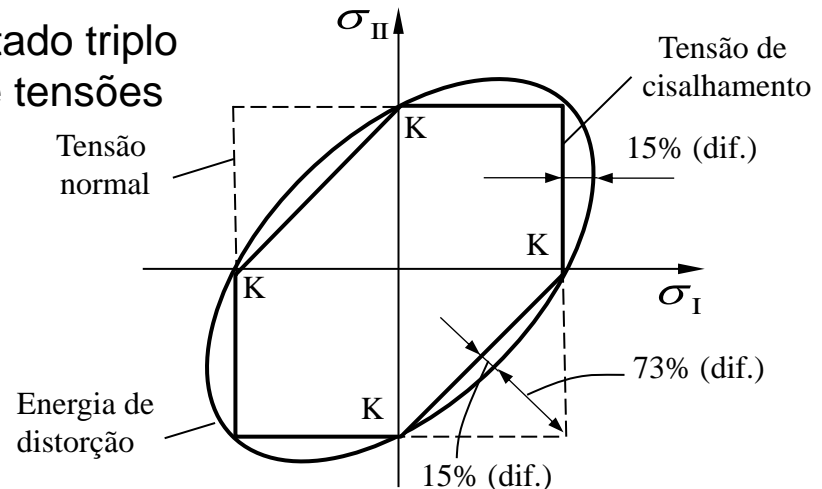
Elipse inclinada à 45° com semi-eixos

$$\sigma_V = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}$$

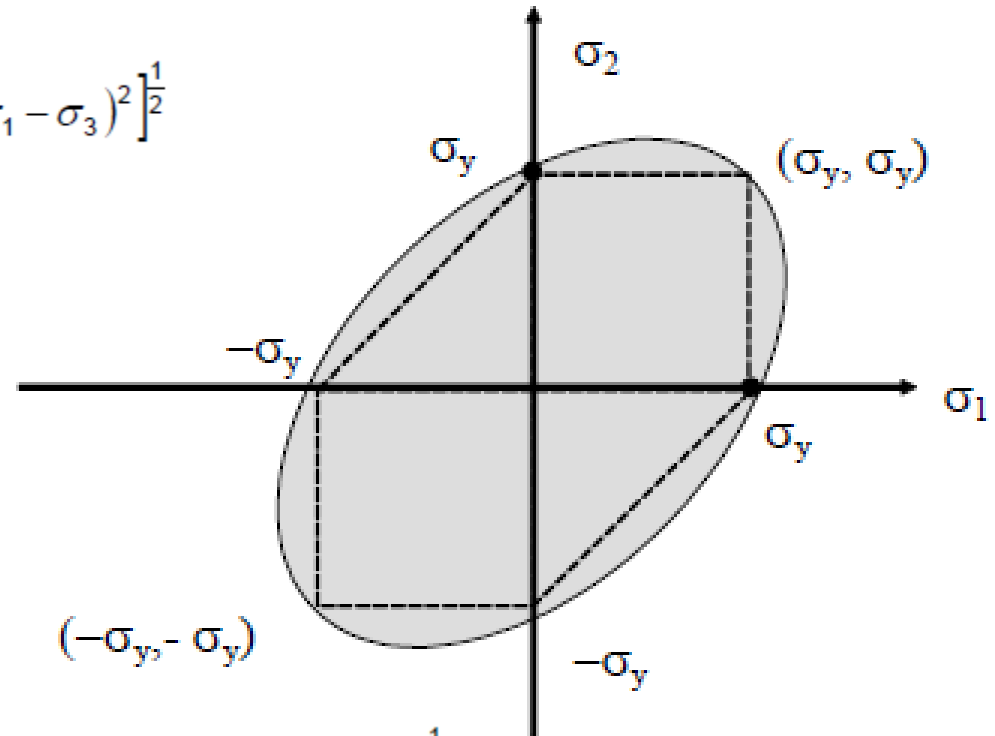
$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_I^2 - \sigma_I \cdot \sigma_{II} + \sigma_{II}^2} \quad \text{Estado duplo de tensões}$$

$$\begin{cases} K \cdot \sqrt{2} \\ K \cdot \sqrt{2/3} \end{cases}$$

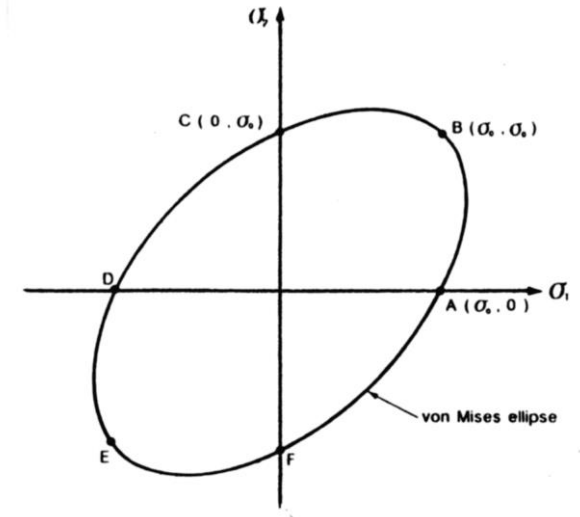
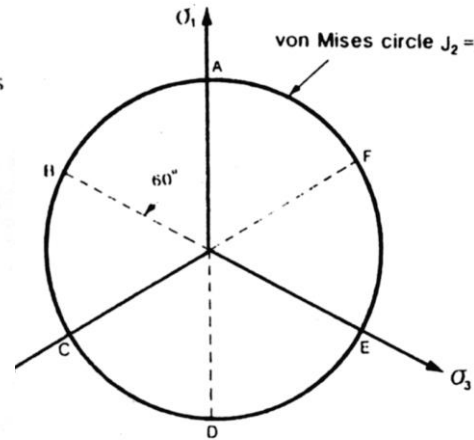
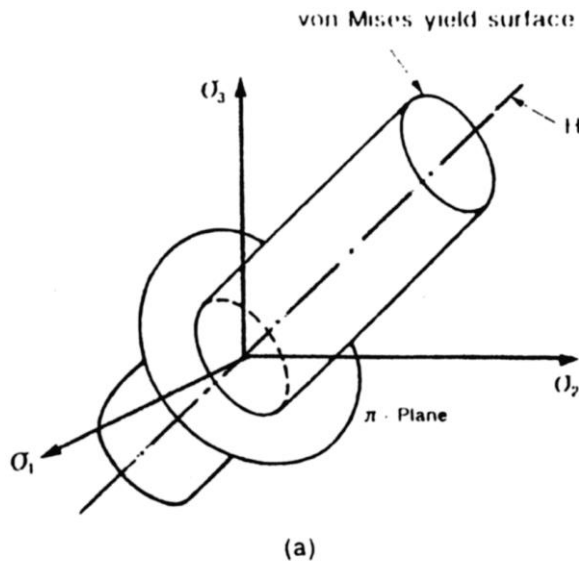
Estado triplo de tensões



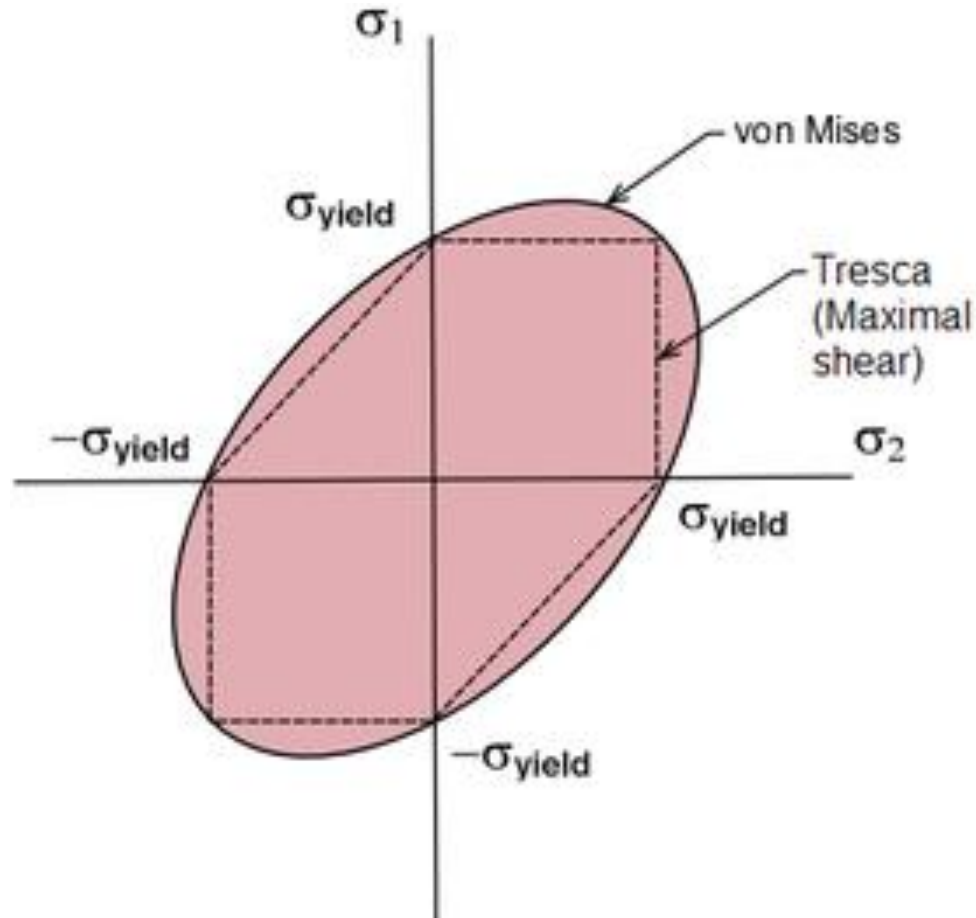
$$\sigma_{VM} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

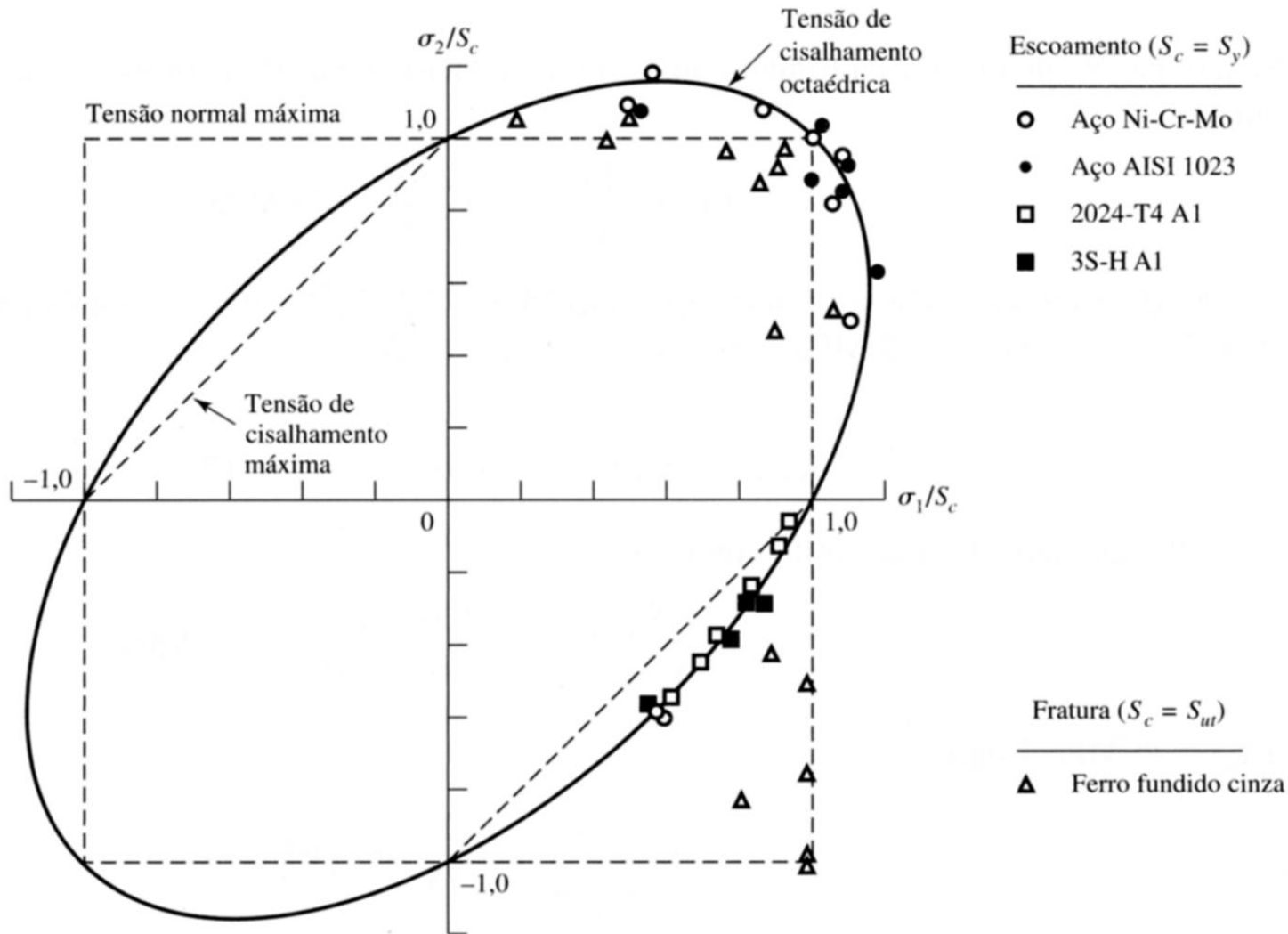


$$\sigma_{VM} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$



COMPARAÇÃO ENTRE CRITÉRIOS





Dados experimentais sobrepostos a teorias de falha. (Reproduzida da Figura 7.11, p. 257, Mechanical Behavior of Materials, 2nd ed., N. E. Dowling, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1999.)

3.8.5.1 Casos estáticos

a) Tensão equivalente

Critério + usado p/ aço \Rightarrow energia de distorção (Von Mises)

$$\left. \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} \text{tensões principais} \\ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \end{matrix} \Rightarrow \sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

b) Tensão admissível $\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{ruptura}}{\text{coef. de segurança}}$

3.8.5.2 Casos de solitação dinâmica (fadiga)

a) Tensão equivalente

Critério leva em conta a fadiga do material

$$\sigma_e = \sqrt{(\sigma_{\max} \cdot \beta_{Kf})^2 + H^2 \cdot (\tau_{\max} \cdot \beta_{Kt})^2}$$

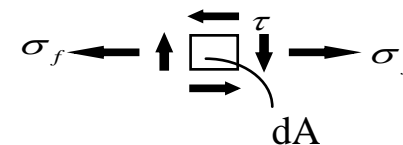
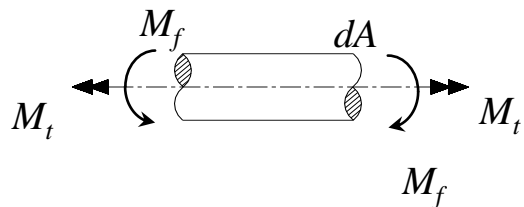
β_K 's = coef. de entalhe

$$H = \frac{\sigma_{\text{lim. fadiga}}}{\tau_{\text{lim. fadiga}}}$$

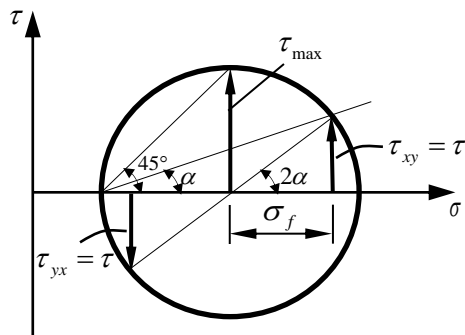
b) Tensão admissível $\sigma_{adm} \rightarrow$ teoria de fadiga

3.8.6. Aplicação dos critérios de resistência

- Eixo submetido à flexo-torção



- Círculo de Mohr



$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_f}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_f}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_f}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Critério de Resistência

Tensão de Confronto (σ_v)

Máx. tensão normal

$$\sigma_{eq} = \sigma_I = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Máx. tensão tangencial

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

Máx. energia de distorção (Von Mises)

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}$$

3.9 Referências

- Dowling NE. *Mechanical Behavior of Materials*. 3ª ed Ed. Pearson Prentice Hall.2007.
- Niemann G. *Elementos de Máquinas*, vol. I, Editora Edgard Blucher, 1991.
- Popov EP. *Introdução à mecânica dos sólidos*. Trad. Amorelli, M.O.C. Ed. Edgard Blücher, 1978.
- ShigleyJE, Mitchell LD. *Projeto de Engenharia Mecânica*, 7th ed., Bookman, Porto Alegre 2005.