PMT3306 - Módulo “Plasticidade” - Material de apoio - Parte 2

Cláudio Geraldo Schön

Departamento de Engenharia Metalúrgica e de Materiais
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

16 de setembro de 2020

Tensão equivalente

Limite de escoamento como critério de falha

Solicitação uniaxial:

$$\sigma_{11} \geq \sigma_e$$

Solicitação genérica:

$$\overline{\sigma} \geq \sigma_e$$

Tensão equivalente

Limite de escoamento como critério de falha

Solicitação uniaxial:

$$\sigma_{11} \geq \sigma_e$$

Solicitação genérica:

$$\overline{\sigma} \geq \sigma_e$$

$\overline{\sigma}$: Função escalar do tensor de tensão (ou de deformação).

Tensão equivalente de von Mises

Início do século XX, von Mises, Huber e Hencky:

$$\overline{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]} \tag{1}$$

O critério de von Mises pode ser expresso em termos de todos os elementos do tensor de tensão, mas aqui usaremos apenas a representação em termos das tensões principais.

Energia elástica

Trabalho elástico específico:

$$
\begin{aligned}
U_{el} \equiv \quad & \tfrac{1}{2}\sum_i \sum_j \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\sum_i \sigma_i \varepsilon_i \\
& = \sum_i \left[\frac{(\sigma_i)^2}{2E} - \sum_{j \neq i} \frac{\nu \sigma_i \sigma_j}{E} \right]
\end{aligned}
$$

Procuramos expressar em termos dos invariantes do tensor.

Invariantes do tensor

- Traço:

$$I_1 = \mathrm{Tr}|\sigma_{ij}| \equiv \sum_i \sigma_{ii}$$

- Segundo invariante:

$$I_2 = \det \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

Energia elástica específica:

$$U_{el} = \frac{1}{2E}\left[(I_1)^2 - 2I_2(1+\nu)\right]$$

Invariantes do tensor

- Traço:

$$I_1 = \mathrm{Tr}|\sigma_{ij}| \equiv \sum_i \sigma_{ii}$$

- Segundo invariante:

$$I_2 = \det \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

Usando $B = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ e $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$:

$$U_{el} = \frac{(I_1)^2}{18B} + \frac{1}{6G}\left[(I_1)^2 - 3I_2\right]$$

Contribuição hidrostática para a energia

Tensão média hidrostática, $\sigma_m \equiv -P$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3}$$

Primeiro termo de U_{el}:

$$U_P = \frac{P^2}{2B} \Leftarrow \frac{\partial U}{\partial P} = -V \Rightarrow U_P = -PV$$

Energia elástica reduzida

$$U_D = \frac{1}{6G}\left[(\sigma_1)^2 + (\sigma_2)^2 + (\sigma_3)^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1\right]$$

Energia elástica reduzida

$$U_D = \frac{1}{12G}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]$$

Energia elástica reduzida

$$U_D = \frac{1}{12G}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]$$

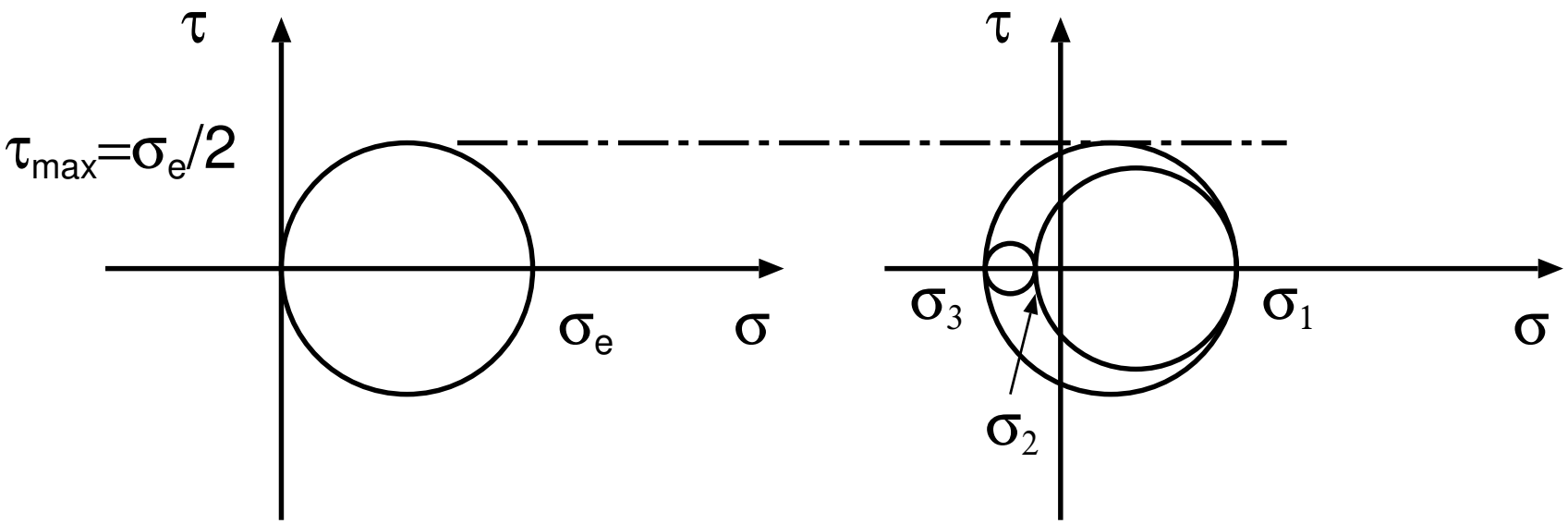
Calculando para o caso do escoamento em um estado de tensão uniaxial ($\sigma_1 = \sigma_e$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$):

$$U_D = \frac{(\sigma_e)^2}{6G}$$

ou seja,

$$U_D|_{uni} \leq U_D|_{tri} \Rightarrow \sigma_e \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Critério de Treska



$$|\frac{\sigma_e}{2}| \leq |\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}| \Rightarrow |\sigma_e| \leq |\sigma_1 - \sigma_3| \equiv \overline{\sigma}$$

Potencial plástico

Definindo:

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \overline{\sigma}^2}{\partial \sigma_{ij}} \mathrm{d}\zeta$$

Potencial plástico:

$$f_p = \overline{\sigma}^2$$

Usando o critério de von Mises:

$$2f_p = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \\ +6\left(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2\right) = 2\sigma_e^2$$

Relações de Lévy-Mises

$$\begin{cases} \mathrm{d}\varepsilon_{11} = (2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33})\,\mathrm{d}\zeta \\ \mathrm{d}\varepsilon_{22} = (2\sigma_{22} - \sigma_{33} - \sigma_{11})\,\mathrm{d}\zeta \\ \mathrm{d}\varepsilon_{33} = (2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22})\,\mathrm{d}\zeta \\ \mathrm{d}\varepsilon_{12} = \mathrm{d}\varepsilon_{21} = 3\sigma_{12}\mathrm{d}\zeta \\ \mathrm{d}\varepsilon_{23} = \mathrm{d}\varepsilon_{32} = 3\sigma_{23}\mathrm{d}\zeta \\ \mathrm{d}\varepsilon_{31} = \mathrm{d}\varepsilon_{13} = 3\sigma_{31}\mathrm{d}\zeta \end{cases}$$

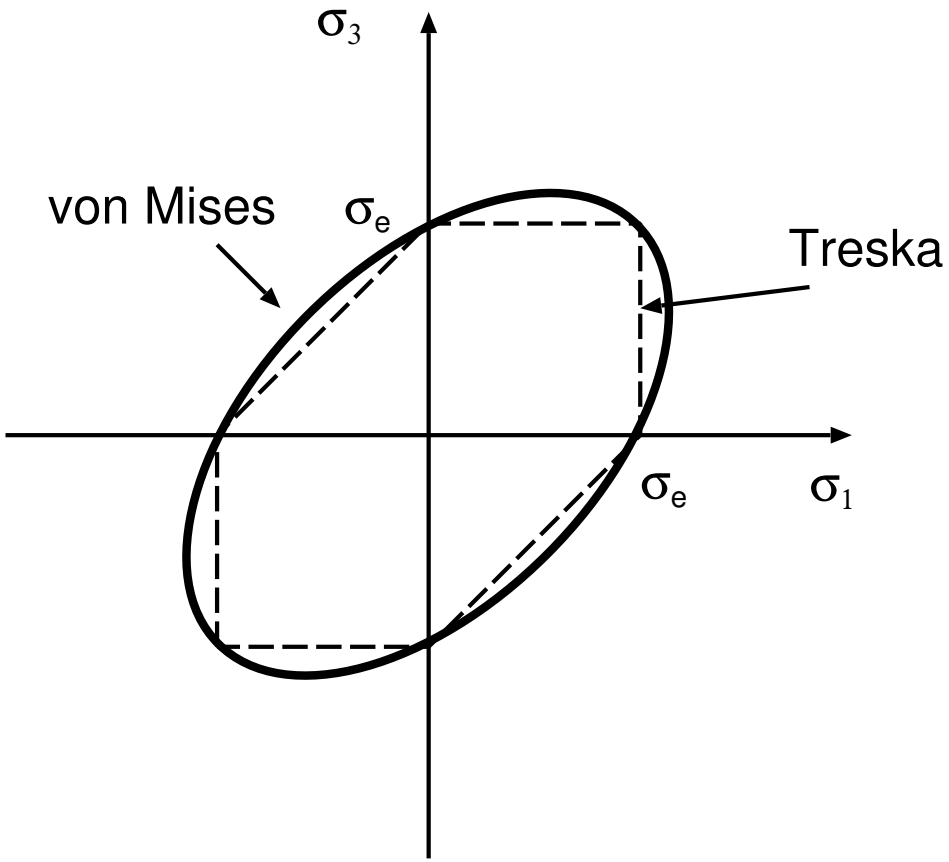
O parâmetro ζ tem a mesma estrutura de um multiplicador de Lagrange.

Critérios de escoamento no EPT

Critério de von Mises no EPT
($\sigma_2 \equiv 0$)

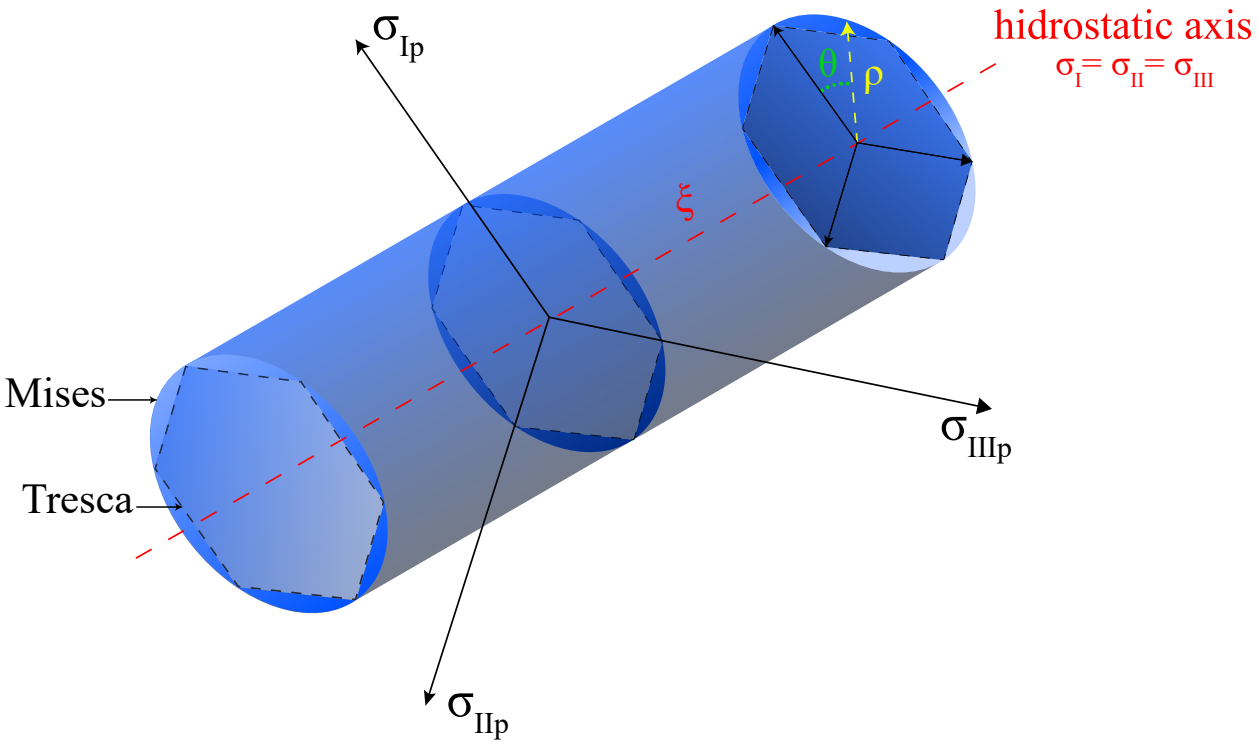
$$(\sigma_e)^2 \leq \frac{1}{2}\left[(\sigma_1)^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + (\sigma_3)^2\right]$$

Elipse no plano $\sigma_1 \times \sigma_3$
Critério de Treska $\rightarrow$ polígono inserido nesta elipse



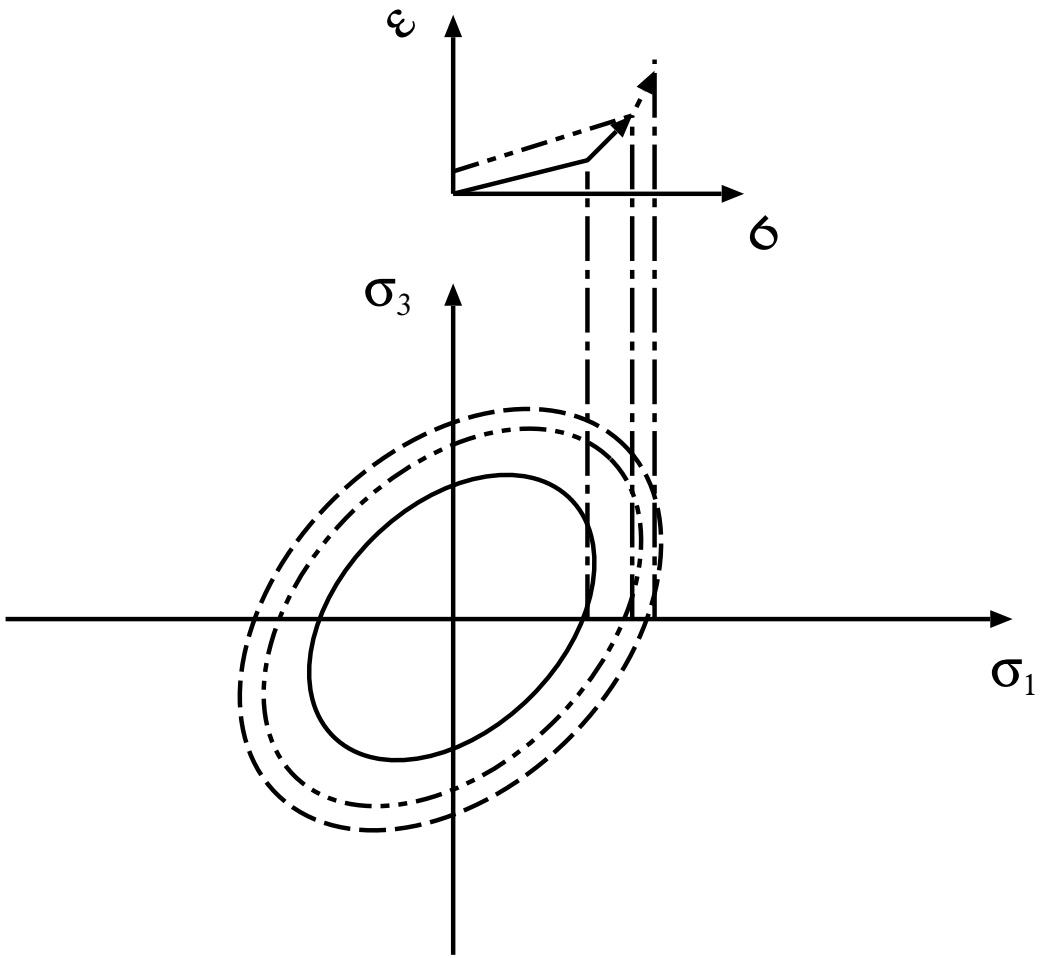
Representação tridimensional dos critérios de escoamento

Parâmetros de Lode

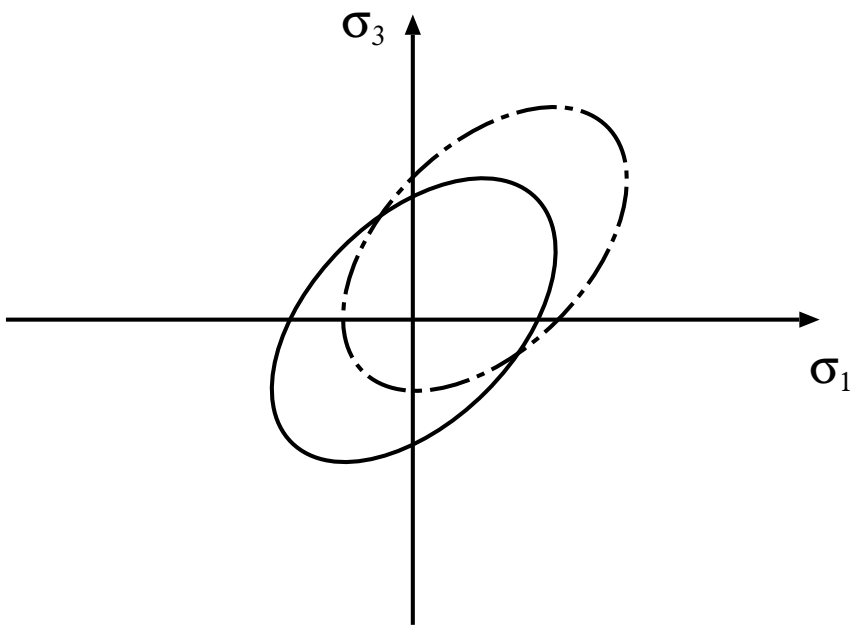


Parâmetros de Lode:
ξ, ρ, θ.

Encruamento isotrópico e anisotrópico



Note o aparecimento de efeito Bauschinger



Critério de escoamento Hill48

Estampagem

$$2f_p \equiv F\left(\sigma_{22}-\sigma_{33}\right)^2 + G\left(\sigma_{33}-\sigma_{11}\right)^2 + H\left(\sigma_{11}-\sigma_{22}\right)^2 \\ +2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 + 2N\sigma_{12}^2 = 1$$

F, G, H, L, M, N : parâmetros ajustáveis

Critério de Rankine

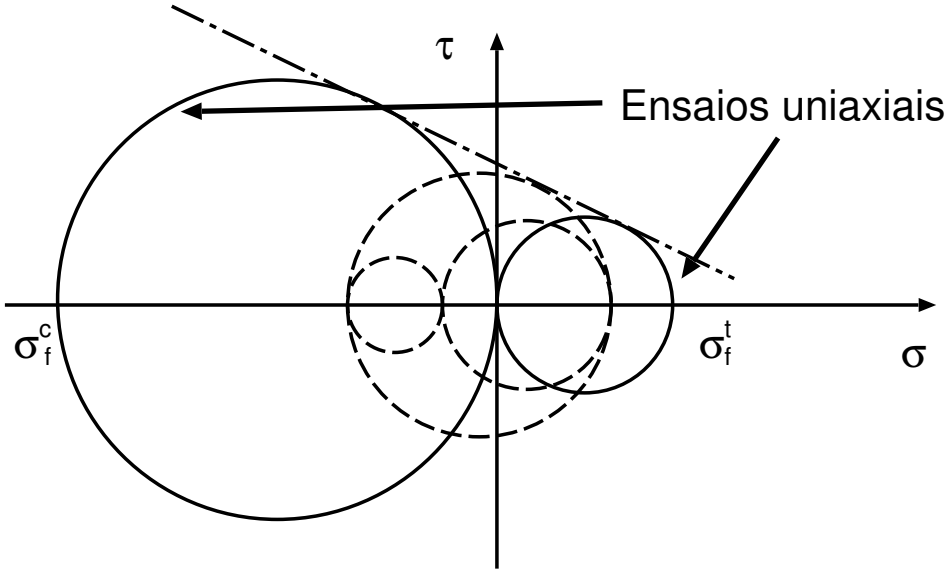
MTS

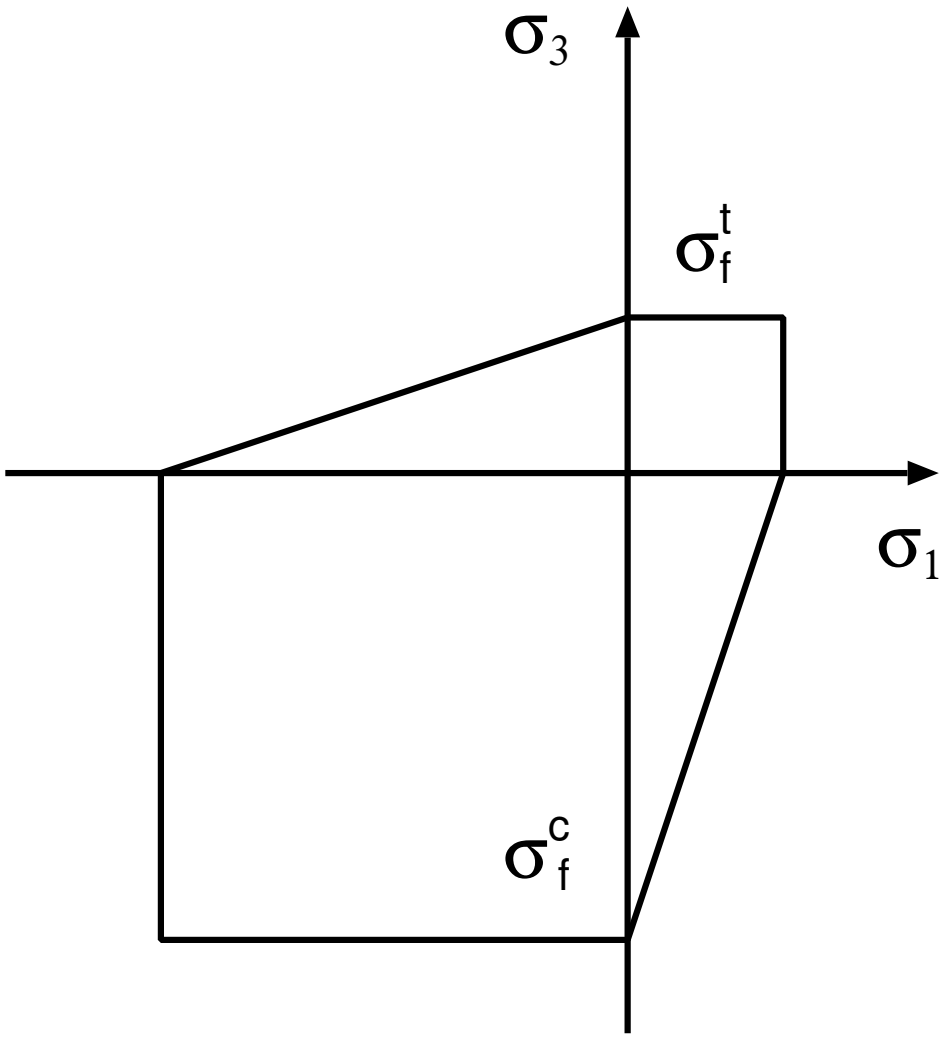
Meterial rompe ao atingir a máxima tensão normal correspondente ao carregamento uniaxial

$$\sigma_f \leq |\sigma_1|$$

Assume que a tensão de ruptura em tração é a mesma que a de compressão, quando em materiais frágeis se sabe que a resistência em compressão é muito maior.

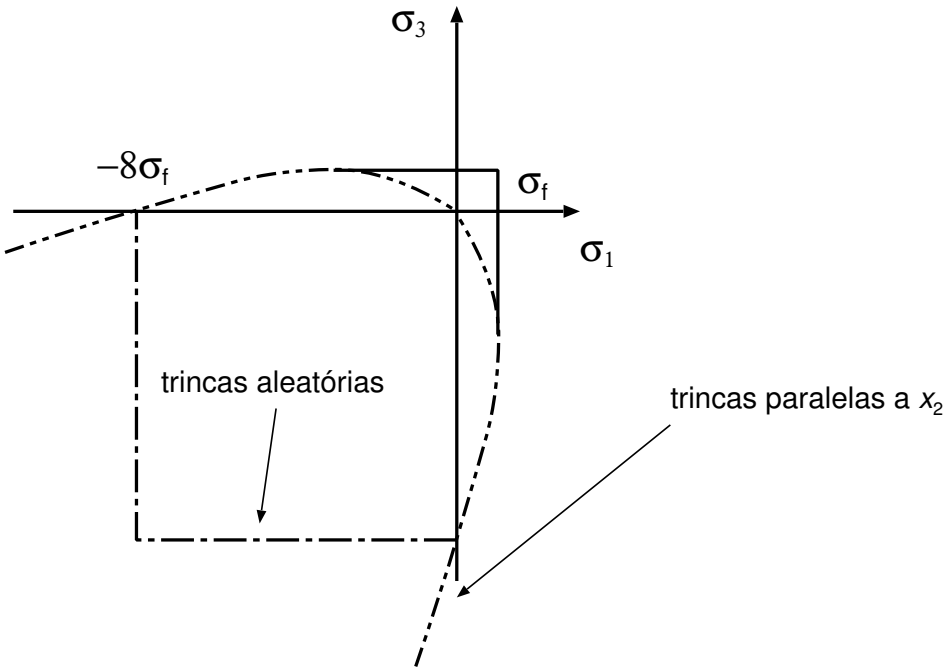
Critério de Mohr - Coulomb





Critério de Griffith

$$\begin{cases} (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + 8\sigma_f(\sigma_1 + \sigma_3) = 0 & \text{se} \quad \sigma_1 + 2\sigma_3 > 0 \\ \sigma_3 = \sigma_f & \text{se} \quad \sigma_1 + 2\sigma_3 \leq 0 \end{cases}$$



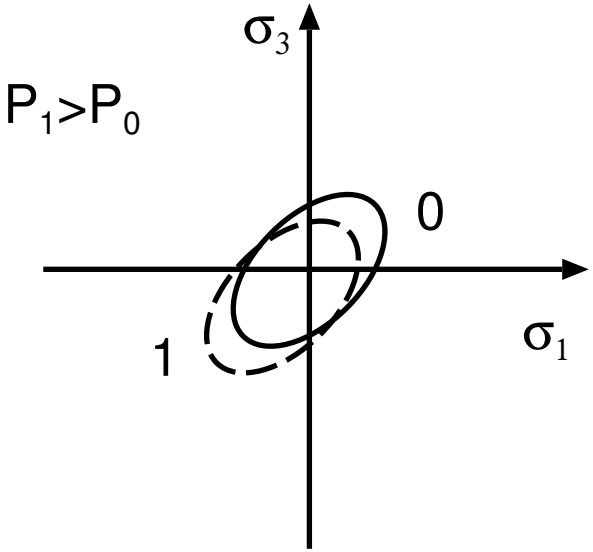
Critérios de Falha para casos especiais

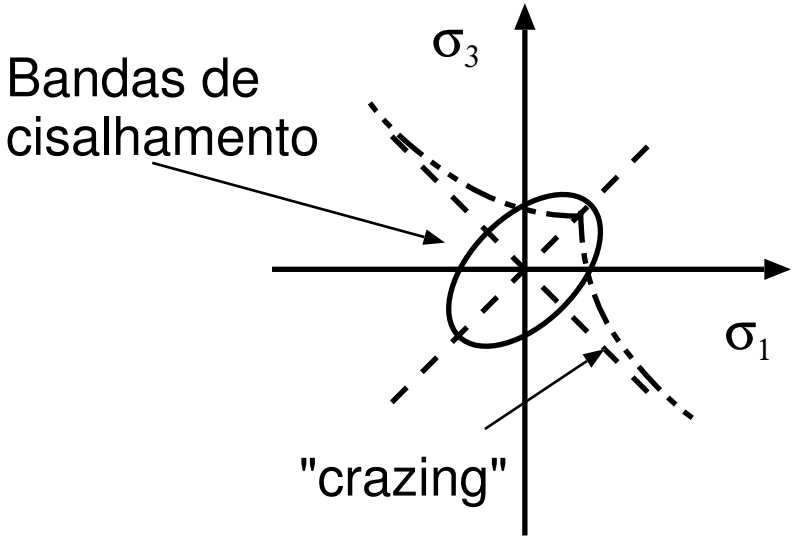
- McClintock - Walsh : termo de atrito (aplicações tectônicas)
- Polímeros
  - Efeito da pressão hidrostática

$$\sigma_e = \sigma_e^0 + k\sigma_m$$

  - *crazing*

$$\sigma_1 - \sigma_3 = A + \frac{B}{\sigma_1 + \sigma_3}$$





Estampabilidade

Definição tecnológica

- Ensaios de tração: n, R
- Ensaios simulativos
  - Ensaios de embutimento e de estiramento
  - Ensaios de orelhamento
  - Ensaios de expansão de furos
  - Ensaios de copo
- Curva limite de conformação / Ensaio de grade de círculos

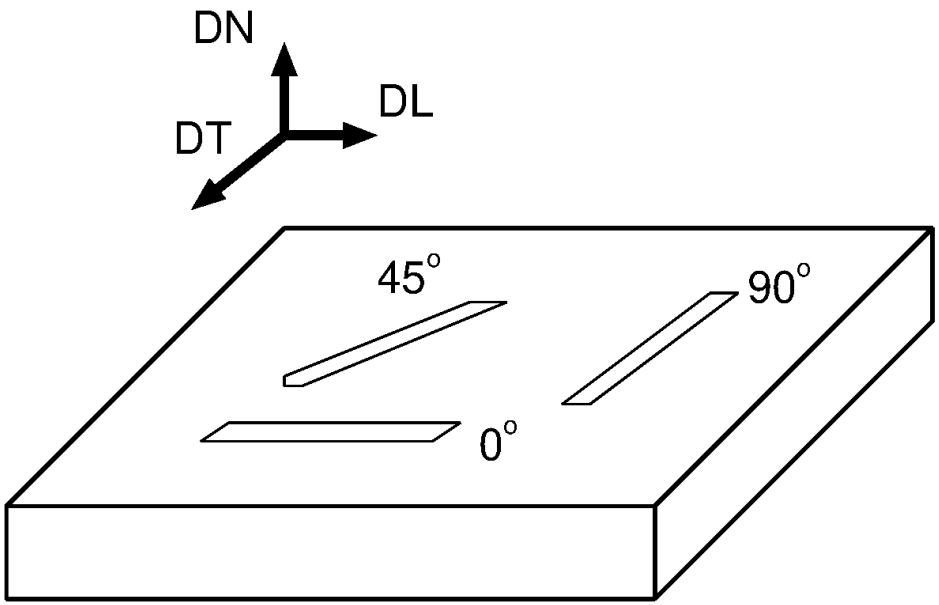
Ensaio de tração

- Coeficiente de encruamento $n \rightarrow$ Considère
- Coeficientes de Lankford (anisotropia)

$$R = \frac{\varepsilon_w^r}{\varepsilon_t^r}$$

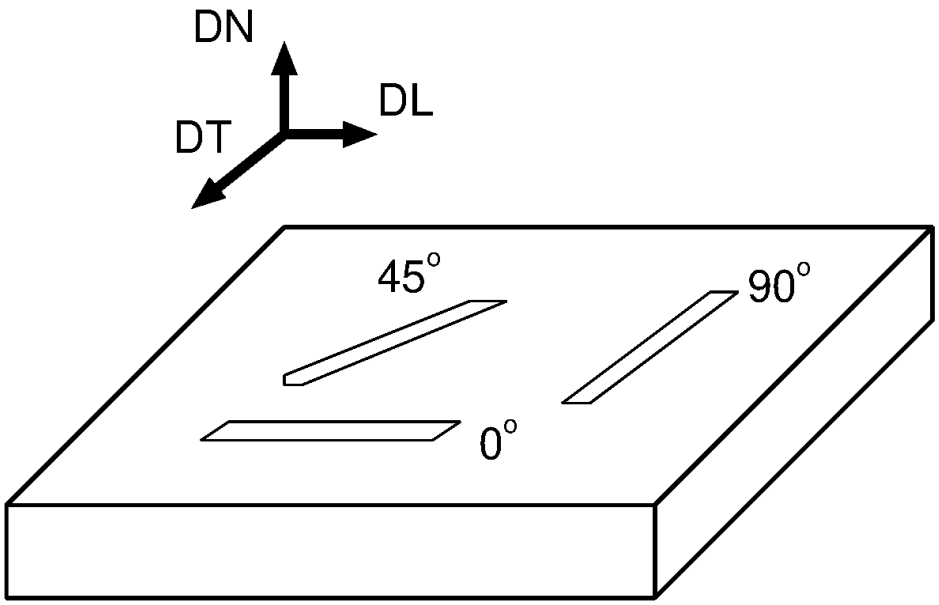
I. Aplicar uma deformação de cerca de 15% ao corpo de prova.
II. Medir o alongamento ao longo do comprimento (ε_l^r) e ao longo da largura (ε_w^r).
III. Calcular R usando a conservação do volume durante a deformação plástica.

Coeficientes de Lankford



$$\overline{R} = \frac{R_0 + 2R_{45} + R_{90}}{4}$$

Coeficientes de Lankford



$$\Delta R = \frac{R_0 - 2R_{45} + R_{90}}{4}$$

Aplicação do critério de Hill

Critério de escoamento Hill98

$$\bar{\sigma} = F\left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + G\left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2 + H\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 - 1 = 0$$

Impomos que os tensores são coaxiais

$$\dot{\varepsilon}_i = \dot{\lambda}\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_i} \Rightarrow \frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\lambda} = \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_i}$$

Aplicação do critério de Hill

Critério de escoamento Hill98

$$\bar{\sigma} = F\left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + G\left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2 + H\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 - 1 = 0$$

portanto

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \lambda} = 2\left(G + H\right)\sigma_1 - 2H\sigma_2 - 2G\sigma_3 \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \lambda} = 2\left(F + H\right)\sigma_2 - 2H\sigma_1 - 2F\sigma_3 \\ \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial \lambda} = 2\left(F + G\right)\sigma_3 - 2G\sigma_1 - 2F\sigma_2 \end{cases}$$

Aplicação do critério de Hill

Chapas se deformam em EPT, portanto $\sigma_3 = 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \lambda} = 2\left(G + H\right)\sigma_1 - 2H\sigma_2 \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \lambda} = 2\left(F + H\right)\sigma_2 - 2H\sigma_1 \\ \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial \lambda} = -2G\sigma_1 - 2F\sigma_2 \end{cases}$$

mas

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_2}{\mathrm{d}\varepsilon_3} = R_0 = \frac{H}{G}$$

e

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_1}{\mathrm{d}\varepsilon_3} = R_{90} = \frac{H}{F}$$

Aplicação do critério de Hill

É possível mostrar que:

$$\frac{(1+R_0)}{\left(\sigma_e^2\right)_{33}} - \frac{(1+R_0)}{\left(\sigma_e^2\right)_{22}} = \frac{(1-R_0)}{\left(\sigma_e^2\right)_{11}}$$

e

$$\frac{(1+R_{90})}{\left(\sigma_e^2\right)_{33}} - \frac{(1-R_{90})}{\left(\sigma_e^2\right)_{22}} = \frac{(1+R_{90})}{\left(\sigma_e^2\right)_{11}}$$

Aplicação do critério de Hill

Isolando $(\sigma_e)_{11}$:

$$\frac{1}{\left(\sigma_e^2\right)_{33}} = \frac{R_0 + R_{90}}{\left(1 + R_0\right) R_{90}} \frac{1}{\left(\sigma_e^2\right)_{11}}$$

e

$$\frac{1}{\left(\sigma_e^2\right)_{22}} = \frac{\left(1 + R_{90}\right) R_0}{\left(1 + R_0\right) R_{90}} \frac{1}{\left(\sigma_e^2\right)_{11}}$$

Aplicação do critério de Hill

Finalmente

$$F = \frac{R_0}{(1 + R_0)\, R_{90}} \frac{1}{\left(\sigma_e^2\right)_{11}}$$

e

$$G = \frac{1}{(1 + R_0)} \frac{1}{\left(\sigma_e^2\right)_{11}}$$

Substituindo na expressão 2 (e usando $H = R_0 G$) temos finalmente:

$$\sigma_1^2 + \frac{R_0\,(1 + R_{90})}{R_{90}\,(1 + R_0)\, R_{90}} \sigma_2^2 - \frac{2R_0}{1 + R_0} \sigma_1 \sigma_2 = \left(\sigma_e^2\right)_{11}$$

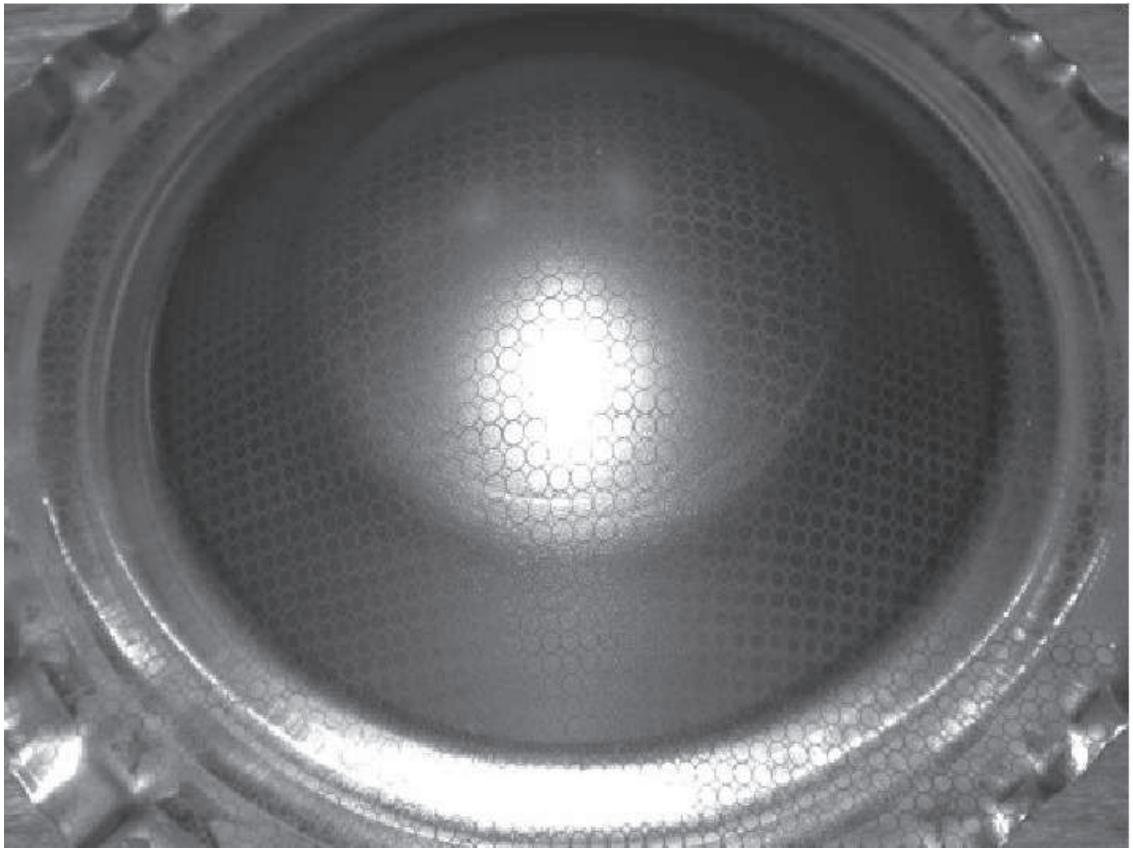
Ensaios simulativos

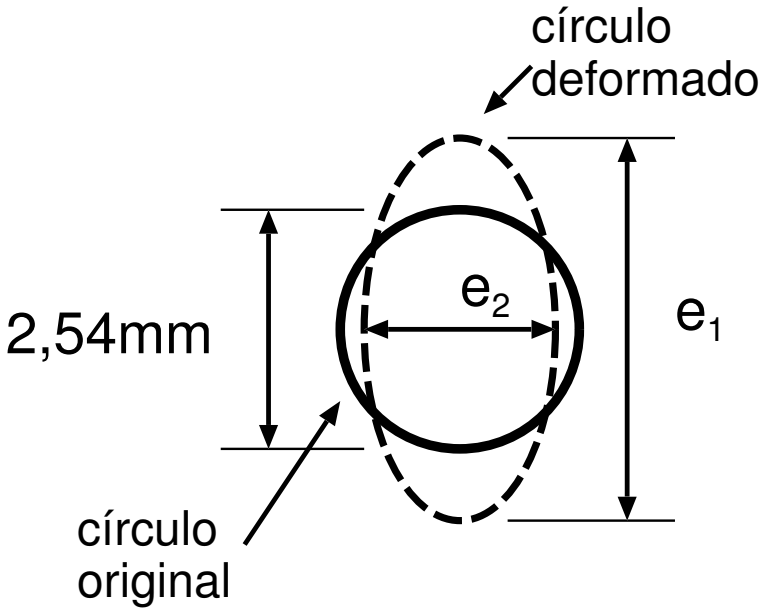
1. Ensaios de embutimento.
2. Ensaios de estiramento.
3. Ensaios de estampagem de copos.
4. Ensaios de expansão de furos.
5. *Bulge test.*

Vídeo da Zwick

Curva limite de conformação, CLC

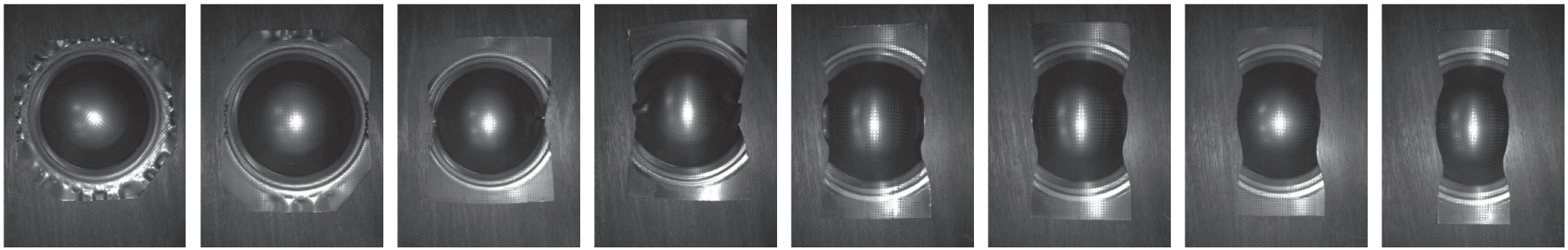
Forming limit curves,FLC

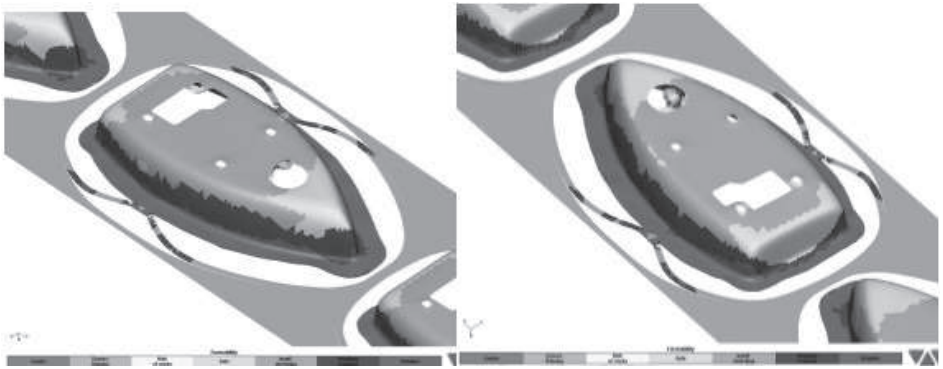


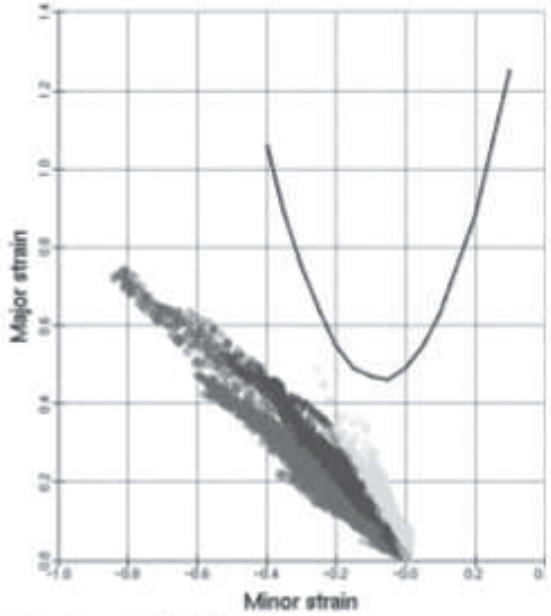


Curva limite de conformação, CLC

Forming limit curves,FLC

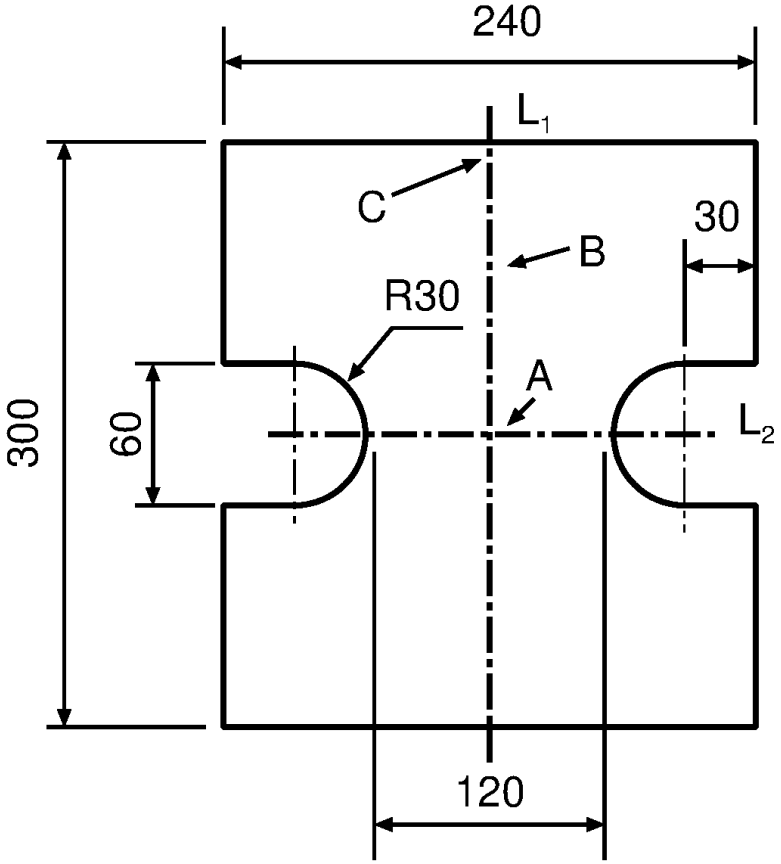






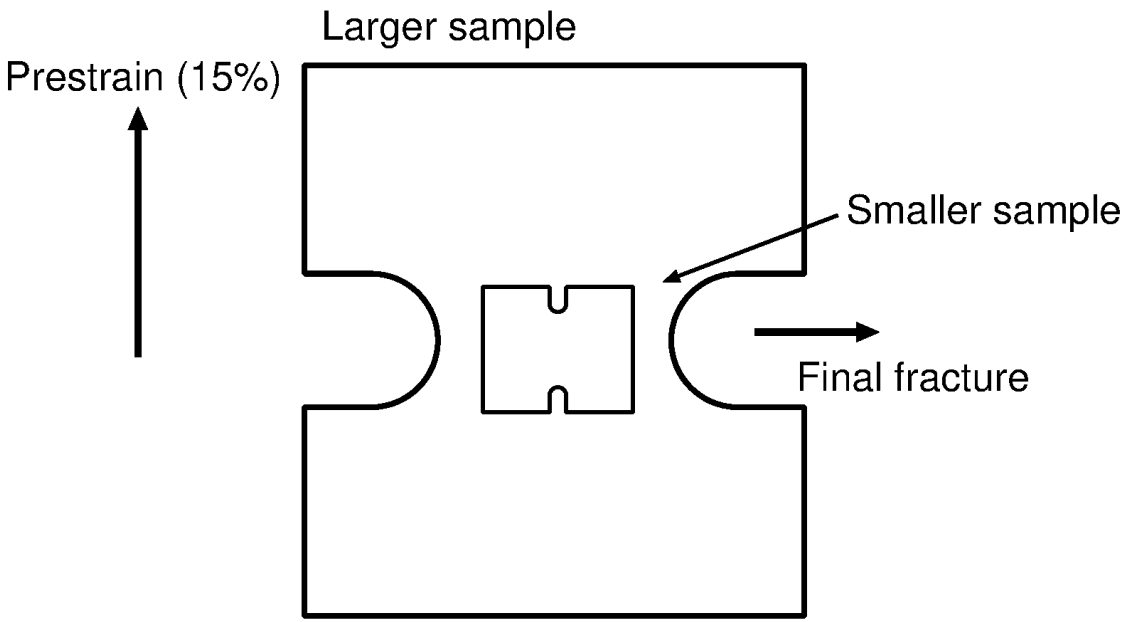
Forming Limit Diagram

Estudo de caso: Efeito do caminho de deformação



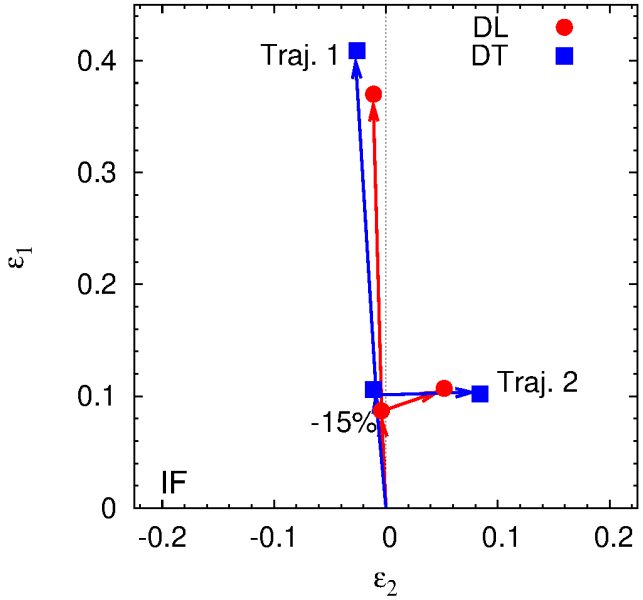
M. D. Xavier “Análise da estampabilidade de chapas de aço baixo e médio carbono através de deformações plásticas uniaxiais e ortogonais quase planares” *Tese de doutoramento*, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2014.

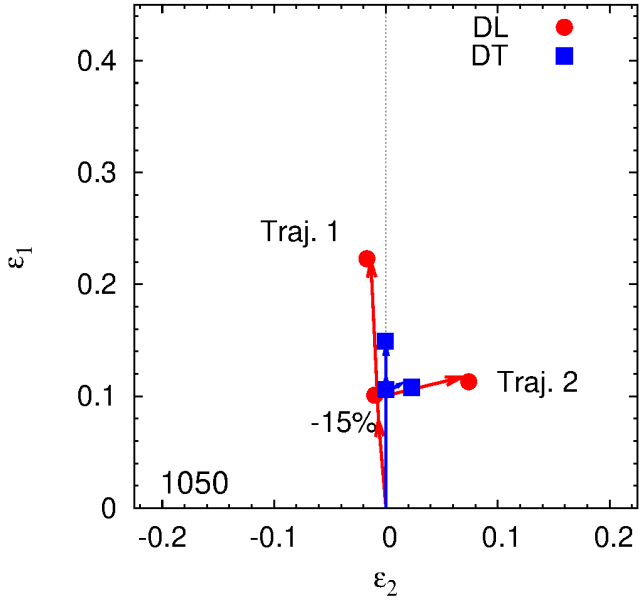
Estudo de caso: Efeito do caminho de deformação



M. D. Xavier “Análise da estampabilidade de chapas de aço baixo e médio carbono através de deformações plásticas uniaxiais e ortogonais quase planares” *Tese de doutoramento*, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2014.

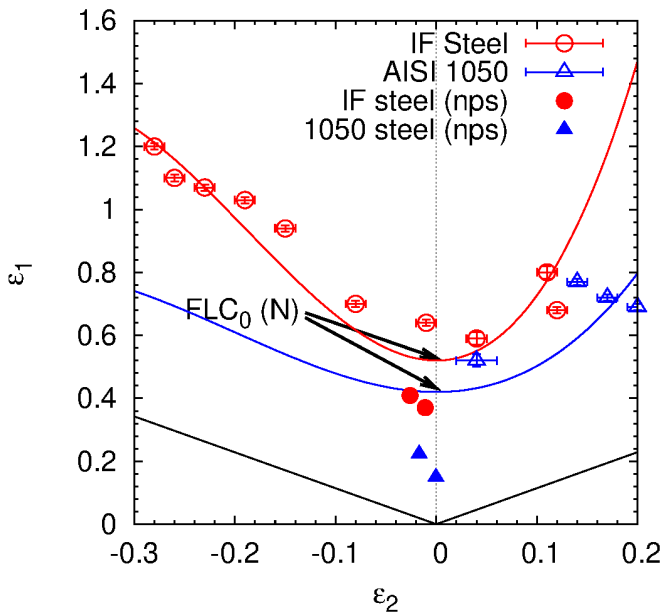
Estudo de caso: Efeito do caminho de deformação

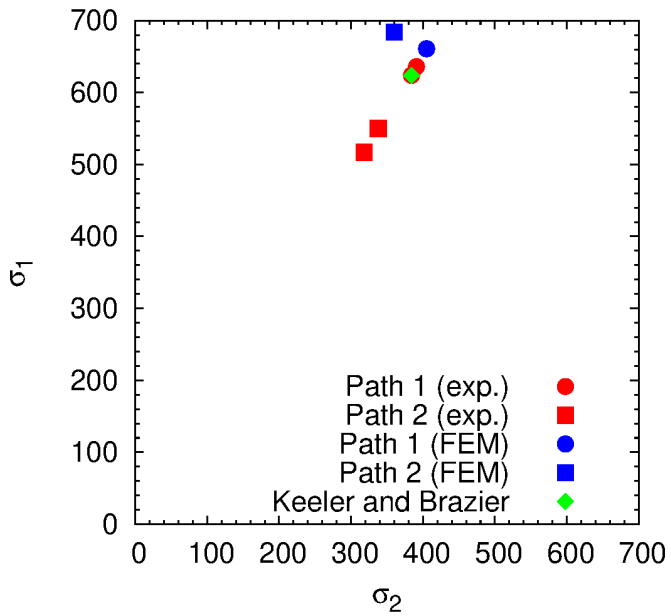




M. D. Xavier “Análise da estampabilidade de chapas de aço baixo e médio carbono através de deformações plásticas uniaxiais e ortogonais quase planares” *Tese de doutoramento*, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2014.

Estudo de caso: Efeito do caminho de deformação





M. D. Xavier “Análise da estampabilidade de chapas de aço baixo e médio carbono através de deformações plásticas uniaxiais e ortogonais quase planares” *Tese de doutoramento*, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2014.