Resolver sistema Linear...

$$\left[Kest\right]_{3nn\ x\ 3nn} \cdot \left\{Uest\right\}_{3nn} = \left\{Fest\right\}_{3nn}$$

Métodos Diretos: Gauss (matriz cheia, banda, skyline)
Iterativos: Gradientes Conjugados

ESFORÇOS FINAIS

Após o cálculo dos deslocamentos dos nós, os esforços podem ser obtidos, para o **elemento genérico "j**", mediante o uso da combinação linear (ou efeito final) dada por:

$$E_j = [k]_j . \delta_j - \left(f_p\right)_j$$

$$\begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{61} & \cdots & k_{66} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} (f_p)_1 \\ (f_p)_2 \\ (f_p)_3 \\ (f_p)_4 \\ (f_p)_5 \\ (f_p)_6 \end{Bmatrix}$$

Lembrando que a matriz k é a matriz de rigidez do elemento no **sistema local**.
Os deslocamentos δ são os seis valores do elemento no **sistema local**. O vetor dos termos de f_p são relativos as cargas distribuídas.

Note que a resolução sistema linear final da estrutura fornece todos os deslocamentos da estrutura no **sistema global**.

Desta forma, para cada barra é necessário obter os deslocamentos no **sistema local**, assim, primeiramente, isolam-se os deslocamentos do elemento, ou seja, para um elemento genérico "e", com nós inicial e final, respectivamente, "*i*" e "*j*"; a lei de endereçamento pode ser aplicada, de modo a se ter os deslocamentos do elemento no sistema global indicado por:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} U_{est}(3\cdot i-2) \\ U_{est}(3\cdot i-1) \\ U_{est}(3\cdot i) \\ U_{est}(3\cdot j-2) \\ U_{est}(3\cdot j-1) \\ U_{est}(3\cdot j) \end{Bmatrix}$$

Neste ponto, é necessário transformar os deslocamentos do elemento $\{U\}^e$ para o **sistema local**, por:

$$\{\delta\}^e_{6x1} = [R]^e \cdot \{U\}^e_{6x1}$$

$$\begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{61} & \cdots & k_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} (f_p)_1 \\ (f_p)_2 \\ (f_p)_3 \\ (f_p)_4 \\ (f_p)_5 \\ (f_p)_6 \end{Bmatrix}$$

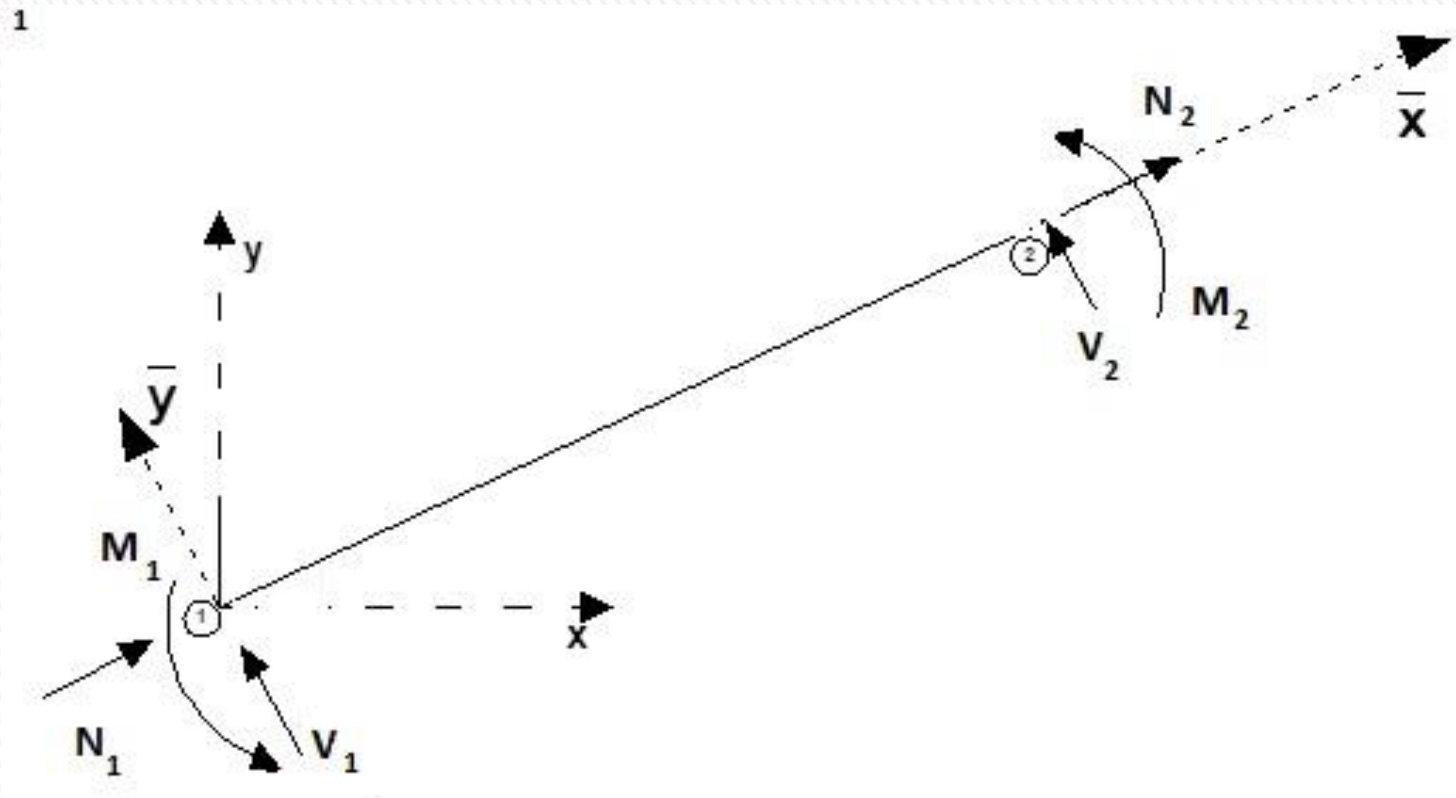
Desta forma, obtém os esforços de cada elemento, onde cada um dos termos do vetor $\{E\}_6$ representa os seguintes esforços, no **sistema local**:

$$\begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{61} & \cdots & k_{66} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} (f_p)_1 \\ (f_p)_2 \\ (f_p)_3 \\ (f_p)_4 \\ (f_p)_5 \\ (f_p)_6 \end{Bmatrix}$$

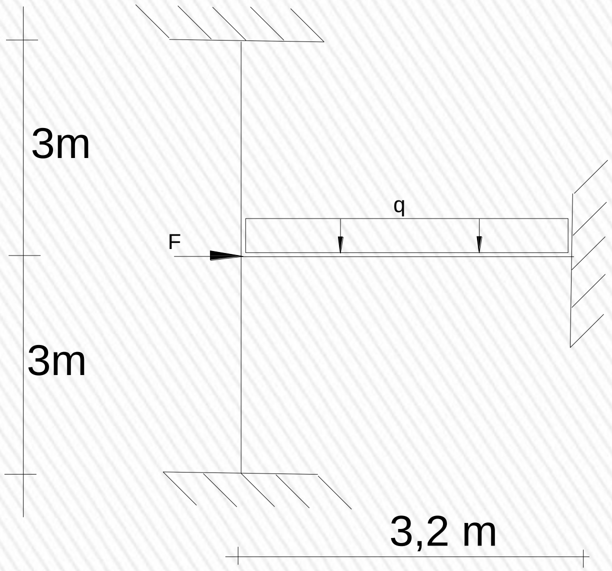
E_1 e E_4: esforço normal do nó inicial e final;

E_2 e E_5: esforço cortante do nó inicial e final;

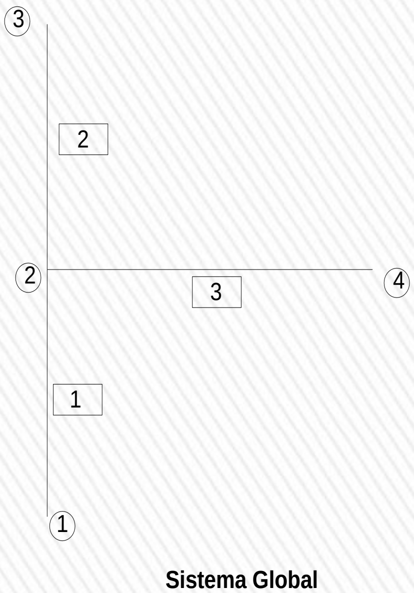
E_3 e E_6: momento fletor do nó inicial e final;

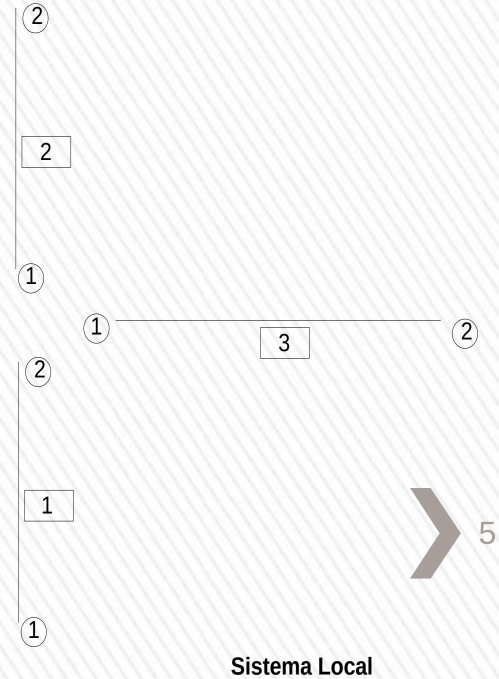


Exemplo 1: Obtenha via MEF os deslocamentos e esforços para o pórtico plano abaixo. Seção quadrada de lado 15 cm. q = 8 kN/m. F = 50 kN E = 21 MPa



Resolução:





Exemplo 1

A = 0,0225m^2 I = 4,21875E-5 m^4

Barra 1 = Barra 2

$$k^{1=2} = \begin{bmatrix} 157{,}5 & 0 & 0 & -157{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}39375 & 0{,}590625 & 0 & -0{,}39375 & 0{,}590625 \\ 0 & 0{,}590625 & 1{,}18125 & 0 & -0{,}590625 & 0{,}590625 \\ -157{,}5 & 0 & 0 & 157{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}39375 & -0{,}590625 & 0 & 0{,}39375 & -0{,}590625 \\ 0 & 0{,}590625 & 0{,}590625 & 0 & -0{,}590625 & 1{,}18125 \end{bmatrix}$$

$$[R]^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1

Barra 3

$$k^3 = \begin{bmatrix} 147{,}65625 & 0 & 0 & -147{,}65625 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}32444 & 0{,}5191 & 0 & -0{,}32444 & 0{,}5191 \\ 0 & 0{,}5191 & 1{,}1074 & 0 & -0{,}5191 & 0{,}5537 \\ -147{,}65625 & 0 & 0 & 147{,}65625 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}32444 & -0{,}5191 & 0 & 0{,}32444 & -0{,}5191 \\ 0 & 0{,}5191 & 0{,}5537 & 0 & -0{,}5191 & 1{,}1074 \end{bmatrix}$$

$$[R]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

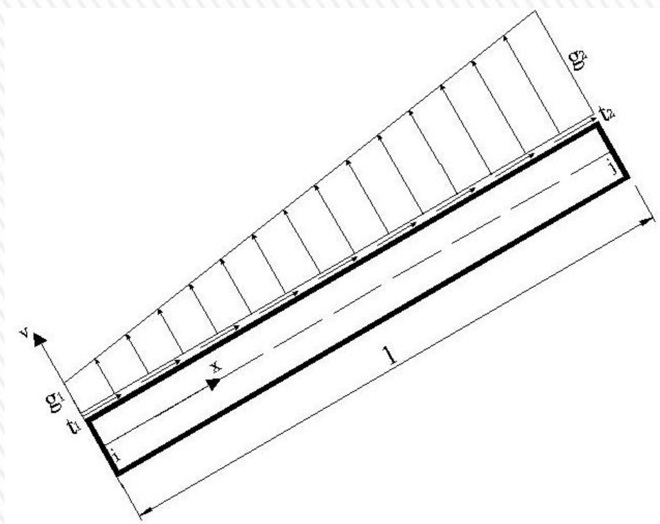
Exemplo 1

Forças Nodais Equivalentes:
Somente na Barra 3:

$$\{f_p\} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{1}{3}.t_1 + \frac{1}{6}.t_2\right).\ell \\ \left(\frac{7}{20}.g_1 + \frac{3}{20}.g_2\right).\ell \\ \left(\frac{1}{20}.g_1 + \frac{1}{30}.g_2\right).\ell^2 \\ \left(\frac{1}{6}.t_1 + \frac{1}{3}.t_2\right).\ell \\ \left(\frac{3}{20}.g_1 + \frac{7}{20}.g_2\right).\ell \\ \left(-\frac{1}{30}.g_1 - \frac{1}{20}.g_2\right).\ell^2 \end{Bmatrix}$$

$$f_p^3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -12{,}8 \\ -6{,}8267 \\ 0 \\ -12{,}8 \\ 6{,}8267 \end{Bmatrix}$$

$$\{F\}^e_{6x1} = [R]^T_{6x6} \cdot \{f_p\}_{6x1}$$



Exemplo 1

Matriz de rigidez e vetor de forças da estrutura **sem** aplicar **condições de contorno**:

$$
Kest = \begin{bmatrix}
0{,}39375 & 0 & -0{,}590625 & -0{,}39375 & 0 & -0{,}590625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 157{,}5 & 0 & 0 & -157{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0{,}590625 & 0 & 1{,}18125 & 0{,}590625 & 0 & 0{,}590625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0{,}39375 & 0 & 0{,}590625 & 148{,}44375 & 0 & 0 & -0{,}39375 & 0 & -0{,}590625 & -147{,}65625 & 0 & 0 \\
0 & -157{,}5 & 0 & 0 & 315{,}32444 & 0{,}5191 & 0 & -157{,}5 & 0 & 0 & -0{,}32444 & 0{,}5191 \\
-0{,}590625 & 0 & 0{,}590625 & 0 & 0{,}5191 & 3{,}4699 & 0{,}590625 & 0 & 0{,}590625 & 0 & -0{,}5191 & 0{,}5537 \\
0 & 0 & 0 & -0{,}39375 & 0 & 0{,}590625 & 0{,}39375 & 0 & 0{,}590625 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -157{,}5 & 0 & 0 & 157{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -0{,}590625 & 0 & 0{,}590625 & 0{,}590625 & 0 & 1{,}18125 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -147{,}65625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 147{,}65625 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}32444 & -0{,}5191 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}32444 & -0{,}5191 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5191 & 0{,}5537 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}5191 & 1{,}1074
\end{bmatrix}
$$

$$
\{Fest\}^T = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 50 \quad -12{,}8 \quad -6{,}8267 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -12{,}8 \quad 6{,}8267\}
$$

Exemplo 1

Impondo as condições de contorno, por exemplo, aplicando a técnica de “zeros” e “uns”, tem-se a matriz e o vetor de forças alterados para:

kest =

1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	148.4437	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	315.3244	0.5191	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0.5191	3.4699	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1.0000	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1.0000	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1.0000	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.0000	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.0000	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.0000

$$\{Fest\}^T = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 50 \quad -12{,}8 \quad -6{,}8267 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}$$

Resolvendo sistema linear...

Exemplo 1

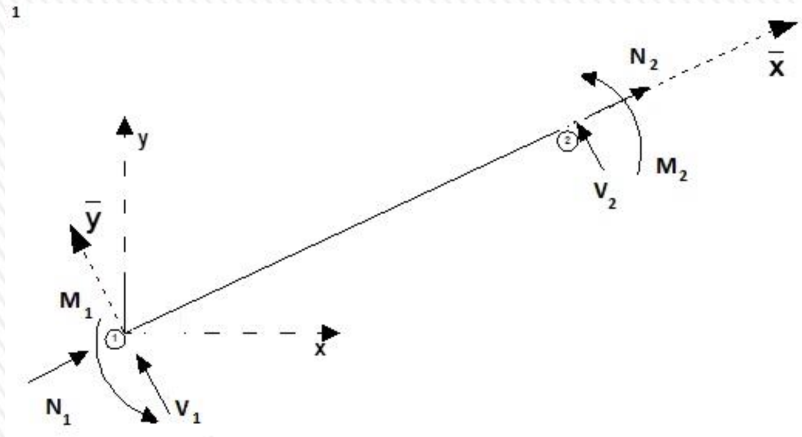
```
>> inv(kest)*Fest

ans =

         0
         0
         0
    0.3368
   -0.0374
   -1.9618
         0
         0
         0
         0
         0
         0
```

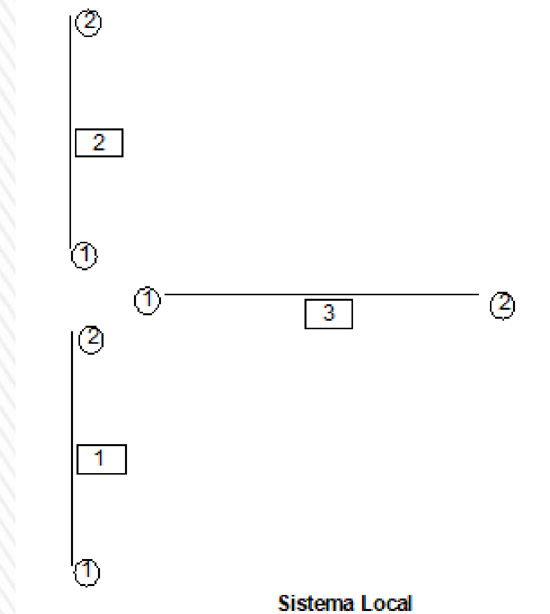

$$\{Uest\}^T = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0{,}3368 \quad (-3{,}7363E-2) \quad -1{,}9618 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}$$

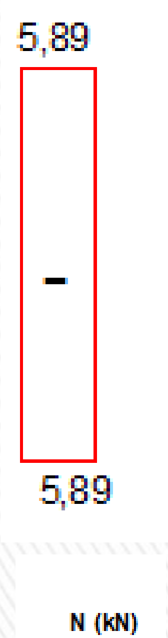
Exemplo 1

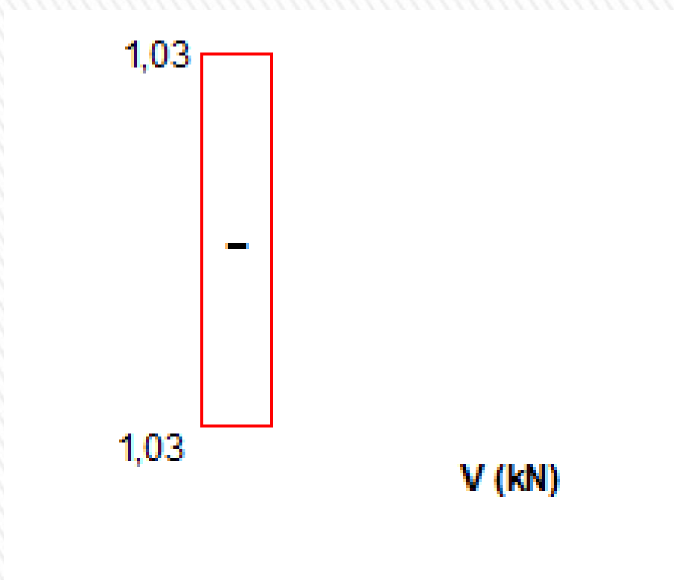
ESFORÇOS FINAIS

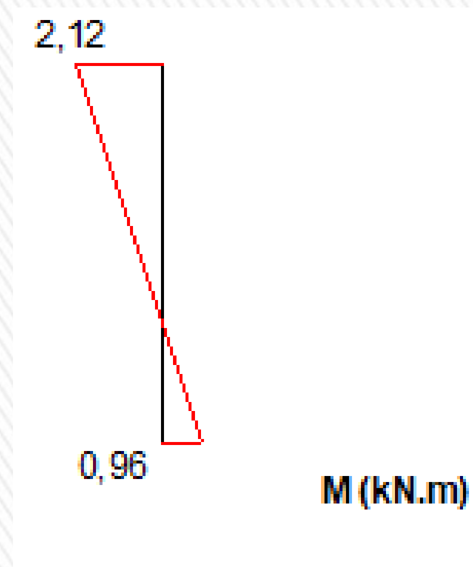
$$\begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{Bmatrix}^1 = \begin{Bmatrix} 5,88475 \\ -1,0261 \\ -0,9597 \\ -5,88475 \\ 1,0261 \\ -2,1184 \end{Bmatrix}$$



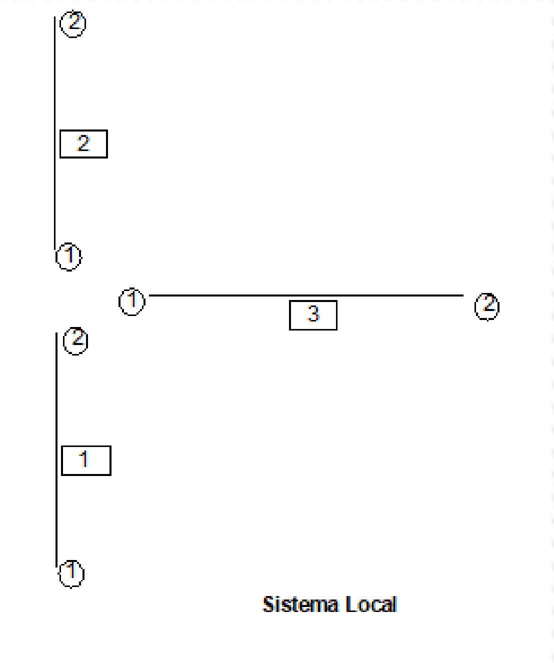


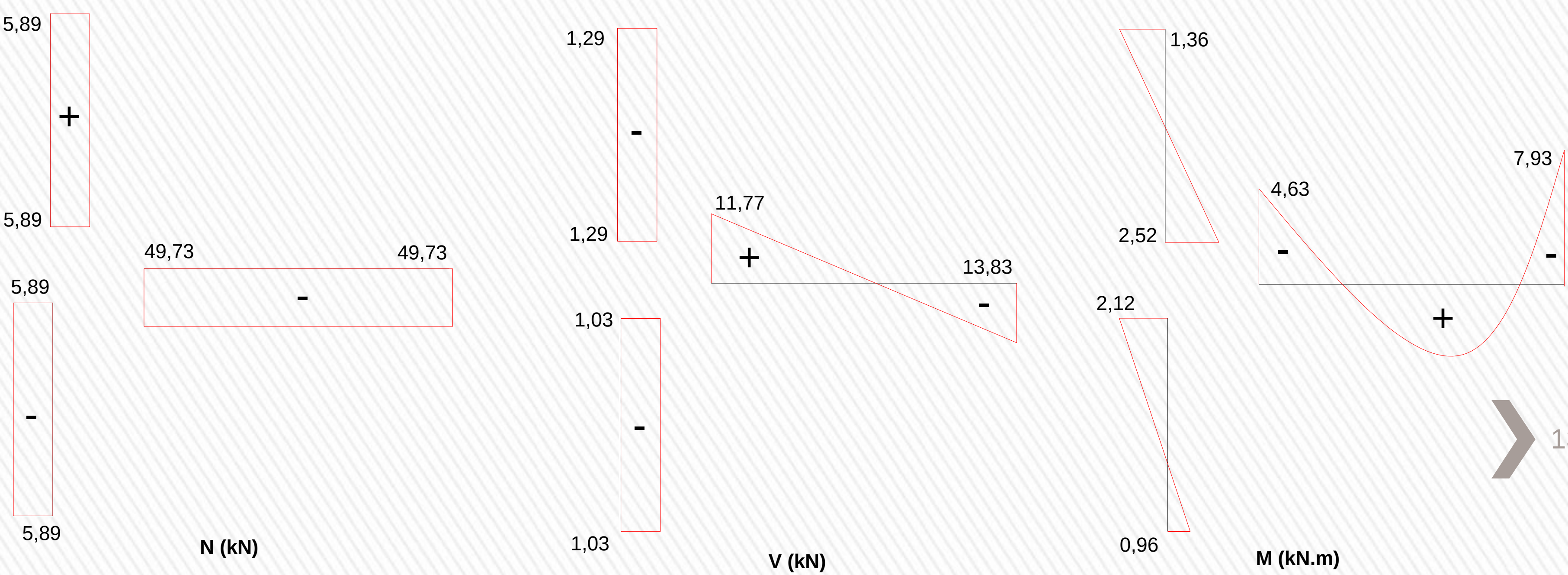




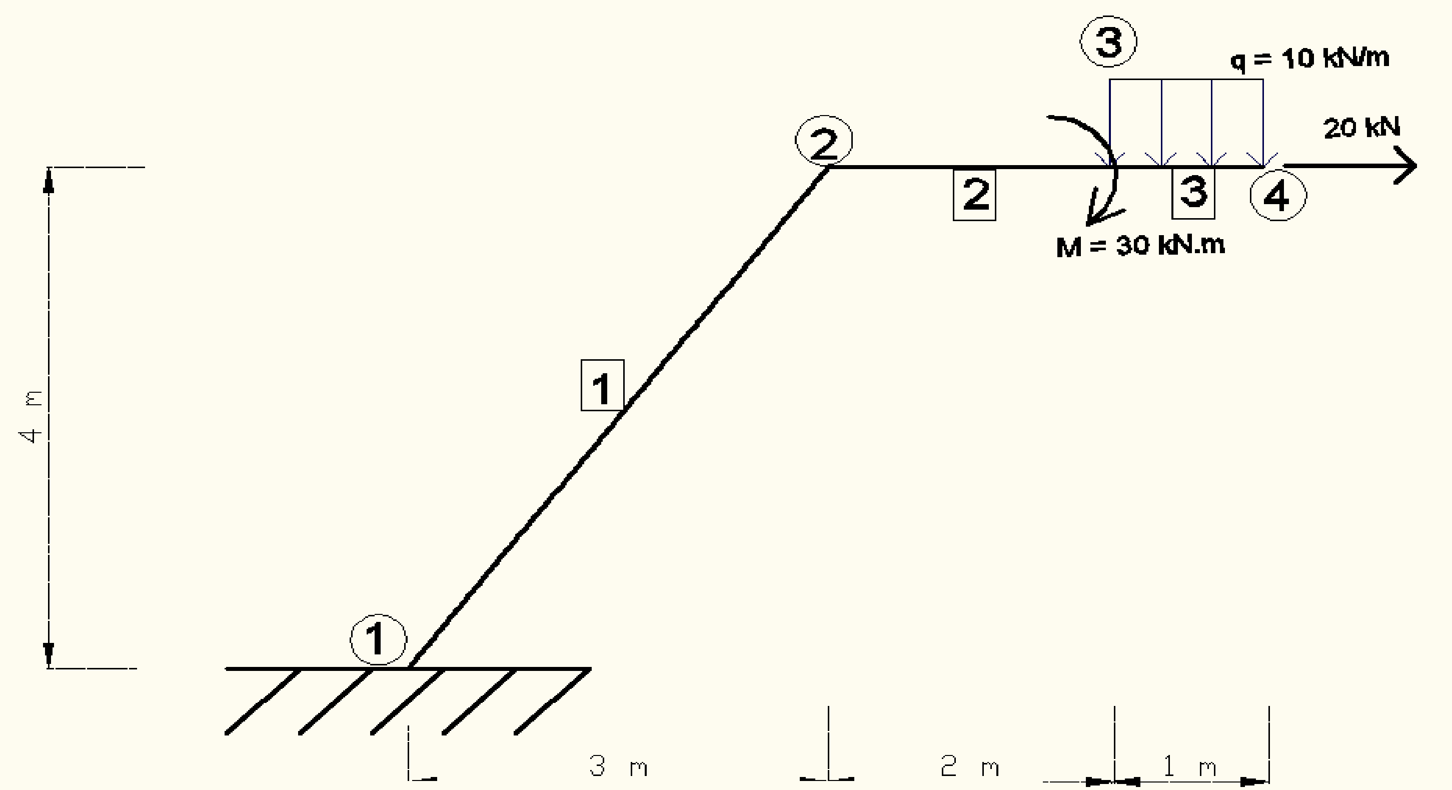


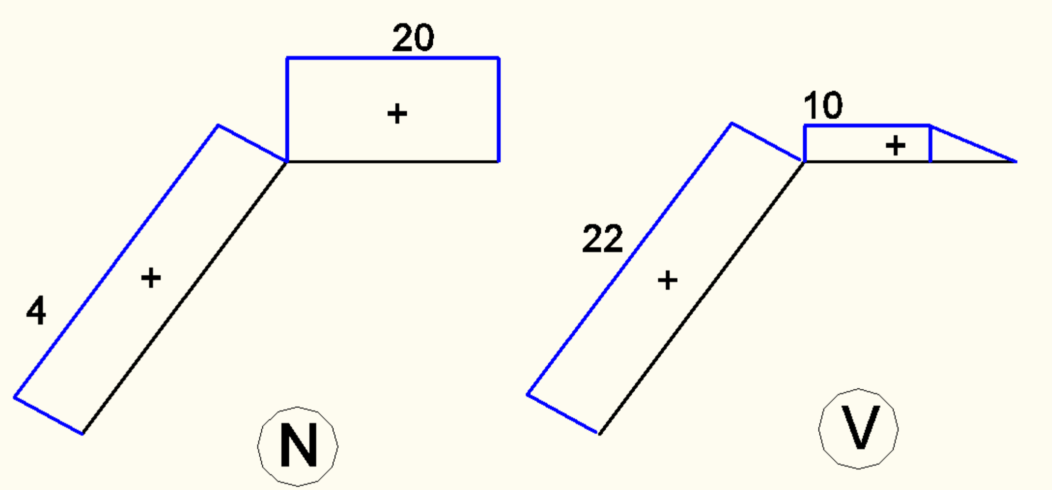
$$\begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{Bmatrix}^2 = \begin{Bmatrix} -5{,}88475 \\ -1{,}2913 \\ -2{,}5163 \\ 5{,}88475 \\ 1{,}2913 \\ -1{,}3576 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{Bmatrix}^3 = \begin{Bmatrix} 49{,}7347 \\ 11{,}7695 \\ 4{,}6347 \\ -49{,}7347 \\ 13{,}8305 \\ -7{,}9323 \end{Bmatrix}$$



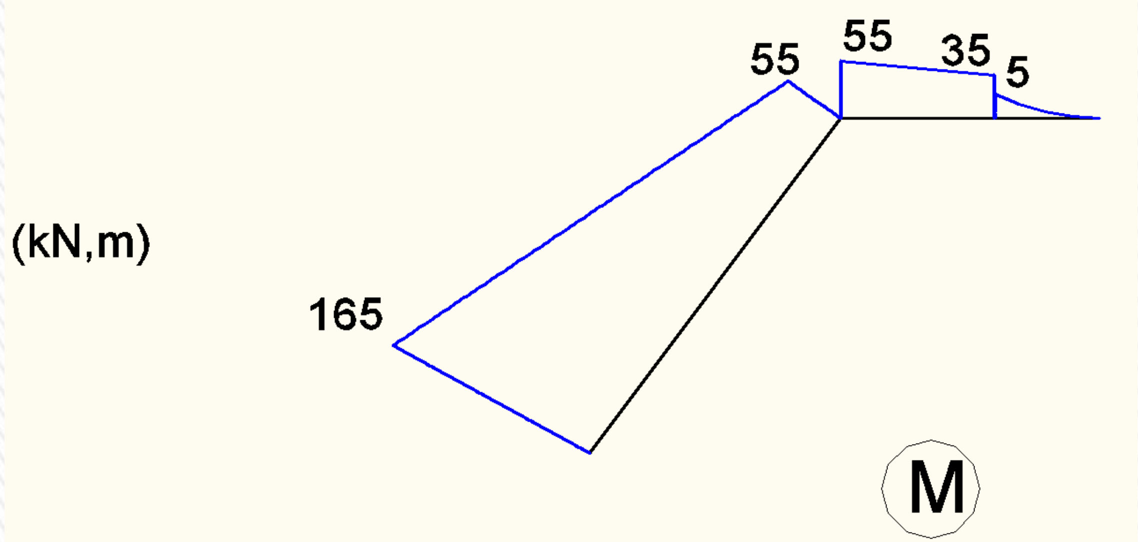


Exemplo 2

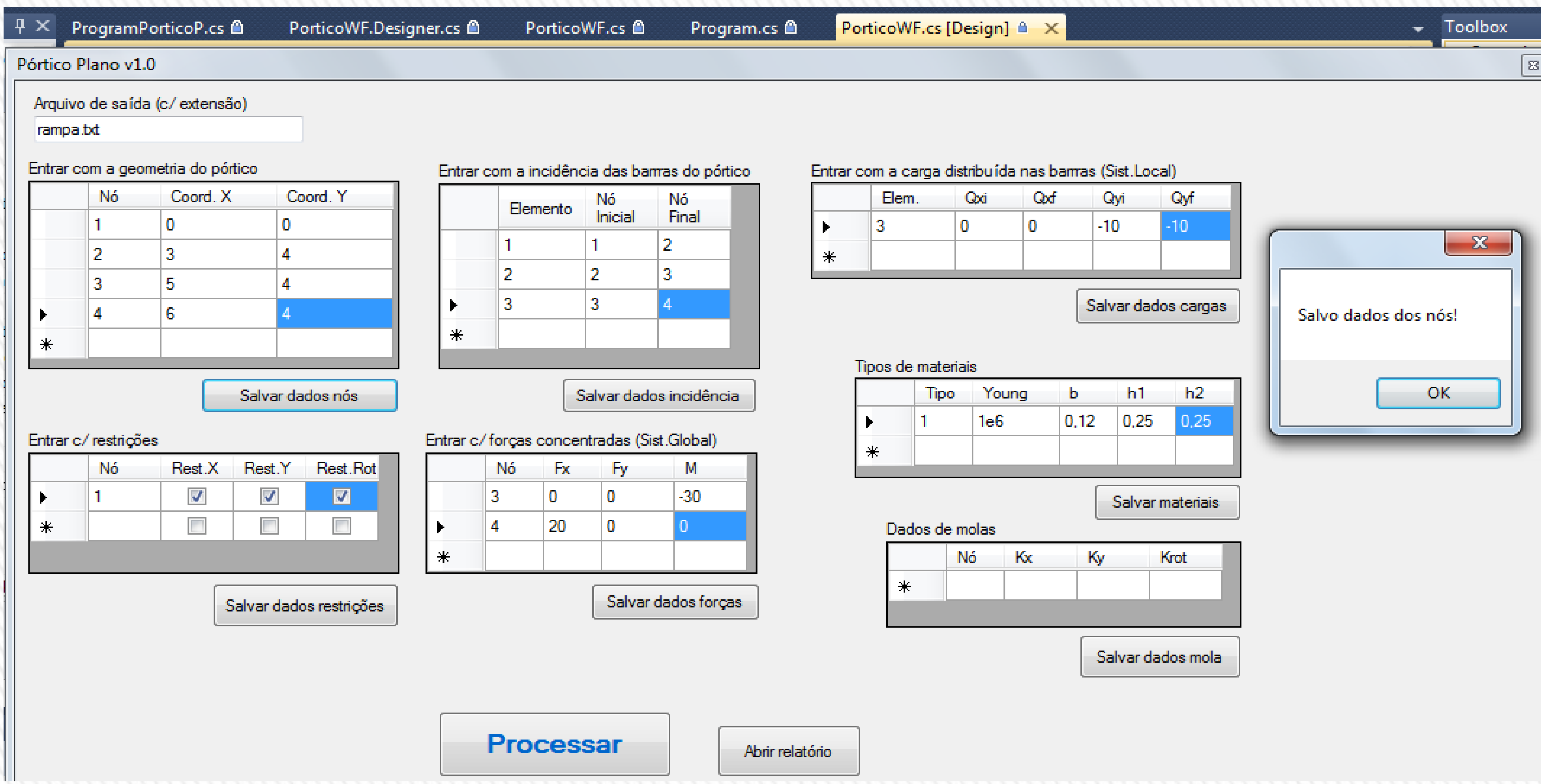




Exemplo 2



55
55
35
5
(kN,m)
165
M



ProgramPorticoP.cs
PorticoWF.Designer.cs
PorticoWF.cs
Program.cs
PorticoWF.cs [Design]
Toolbox
Pórtico Plano v1.0
Arquivo de saída (c/ extensão)
rampa.txt
Entrar com a geometria do pórtico
Nó | Coord. X | Coord. Y
1 | 0 | 0
2 | 3 | 4
3 | 5 | 4
4 | 6 | 4
Salvar dados nós
Entrar com a incidência das barras do pórtico
Elemento | Nó Inicial | Nó Final
1 | 1 | 2
2 | 2 | 3
3 | 3 | 4
Salvar dados incidência
Entrar com a carga distribuída nas barras (Sist.Local)
Elem. | Qxi | Qxf | Qyi | Qyf
3 | 0 | 0 | -10 | -10
Salvar dados cargas
Salvo dados dos nós!
OK
Tipos de materiais
Tipo | Young | b | h1 | h2
1 | 1e6 | 0,12 | 0,25 | 0,25
Salvar materiais
Entrar c/ restrições
Nó | Rest.X | Rest.Y | Rest.Rot
1
Salvar dados restrições
Entrar c/ forças concentradas (Sist.Global)
Nó | Fx | Fy | M
3 | 0 | 0 | -30
4 | 20 | 0 | 0
Salvar dados forças
Dados de molas
Nó | Kx | Ky | Krot
Salvar dados mola
Processar
Abrir relatório

Exemplo 2

```
Imprimindo dados do exemplo  Portico Plano
Numero de nos: 4
Numero de elementos: 3
Qte de materiais/geometria diferentes: 1
Numero de nos restritos: 1
Numero de nos c/ forcas concentradas: 2
Numero de elementos c/ cargas distribuidas: 1
Numero de nos com mola: 0

No     X       Y
01   0,00    0,00
02   3,00    4,00
03   5,00    4,00
04   6,00    4,00
Elemento   No inicial   No final
01    01    02
02    02    03
03    03    04
Tipo     Young      b       h1       h2
0     1000000,00    0,12     0,25     0,25
No restrito      X        Y       RotZ
01     01     01     01
Elemento      Qx1       Qx2       Qy1       Qy2
3,0     0,00     0,00    -10,00    -10,00
No       Fx       Fy      Mz
3    0,00    0,00    -30,00
4    20,00    0,00    0,00
No       Kx       Ky      Krotz
-----------------------------------------------------------------

DESLOCAMENTOS DE CADA NO (Sistema Global)

No      Ux       Uy       Teta
01   0,0000   0,0000   0,0000
02   8,2137   -6,1595   -3,5200
03   8,2151   -13,8181   -4,0960
04   8,2157   -17,9221   -4,1067
-----------------------------------------------------------------

ESFORCOS DE CADA BARRA
                              N            V            M
_________________________________________________________________
Elemento = 0001

 No Inicial  = 01     -4,0000      22,0000     165,0000
 No Final    = 02      4,0000     -22,0000     -55,0000
_________________________________________________________________
_________________________________________________________________
Elemento = 0002

 No Inicial  = 02     -20,0000     10,0000      55,0000
 No Final    = 03      20,0000    -10,0000     -35,0000
_________________________________________________________________

Elemento = 0003

 No Inicial  = 03     -20,0000     10,0000      5,0000
 No Final    = 04      20,0000      0,0000      0,0000
```

Mostrar exemplo no programa de portico plano....