LEI DE DECAIMENTO RADIOATIVO

Lei de decaimento radioativo

As evidências experimentais acumuladas mostram que os principais tipos de decaimento radioativo são: emissão de partícula alfa, emissão de partícula beta, emissão de pósitron, captura de elétron e fissão espontânea. Cada um desses tipos de decaimento está relacionado com as características da estrutura nuclear de um dado radionuclídeo. Entretanto, a dependência temporal do decaimento radioativo é comum a todos os tipos, conforme será explicado a seguir.

Decaimento de um radionuclídeo isolado

A constatação experimental básica do decaimento radioativo consiste no fato de que a probabilidade de um núcleo decair durante um intervalo de tempo curto dt independe de qualquer influência externa. Todos os núcleos de um determinado radionuclídeo apresentam idêntica probabilidade de decaimento. Assim a probabilidade P(t) de ocorrer um decaimento radioativo em um intervalo de tempo Δt é proporcional apenas a esse intervalo de tempo se o mesmo for suficientemente curto para que $P(t) << 1$. A constante de proporcionalidade λ, denominada constante de decaimento radioativo, assume valores diferentes para cada radionuclídeo e tipo de decaimento, portanto

$$P(t) = \lambda.\Delta t \tag{1}$$

A probabilidade de que um núcleo não sofra decaimento radioativo durante um intervalo de tempo t pode ser calculada dividindo-se t em n intervalos iguais de duração Δt. Essa probabilidade no primeiro dos n intervalos é

$$[1 - P(t)] \tag{2}$$

no segundo intervalo é

$$[1 - P(t)]^2 \tag{3}$$

e no n-ésimo intervalo é

$$[1 - P(t)]^n \tag{4}$$

Assim, a probabilidade de que um núcleo não sofra decaimento radioativo durante um intervalo de tempo t é

$$\left(1 - \lambda \cdot \Delta t\right)^n = \left[1 - \frac{\lambda \cdot t}{n}\right]^n \xrightarrow{n \to \infty \ ; \ \Delta t \to 0} e^{-\lambda \cdot t} \tag{5}$$

Se no lugar de um núcleo houvesse inicialmente um total de N_0 núcleos idênticos, o número N de núcleos sem sofrer decaimento depois de um tempo t seria

$$N = N_0 \ . \ e^{-\lambda . t} \tag{6}$$

Outra maneira de interpretar esta equação surge do fato de que, se há N núcleos radioativos, o número deles que provavelmente decai num tempo dt é

$$-\,dN = P(t).N = \lambda.N.dt \qquad (7)$$

expressão que integrada fornece a equação (6).

A meia-vida $T_{1/2}$ do decaimento radioativo é definida como o intervalo de tempo no qual o número inicial de núcleos é reduzido à metade, logo

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \qquad (8)$$

A vida média τ é definida como o tempo médio de duração de um núcleo radioativo, calculada de maneira que

$$\tau = \frac{\int_0^\infty t \cdot dN}{\int_0^\infty dN} = \frac{\int_0^\infty \lambda \cdot t \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot dt}{N_0} = \frac{1}{\lambda} \qquad (9)$$

Em uma dada amostra contendo N núcleos de um radionuclídeo, o número de decaimentos que ocorrem em um intervalo de tempo dt resulta

$$d\mathcal{N} = -\,dN = \lambda.N.dt \qquad (10)$$

de tal maneira que

$$\frac{d\mathcal{N}}{dt} = \lambda \cdot N = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = \left[\frac{d\mathcal{N}}{dt}\right]_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \qquad (11)$$

A quantidade $[d\mathcal{N} / dt]$ é denominada atividade e designada como $A = \lambda.N$, de maneira que a equação (11) pode ser reescrita como

$$A = A_0.e^{-\lambda.t} \qquad (12)$$

sendo a atividade medida em unidades de Curie ($Ci = 3{,}7.10^{10}$ decaimentos/s) ou, no Sistema Internacional de Unidades (SI), em unidades de Becquerel (Bq = 1 decaimento/s).

Se um único núcleo apresentar mais do que um tipo de decaimento radioativo, a probabilidade total de decaimento aumenta. As probabilidades de cada tipo de decaimento podem ser somadas, pois são independentes. Portanto, se um radionuclídeo puder, por exemplo, decair tanto por emissão de partícula alfa quanto por emissão de partícula beta, em uma amostra contendo N núcleos desse radionuclídeo, durante um intervalo de tempo dt, ocorrerão decaimentos de ambos os tipos:

$$-\,dN = d\mathcal{N}_\alpha + d\mathcal{N}_\beta = \lambda_\alpha.N.dt + \lambda_\beta.N.dt \qquad (13)$$

Integrando a expressão (13), encontra-se o resultado

$$N = N_0 \cdot e^{-(\lambda_\alpha + \lambda_\beta) \cdot t} = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \qquad (14)$$

A meia-vida obtida experimentalmente é $T_{1/2} = (\ln 2)/(\lambda_\alpha + \lambda_\beta)$, ou seja, é $T_{1/2} = (\ln 2)/\lambda$.

A grandeza λ_α / λ é denominada razão de ramificação do decaimento por emissão de partícula alfa, enquanto a atividade correspondente a esse tipo de decaimento é dada por:

$$\frac{dN_\alpha}{dt} = \lambda_\alpha \cdot N = \lambda_\alpha \cdot N_0 \cdot e^{-(\lambda_\alpha + \lambda_\beta)\cdot t} = \lambda_\alpha \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \qquad (15)$$

Relações análogas são válidas para o decaimento e a atividade beta do mesmo núcleo.

Produção de um radionuclídeo por decaimento do núcleo pai

O radionuclídeo inicial em qualquer tipo de decaimento é denominado núcleo pai, enquanto o núcleo gerado como resultado desse decaimento é denominado núcleo filho. A situação mais simples ocorre quando o núcleo filho é estável. Entretanto, se várias gerações sucessivas de núcleos filho são radioativas, define-se uma série radioativa.

Na hipótese em estudo nessa parte, um núcleo pai (símbolo **1**) tem uma constante de decaimento λ_1 e produz um núcleo filho também radioativo (símbolo **2**) como resultado de um tipo de decaimento. Por sua vez, o núcleo filho tem uma constante de decaimento λ_2 e produz um núcleo estável (símbolo **3**) como resultado de um tipo de decaimento. Esta sequência é ilustrada no diagrama abaixo:

$$\mathbf{1} \xrightarrow{\lambda_1} \mathbf{2} \xrightarrow{\lambda_2} \mathbf{3}$$

Se N_1, N_2 e N_3 são respectivamente os números de núcleos designados por **1**, **2** e **3** presentes em um dado instante t, torna-se possível escrever as seguintes equações diferenciais:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 \cdot N_1 \qquad (16)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 \cdot N_1 - \lambda_2 \cdot N_2 \qquad (17)$$

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 \cdot N_2 \qquad (18)$$

pois cada núcleo **1** que decai produz um núcleo **2**, o qual por sua vez decai produzindo um núcleo **3**.

Se o número original de núcleos **1** presentes é N_{1o}, a solução da equação diferencial (16) é dada por:

$$N_1 = N_{1o} \cdot e^{-\lambda_1 \cdot t} \qquad (19)$$

Substituindo este resultado na equação diferencial (17), encontra-se

$$\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 \cdot N_2 = \lambda_1 \cdot N_{1o} \cdot e^{-\lambda_1 \cdot t} \qquad (20)$$

Matematicamente, a solução geral desta equação diferencial não homogênea é a solução da equação diferencial homogênea

$$\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 \cdot N_2 = 0 \qquad (21)$$

adicionada com qualquer solução particular da equação não homogênea. A solução da equação diferencial homogênea (21) é dada por:

$$N_2 = C \cdot e^{-\lambda_2 \cdot t} \qquad (22)$$

onde C é uma constante determinada pelas condições iniciais do sistema. Uma solução particular da equação diferencial não homogênea (20) é dada por:

$$N_2 = K \cdot e^{-\lambda_1 \cdot t} \qquad (23)$$

de maneira que a substituição na mesma requer

$$K = \frac{N_{1o} \cdot \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \qquad (24)$$

Por fim, uma solução completa seria dada por:

$$N_2 = \frac{N_{1o} \cdot \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot e^{-\lambda_1 \cdot t} + C \cdot e^{-\lambda_2 \cdot t} \qquad (25)$$

Em t = 0 não havia núcleos **2**, logo $N_{2o} = 0$, de maneira que

$$N_2 = \frac{N_{1o} \cdot \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot (e^{-\lambda_1 \cdot t} - e^{-\lambda_2 \cdot t}) \qquad (26)$$

A integração da equação diferencial (18) fornece o seguinte resultado:

$$N_3 = \frac{N_{1o} \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \left(\frac{e^{-\lambda_1 \cdot t}}{-\lambda_1} - \frac{e^{-\lambda_2 \cdot t}}{-\lambda_2} \right) + C' \qquad (27)$$

onde C' é uma constante determinada pelas condições iniciais do sistema. Em t = 0 não havia núcleos **3**, logo $N_{3o} = 0$, de maneira que

$$N_3 = \frac{N_{1o} \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \left[\frac{(1 - e^{-\lambda_1 \cdot t})}{\lambda_1} - \frac{(1 - e^{-\lambda_2 \cdot t})}{\lambda_2} \right] \qquad (28)$$

A variação dos números de núcleos N_1, N_2 e N_3 em função do tempo é mostrada na Figura 1 para um caso em que o núcleo pai **1** possui meia-vida mais curta do que o núcleo filho **2**. À proporção que N_1 diminui, forma-se N_2 a partir do decaimento radioativo e, quando este se desintegra, surge N_3. O número total de núcleos (e, portanto, de átomos) permanece constante ainda que sua espécie varie.

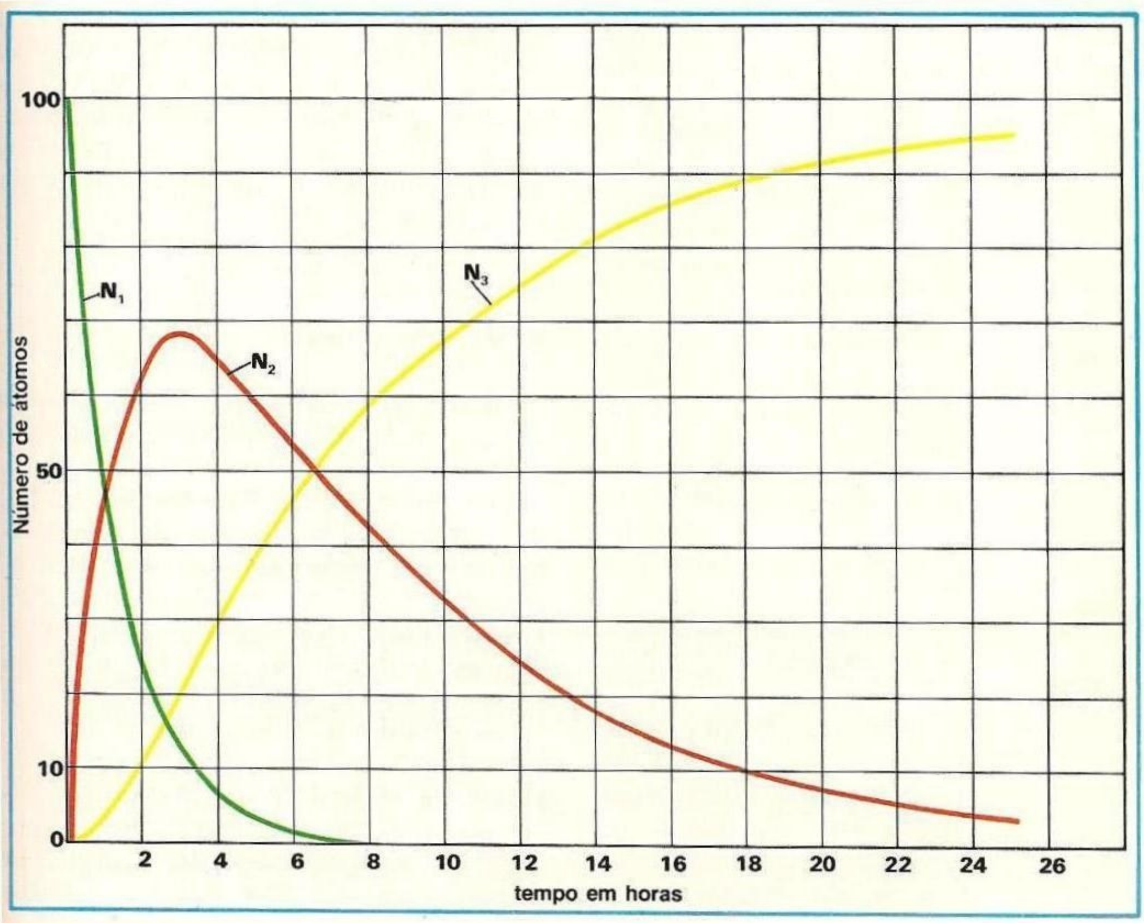

Figura 1 – Variação do número de núcleos (átomos) em uma série radioativa de três membros na qual o núcleo pai **1** possui meia-vida igual a 1 hora, o núcleo filho **2** possui meia-vida igual a 5 horas e o terceiro membro **3** é estável.

Uma vez conhecidas as soluções completas das equações diferenciais (16), (17) e (18), dadas respectivamente pelas expressões (19), (26) e (28), há duas hipóteses a considerar.

Na primeira hipótese $\lambda_1 > \lambda_2$ e, portanto, o núcleo pai **1** decai mais rapidamente que o núcleo filho **2**. Após um longo tempo t >> $(1/\lambda_1)$, verifica-se que $e^{-\lambda_1 \cdot t} \ll e^{-\lambda_2 \cdot t}$ e a expressão (26) pode ser escrita como

$$N_2 \cong \frac{N_{1o} \cdot \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot t} \qquad (29)$$

Esse resultado mostra que, após um longo tempo, o decaimento do núcleo filho **2** é determinado pela constante de decaimento λ_2 própria.

Na segunda hipótese $\lambda_2 > \lambda_1$ e, portanto, o núcleo pai **1** decai mais lentamente que o núcleo filho **2**. Após um longo tempo t >> $(1/\lambda_2)$, verifica-se que $e^{-\lambda_1 \cdot t} \gg e^{-\lambda_2 \cdot t}$ e a expressão (26) pode ser escrita como

$$N_2 \cong \frac{N_{1o} \cdot \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot e^{-\lambda_1 \cdot t} \tag{30}$$

Esse resultado mostra que, após um longo tempo, o decaimento do núcleo filho **2** é determinado pela constante de decaimento λ_1 do núcleo pai. É importante observar que nessa hipótese

$$\frac{N_2}{N_1} \cong \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \tag{31}$$

ou ainda

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\lambda_2 \cdot N_2}{\lambda_1 \cdot N_1} \cong \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \tag{32}$$

A situação resumida pela expressão (32) é denominada equilíbrio transiente. Caso $\lambda_2 >> \lambda_1$, as atividades são iguais e a situação é denominada equilíbrio secular.

Produção de radionuclídeos em meio a uma série radioativa

A metodologia apresentada anteriormente pode ser generalizada para abranger uma série radioativa (também denominada cadeia de decaimento radioativo) contendo ***n*** membros.

Os exemplos mais notáveis de cadeias radioativas longas são as séries naturais de decaimento de ^{232}Th, ^{235}U e ^{238}U, assim como algumas sequências de decaimento que envolvem radionuclídeos gerados na fissão de núcleos pesados (produtos de fissão).

Em meio a uma série radioativa, o número de núcleos de qualquer membro pode ser calculado resolvendo-se o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}
\frac{dN_1}{dt} &= -\lambda_1 \cdot N_1 \\
\frac{dN_2}{dt} &= \lambda_1 \cdot N_1 - \lambda_2 \cdot N_2 \\
\frac{dN_3}{dt} &= \lambda_2 \cdot N_2 - \lambda_3 \cdot N_3 \\
&\cdots \\
\frac{dN_n}{dt} &= \lambda_{n-1} \cdot N_{n-1} - \lambda_n \cdot N_n
\end{aligned} \tag{33}$$

onde N_1, N_2, N_3, ..., N_n são respectivamente os números de núcleos dos membros da série radioativa que possuem constantes de decaimento radioativo λ_1, λ_2, λ_3, ..., λ_n e nela estão presentes em um dado instante t.

Na hipótese de, no instante inicial t = 0, haver apenas e tão somente N_{1o} núcleos do primeiro membro (núcleo pai) da série radioativa, o número total de núcleos do *n*-ésimo membro da série radioativa será dado em função do tempo t por:

$$N_n = N_{1o} \cdot (C_1\, e^{-\lambda_1 \cdot t} + C_2\, e^{-\lambda_2 \cdot t} + C_3\, e^{-\lambda_3 \cdot t} + \cdots + C_n\, e^{-\lambda_n \cdot t}) \tag{34}$$

onde os coeficientes da equação (34) são

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\lambda_1\, \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)\cdots(\lambda_n - \lambda_1)} \\
C_2 &= \frac{\lambda_1\, \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)\cdots(\lambda_n - \lambda_2)} \\
C_3 &= \frac{\lambda_1\, \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)\cdots(\lambda_n - \lambda_3)} \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
C_n &= \frac{\lambda_1\, \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1}}{(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_2 - \lambda_n)\cdots(\lambda_{n-1} - \lambda_n)}
\end{aligned} \tag{35}$$

Entretanto, na hipótese de, no instante inicial t = 0, haver N_{1o} núcleos do primeiro membro (núcleo pai) da série radioativa e também N_{ko} núcleos do *k*-ésimo membro da série radioativa, o número total de núcleos do *n*-ésimo membro da série radioativa será dado em função do tempo t por:

$$\begin{aligned}
N_n = {} & N_{1o} \cdot \lambda_1\, \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1} \cdot \left[\frac{e^{-\lambda_1 \cdot t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)\cdots(\lambda_n - \lambda_1)} + \cdots + \frac{e^{-\lambda_n \cdot t}}{(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_2 - \lambda_n)\cdots(\lambda_{n-1} - \lambda_n)} \right] + \\
& N_{ko} \cdot \lambda_k\, \lambda_{k+1} \cdots \lambda_{n-1} \cdot \left[\frac{e^{-\lambda_k \cdot t}}{(\lambda_{k+1} - \lambda_k)(\lambda_{k+2} - \lambda_k)\cdots(\lambda_n - \lambda_k)} + \frac{e^{-\lambda_{k+1} \cdot t}}{(\lambda_k - \lambda_{k+1})(\lambda_{k+2} - \lambda_{k+1})\cdots(\lambda_n - \lambda_{k+1})} + \right. \\
& \left. \cdots + \frac{e^{-\lambda_n \cdot t}}{(\lambda_k - \lambda_n)(\lambda_{k+1} - \lambda_n)\cdots(\lambda_{n-1} - \lambda_n)} \right]
\end{aligned} \tag{36}$$

Considerando a hipótese de haver apenas e tão somente núcleos do primeiro membro (núcleo pai) no instante inicial t = 0, a variação dos números de núcleos N_1, N_2, N_3 e N_4 em função do tempo é apresentada na Figura 2 para uma série radioativa na qual o primeiro membro (núcleo pai) possui meia-vida bem menor do que os outros três radionuclídeos mostrados. O quarto nuclídeo, embora também radioativo, possui meia-vida muito maior do que seus três precursores mostrados. O número total de núcleos (e, portanto, de átomos) permanece constante ainda que sua espécie varie.

Os gráficos mostrados na Figura 2 resultaram de medidas efetuadas para quatro membros da série radioativa natural do ^{238}U, os quais são, na sequência, ^{218}Po (núcleo pai, isolado no início das medidas a partir de emanações do gás radioativo precursor ^{222}Rn), ^{214}Pb, ^{214}Bi e ^{210}Pb.

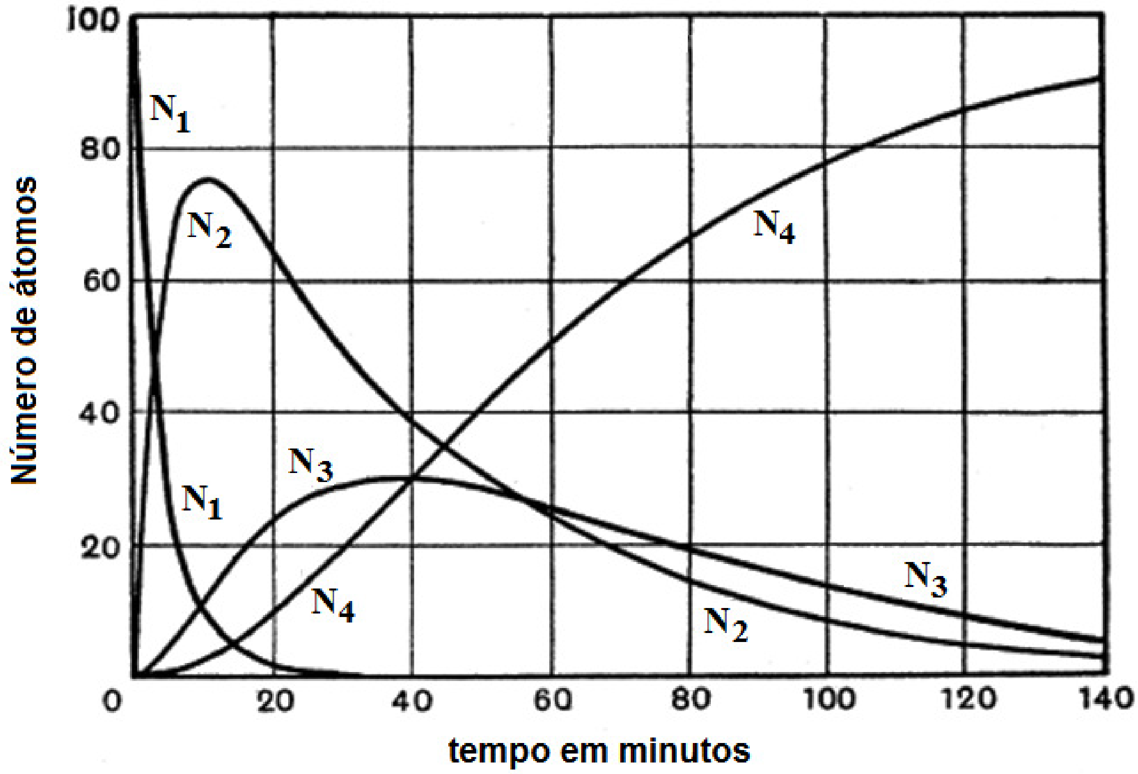

Figura 2 – Variação do número de núcleos (átomos) em uma série radioativa na qual o primeiro membro (núcleo pai) possui meia-vida igual a 3,05 minutos, o segundo membro possui meia-vida igual a 26,8 minutos, o terceiro membro possui meia-vida igual a 19,7 minutos e o quarto membro possui meia-vida igual a 22 anos.