COMPARAÇÕES MÚLTIPLAS

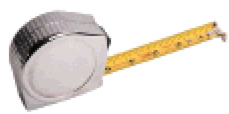
INTRODUÇÃO - Os testes de comparações múltiplas, ou testes de comparações de médias, servem como um complemento do teste F, para detectar diferenças de efeitos entre os tratamentos.

Teste de Tukey

Utilizado para testar todo e qualquer contraste entre duas (2) médias.

Limitação - não permite comparar grupos de médias entre si.

Base - A Diferença Mínima Significativa (D.M.S.)



Procedimento:

$$\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 = d$$

(1) $\Delta = q \underbrace{\frac{\sqrt{Q.M.\text{Res.}}}{\sqrt{J}}}_{\textit{Erro padrão da média}}$ ou $\Delta = q\sqrt{\left(\frac{1}{J_i}+\frac{1}{J_k}\right)\frac{\text{QMRes.}}{2}}$, $i \neq k$ e $i,k = 1,2...,I$,

q: amplitude total estudentizada, é função (I, g.l. resíduo e α).
$\sqrt{Q.M.\text{resíduo}}$ -é o desvio padrão residual do ensaio.
J: é o número de repetições das médias confrontadas no contraste.

Obs: Para número de repetições desiguais, troca-se J pela média harmônica J_h dos $\{J_i\}$, em que,

$$J_h = \frac{I}{\sum_{i=1}^{I} \frac{1}{J_i}}$$

Ex$_1$: Se temos {5, 5, 5, 5}, então $J_h = \frac{4}{0{,}20+0{,}20+0{,}20+0{,}20} = 5$

Ex$_2$: Se temos {5, 3, 2, 4}, então $J_h = \frac{4}{0{,}20+0{,}33+0{,}50+0{,}25} = 3{,}11$

(2) Calcular todas as estimativas dos contrastes entre 2 médias.

$\hat{y} = \hat{\mu}_i - \hat{\mu}_k \ , \quad i \neq k$

$\hat{\mu}_1 \quad \hat{\mu}_2$	$\hat{\mu}_1 \quad \hat{\mu}_2 \quad \hat{\mu}_3$	$\hat{\mu}_1 \quad \hat{\mu}_2 \quad \hat{\mu}_3 \quad \hat{\mu}_4$
$\hat{y}_1 = \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2$	$\hat{y}_1 = \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2$ $\hat{y}_2 = \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_3$ $\hat{y}_3 = \hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_3$	$\hat{y}_1 = \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2$ $\hat{y}_2 = \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_3$ $\hat{y}_3 = \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_4$ $\hat{y}_4 = \hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_3$ $\hat{y}_5 = \hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_4$ $\hat{y}_6 = \hat{\mu}_3 - \hat{\mu}_4$

$$C_I^2 = \frac{I!}{2!\,(I-2)!}$$

(3) Comparar $|\hat{y}|$ com Δ

Se $|\hat{y}| \geq \Delta$, o contraste é significativo ao nível α de probabilidade, indicando que as duas médias envolvidas no teste diferem entre si.

Obs.: O teste F e os testes de comparação de médias não são equivalentes!
O F é um teste na média dos contrastes e não um contraste específico.

Ex.: (1) No exemplo do milho, $q_{(4,16)0,05} = 4{,}05$

glRes \ I	2	3	4	5	...
2					
⋮					
16			4,05		
⋮					

$$\Delta = 4{,}05 \frac{\sqrt{7{,}0}}{\sqrt{5}} = 4{,}79$$

(2) e (3)

$\hat{\mu}_D = 31$ kg/100m^2 a
$\hat{\mu}_B = 27$ kg/100m^2 a b
$\hat{\mu}_C = 26$ kg/100m^2 b
$\hat{\mu}_A = 23$ kg/100m^2 b

➔ médias seguidas pela mesma letra não diferem entre si pelo teste de Tukey a 5% de significância

$\hat{y}_1 = \hat{\mu}_D - \hat{\mu}_B = 31 - 27 = 4^{NS}$
$\hat{y}_2 = \hat{\mu}_D - \hat{\mu}_C = 31 - 26 = 5*$
$\hat{y}_3 = \hat{\mu}_D - \hat{\mu}_A = 31 - 23 = 8*$
$\hat{y}_4 = \hat{\mu}_B - \hat{\mu}_C = 27 - 26 = 1^{NS}$

$\hat{y}_5 = \hat{\mu}_B - \hat{\mu}_A = 27 - 23 = 4^{NS}$
$\hat{y}_6 = \hat{\mu}_C - \hat{\mu}_A = 26 - 23 = 3^{NS}$

Concluímos que a variedade D teve desempenho médio significativamente superior as variedades C e A, e que não houve diferença entre D e B e entre B, C e A.

Teste de Duncan

Um procedimento amplamente usado para comparação de todos pares de médias é o teste de múltiplas amplitudes desenvolvido por Duncan (1955).

Utilizado para testar todo e qualquer contraste entre duas (2) médias.

Limitação - não permite comparar grupos de médias entre si.

Base - Várias Diferenças Mínima Significativa (D.M.S.)

Procedimento:

(1) $D_\ell = z_\ell \dfrac{\sqrt{Q.M.Res.}}{\sqrt{J}}$

$\hat{\mu}_{(1)}, \hat{\mu}_{(2)}$	$\hat{\mu}_{(1)}, \hat{\mu}_{(2)}, \hat{\mu}_{(3)}$	$\hat{\mu}_{(1)}, \hat{\mu}_{(2)}, \hat{\mu}_{(3)}, \hat{\mu}_{(4)}$	$\hat{\mu}_{(1)}, \hat{\mu}_{(2)}, \hat{\mu}_{(3)}, \hat{\mu}_{(4)}, \hat{\mu}_{(5)}$
$\ell = 2$	$\ell = 2, 3$	$\ell = 2, 3, 4$	$\ell = 2, 3, 4, 5$

z_ℓ: amplitude total estudentizada, é função (número de médias abrangidas pelo contraste entre duas médias (y), g.l. resíduo e α).
$\sqrt{Q.M.\text{resíduo}}$ -é o desvio padrão residual do ensaio.
J: é o número de repetições das médias confrontadas no contraste.

Obs: Para número de repetições desiguais, troca-se J pela média harmônica J_h dos $\{J_i\}$, em que,

$$J_h = \left(\frac{\sum_{i=1}^{I} \frac{1}{J_i}}{I} \right)^{-1} \quad \text{ou} \quad J_h = \frac{I}{\sum_{i=1}^{I} \frac{1}{J_i}}$$

(2) Calcular todas as estimativas dos contrastes entre 2 médias, considerando o número de médias entre as envolvidas, depois de ordená-las.
$\hat{y} = \hat{\mu}_i - \hat{\mu}_k$, $i \neq k$

(3) Comparar cada $|\hat{y}|$ com D_ℓ

Se $|\hat{y}| \geq D_\ell$, o contraste é significativo ao nível α de probabilidade, indicando que as 2 médias testadas diferem entre si.
Ex.: (1) No exemplo do milho:

Médias em ordem decrescente:

$\hat{\mu}_D$	$31 \text{ kg}/100\text{m}^2$
$\hat{\mu}_B$	$27 \text{ kg}/100\text{m}^2$
$\hat{\mu}_C$	$26 \text{ kg}/100\text{m}^2$
$\hat{\mu}_A$	$23 \text{ kg}/100\text{m}^2$

a) Contrastes que abrange 4 médias

$$\hat{y}_1 = \hat{\mu}_D - \hat{\mu}_A = 8 \text{ kg}/100\text{m}^2$$

para testar este contraste, calcula-se:

$$z_4 \begin{cases} 4 \text{ médias} \\ 16 \text{ g.l. Res.} \end{cases} \{0{,}05 \Rightarrow 3{,}23 \qquad\qquad D_4 = 3{,}23 \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} = 3{,}82$$

Como $\hat{y}_1 > D_4$, o contraste é significativo, rejeita-se H_0 e conclui-se que $\mu_D \neq \mu_A$.

b) Contrastes que abrangem 3 médias

$$\hat{y}_2 = \hat{\mu}_D - \hat{\mu}_C = 5 \text{ kg}/100\text{m}^2$$

$$\hat{y}_3 = \hat{\mu}_B - \hat{\mu}_A = 4 \text{ kg}/100\text{m}^2$$

para testar estes contrastes, calcula-se:

$$z_3 \begin{cases} 3 \text{ médias} \\ 16 \text{ g.l. Res.} \end{cases} \{0{,}05 \Rightarrow 3{,}15 \qquad\qquad D_3 = 3{,}15 \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} = 3{,}72$$

Como $\hat{y}_2 > D_3$, o contraste é significativo, rejeita-se H_0 e conclui-se que $\mu_D \neq \mu_C$.
Como $\hat{y}_3 > D_3$, o contraste é significativo, rejeita-se H_0 e conclui-se que $\mu_B \neq \mu_A$.

c) Contrastes que abrangem 2 médias

$$\hat{y}_4 = \hat{\mu}_D - \hat{\mu}_B = 4 \text{ kg}/100\text{m}^2$$

$$\hat{y}_5 = \hat{\mu}_B - \hat{\mu}_C = 1 \text{ kg}/100\text{m}^2$$

$$\hat{y}_6 = \hat{\mu}_C - \hat{\mu}_A = 3 \text{ kg}/100\text{m}^2$$

para testar este contraste, calcula-se:

$$z_2 \begin{cases} 2 \text{ médias} \\ 16 \text{ g.l. Res.} \end{cases} \{0{,}05 \Rightarrow 3{,}00 \qquad\qquad D_2 = 3{,}00 \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} = 3{,}54$$

Como $\hat{y}_4 > D_2$, o contraste é significativo, rejeita-se H_0 e conclui-se que $\mu_D \neq \mu_B$.
Como $\hat{y}_5 < D_2$, o contraste <u>não é</u> significativo, não rejeita-se H_0 e conclui-se que $\mu_B = \mu_C$.

Como $\hat{y}_6 < D_2$, o contraste não é significativo, não rejeita-se H_0 e conclui-se que $\mu_C = \mu_A$.

(2) e (3)

$\hat{\mu}_D = 31$ kg/100m² a
$\hat{\mu}_B = 27$ kg/100m² b
$\hat{\mu}_C = 26$ kg/100m² b c
$\hat{\mu}_A = 23$ kg/100m² c

➔ médias seguidas pela mesma letra não diferem entre si pelo teste de Duncan a 0,05 de significância.

Obs.: Quando I=2 tratamentos, as amplitudes de Tukey e Duncan são iguais.

Teste de Dunnett

Utilizado para testar todo e qualquer contraste entre um único tratamento (controle) e cada um dos demais tratamentos experimentais, não havendo interesse na comparação dos tratamentos experimentais entre si. Esse teste é uma modificação do teste t.

Limitação - não permite comparar os tratamentos experimentais entre si e também grupos de tratamentos.

Base - Diferença Mínima Significativa (D.M.S.)

Procedimento:

Um experimento com I tratamentos, um dos quais é o controle (Cont), permite a aplicação do teste a I-1 comparações.

(1) Calcular a estimativa de cada contraste entre um tratamento regular e o controle :

$$\hat{y}_1 = \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_{Cont}$$
$$\hat{y}_2 = \hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_{Cont}$$
$$\dots$$
$$\hat{y}_{I-1} = \hat{\mu}_{I-1} - \hat{\mu}_{Cont}$$

(2) $$d' = d_{(I-1,\,g.l.\,Res.,\,\alpha)}\sqrt{Q.M.Res.\left(\frac{1}{J_i} + \frac{1}{J_{Cont}}\right)}$$

(3) Comparar cada $|\hat{y}|$ com d'

Se $|\hat{y}| \geq d'$, o contraste é significativo ao nível α de probabilidade, indicando que as 2 médias testadas diferem entre si.

Ex.: (1) No exemplo do milho, considere a variedade A como controle:

$$\hat{y}_1 = \hat{\mu}_D - \hat{\mu}_{Cont} = 8 \text{ kg}/100\text{m}^2$$
$$\hat{y}_2 = \hat{\mu}_B - \hat{\mu}_{Cont} = 4 \text{ kg}/100\text{m}^2$$
$$\hat{y}_3 = \hat{\mu}_C - \hat{\mu}_{Cont} = 3 \text{ kg}/100\text{m}^2$$

$d' = 2{,}59\sqrt{7\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)} = 4{,}33$

$\therefore$ Apenas a variedade D diferiu da variedade controle A.

Contrates de Médias

- Definição: Seja a função linear populacional ou a combinação linear das médias:

$y = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + ... + a_I\mu_I$

Se $\sum_{i=1}^{I} a_i = a_1 + a_2 + ... + a_I = 0$, diz-se que y é um contraste nas médias μ_i.

Obs: Todo contraste é uma função linear, mas nem toda função linear é um contraste.

Ex.: $y_1 = \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 - \mu_4$, é um contraste pois,

$a_1 = 1 \qquad a_2 = 1 \qquad a_3 = -1 \qquad a_4 = -1$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$, mas

$y_2 = \mu_1 - \mu_2$; $y_3 = \mu_3 - \mu_4$ também são contrastes. $y_4 = 3\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 - \mu_4$

Por outro lado, $y_5 = \mu_1 - \mu_2 - \mu_3$, não é contraste pois $a_1+a_2+a_3=1-1-1= -1 \neq 0$.

Obs.: Numa análise estatística deve-se formular aqueles contrastes que sejam de maior interesse para o pesquisador.

Estimativas dos Contrastes

$\hat{y} = a_1\hat{\mu}_1 + a_2\hat{\mu}_2 + ... + a_I\hat{\mu}_I$

Ex.: Do exemplo do Milho, verificou-se que A e B são de origem européia e C e D americana. Interessa comparar esses 2 grupos de tratamentos, bem como comparar dentro de cada grupo.

contrastes		estimativas dos contrastes
$y_1 = \mu_A + \mu_B - \mu_C - \mu_D$	➔	$\hat{y}_1 = \hat{\mu}_A + \hat{\mu}_B - \hat{\mu}_C - \hat{\mu}_D$ $= 23 + 27 - 26 - 31 = -7$ kg/100 m^2
$y_2 = \mu_A - \mu_B$	➔	$\hat{y}_2 = \hat{\mu}_A - \hat{\mu}_B$ $=23 - 27=-4$ kg/100 m^2
$y_3 = \mu_C - \mu_D$	➔	$\hat{y}_3 = \hat{\mu}_C - \hat{\mu}_D$ $= 26 - 31 = -5$ kg/100 m^2

Obs.: $\hat{y}_1' = \frac{\hat{y}_1}{2} = \frac{\hat{\mu}_A + \hat{\mu}_B}{2} - \frac{\hat{\mu}_C + \hat{\mu}_D}{2}$,

$= \frac{23+27}{2} - \frac{26+31}{2} = -3{,}5$

Compara as médias do grupo europeu e do americano, isto é, nos indica que o grupo americano produz em média 3,5 kg/100 m^2 a mais que o europeu.

Covariância de dois Contrastes

Consideremos:

$$\hat{y}_1 = a_1\hat{\mu}_1 + a_2\hat{\mu}_2 + \ldots + a_I\hat{\mu}_I$$

$$\hat{y}_2 = b_1\hat{\mu}_1 + b_2\hat{\mu}_2 + \ldots + b_I\hat{\mu}_I$$

médias μ_i : J_1 J_2 ... J_I repetições

$$\hat{Cov}(\hat{y}_1, \hat{y}_2) = a_1 b_1 \hat{Var}(\hat{\mu}_1) + a_2 b_2 \hat{Var}(\hat{\mu}_2) + \ldots + a_I b_I \hat{Var}(\hat{\mu}_I)$$

Lembrando que $\hat{Var}(\hat{\mu}_i) = \frac{s_i^2}{J_i}$, (i = 1, 2, ..., I)

temos $\hat{Cov}(\hat{y}_1, \hat{y}_2) = a_1 b_1 \frac{s_1^2}{J_1} + a_2 b_2 \frac{s_2^2}{J_2} + \ldots + a_I b_I \frac{s_I^2}{J_I}$

Se $s_1^2 = s_2^2 = \ldots = s_I^2 = s^2$, (Homogeneidade de variâncias dos tratamentos)

$$\hat{Cov}(\hat{y}_1, \hat{y}_2) = \left(\frac{a_1 b_1}{J_1} + \frac{a_2 b_2}{J_2} + \ldots + \frac{a_I b_I}{J_I} \right) s^2$$

Se além disso o delineamento for balanceado, $J_1 = J_2 = \ldots = J_I = J$

$$\hat{Cov}(\hat{y}_1, \hat{y}_2) = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_I b_I) \frac{s^2}{J}$$

CONTRASTES ORTOGONAIS

A ortogonalidade entre dois contrastes indica independência entre suas comparações, ou seja, a variação de um contraste é inteiramente independente da variação do outro. A implicação imediata é que podemos decompor a Soma de Quadrados de Tratamentos exatamente por contrastes ortogonais.

Condição Necessária e Suficiente: $\hat{Cov}(\hat{y}_\ell, \hat{y}_k) = 0$, $\forall_{\ell,k}$

portanto, $\frac{a_1 b_1}{J_1} s_1^2 + \frac{a_2 b_2}{J_2} s_2^2 + \ldots + \frac{a_I b_I}{J_I} s_I^2 = 0$ ou $\sum_{i=1}^{I} \frac{a_i b_i}{J_i} s_i^2 = 0$

Se $s_1^2 = s_2^2 = .. = s_I^2 = s^2$, teremos, portanto,

$$\frac{a_1 b_1}{J_1} + \frac{a_2 b_2}{J_2} + \ldots + \frac{a_I b_I}{J_I} = 0, \text{ ou } \quad \sum_{i=1}^{I} \frac{a_i b_i}{J_i} = 0$$

Se, além disso, $J_1 = J_2 = \ldots = J_I = J$

$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_I b_I = 0$, ou $\boxed{\sum_{i=1}^{I} a_i b_i = 0}$

Obs$_1$: Três ou mais contrastes serão ortogonais entre si se eles forem ortogonais dois a dois.
Obs$_2$.: Num experimento com I tratamentos, podemos formular vários grupos de contrastes ortogonais, porém cada grupo terá apenas (I-1) contrastes ortogonais.

Ex.: Verificar se os contrastes de interesse do pesquisador sobre milho são ortogonais:

$\hat{y}_1 = \hat{\mu}_A + \hat{\mu}_B - \hat{\mu}_C - \hat{\mu}_D$

$\hat{y}_2 = \hat{\mu}_A - \hat{\mu}_B$

$\hat{y}_3 = \qquad\qquad \hat{\mu}_C - \hat{\mu}_D$

Para Y_1 e Y_2: $\sum_{i=1}^{I} \frac{a_i b_i}{J_i} = \frac{(1)(1)}{5} + \frac{(1)(-1)}{5} + \frac{(-1)(0)}{5} + \frac{(-1)(0)}{5}$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + 0 + 0 = 0, \text{ portanto, } Y_1 \text{ e } Y_2 \text{ são ortogonais.}$$

Para Y_1 e Y_3: $\sum_{i=1}^{I} \frac{a_i b_i}{J_i} = \frac{(1)(0)}{5} + \frac{(1)(0)}{5} + \frac{(-1)(1)}{5} + \frac{(-1)(-1)}{5}$

$$= 0 + 0 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 0, \text{ portanto, } Y_1 \text{ e } Y_3 \text{ são ortogonais.}$$

Para Y_2 e Y_3: $\sum_{i=1}^{I} \frac{a_i b_i}{J_i} = \frac{(1)(0)}{5} + \frac{(-1)(0)}{5} + \frac{(0)(1)}{5} + \frac{(0)(-1)}{5} = 0$,

portanto, Y_2 e Y_3 são ortogonais.

Portanto, Y_1, Y_2 e Y_3 são ortogonais.

Exemplo de um contraste não ortogonal $\hat{Y}_4 = \hat{\mu}_A - \hat{\mu}_C$

Para Y_1 e Y_4: $\sum_{i=1}^{I} \frac{a_i b_i}{J_i} = \frac{(1)(1)}{5} + \frac{(1)(0)}{5} + \frac{(-1)(-1)}{5} + \frac{(-1)(0)}{5}$

$= \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{5} + 0 = \frac{2}{5} \neq 0$, portanto, Y_1 e Y_4 não são ortogonais.

Obs: O uso de contrates ortogonais não é obrigatório!

Variância de um Contraste

Seja

$$Y = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + ... + c_I\mu_I \qquad \left(\sum_{i=1}^{I} c_i = 0\right)$$

de estimativa

$$\hat{Y} = c_1\hat{\mu}_1 + c_2\hat{\mu}_2 + ... + c_I\hat{\mu}_I \qquad \left(\sum_{i=1}^{I} c_i = 0\right)$$

Admitindo independência entre as médias

$$\hat{V}ar(\hat{Y}) = c_1^2 \hat{V}ar(\hat{\mu}_1) + c_2^2 \hat{V}ar(\hat{\mu}_2) + ... + c_I^2 \hat{V}ar(\hat{\mu}_I)$$

$$\hat{V}ar(\hat{Y}) = c_1^2 \frac{s_1^2}{J_1} + c_2^2 \frac{s_2^2}{J_2} + ... + c_I^2 \frac{s_I^2}{J_I}$$

Se $s_1^2 = s_2^2 = ... = s_I^2 = s^2$, teremos

$$\boxed{\hat{V}ar(\hat{Y}) = \left(\frac{c_1^2}{J_1} + \frac{c_2^2}{J_2} + ... + \frac{c_I^2}{J_I}\right)s^2}$$, em que s^2=Q.M.Res.

e se $J_1 = J_2 = ... = J_I = J$

$$V\hat{a}r\left(\hat{Y}\right)=\left(c_1^2+c_2^2+\ldots+c_I^2\right)\frac{s^2}{J}$$

Ex.: Para Y_1: $V\hat{a}r\left(\hat{Y}_1\right)=(1)^2\cdot\frac{6,5}{5}+(1)^2\cdot\frac{7,5}{5}+(-1)^2\cdot\frac{7,5}{5}+(-1)^2\cdot\frac{6,5}{5}$

$$=\frac{6,5+7,5+7,5+6,5}{5}=\frac{28}{5}=5,6$$

Para Y_2: $V\hat{a}r\left(\hat{Y}_2\right)=(1)^2\cdot\frac{6,5}{5}+(-1)^2\cdot\frac{7,5}{5}=\frac{6,5}{5}+\frac{7,5}{5}=2,8$

Para Y_3: $V\hat{a}r\left(\hat{Y}_3\right)=(1)^2\cdot\frac{7,5}{5}+(-1)^2\cdot\frac{6,5}{5}=\frac{7,5+6,5}{5}=2,8$

Erro Padrão do Contraste

$s(\hat{y})=+\sqrt{V\hat{a}r(\hat{y})}$

Ex.: $s(\hat{y}_1)=\sqrt{5,6}=2,3664\ \text{kg/100 m}^2$

$s(\hat{y}_2)=\sqrt{2,8}=1,6733\ \text{kg/100 m}^2$

$s(\hat{y}_3)=\sqrt{2,8}=1,6733\ \text{kg/100 m}^2$

Teste *t* de Student

Requisitos Básicos:

a) Os contrastes a serem testados devem ser ortogonais entre si;
b) Os contrastes devem ser estabelecidos antes de serem examinados os dados (na fase de planejamento do experimento).

ESTATÍSTICA PARA O TESTE:

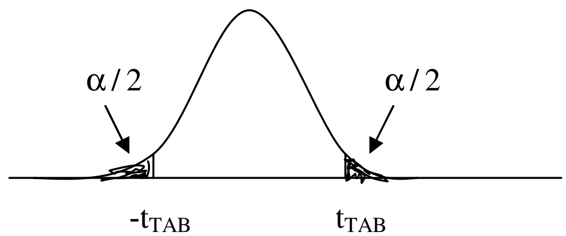
$$\boxed{t_c=\frac{\hat{Y}-A}{\sqrt{V\hat{a}r\left(\hat{Y}\right)}}}$$

Compara se o contraste $\hat{Y}$ difere significativamente de A (valor estabelecido, zero, por exemplo).

Teste de Hipóteses:

$$\begin{cases} H_0: \text{as verdadeiras médias confrontadas no contraste não diferem entre si.} \\ H_1: \text{as verdadeiras médias confrontadas no contraste diferem entre si.} \end{cases}$$

TABELA



$t_{gl\,\text{Resíduo};\alpha}$

Se $|t_c| > t_{TAB}$, rejeita-se H_0

Ex.: Para Y_1: $t_c = \dfrac{\hat{Y}_1 - 0}{\sqrt{V\hat{a}r(\hat{Y}_1)}} = \dfrac{-7-0}{\sqrt{5,6}} = -2,958$

$t_{16;0,05} = 2,12$ $\quad\quad\quad\quad$ $t_{16;0,01} = 2,92$

Como $|t_c| > t_{16;0,05}$, concluímos que o contraste difere significativamente de zero, tanto a 0,05 como a 0,01, ou seja as variedades de origem americana diferem significativamente das variedades européias.

Para Y_2: $t_c = \dfrac{\hat{Y}_2 - 0}{\sqrt{V\hat{a}r(\hat{Y}_2)}} = \dfrac{-4-0}{\sqrt{2,8}} = -2,39$

$t_{16;0,05} = 2,12$ $\quad\quad\quad\quad$ $t_{16;0,01} = 2,92$

$\therefore$ Como $|t_c| > t_{16;0,05}$, rejeita-se H_0 ao nível de 5% de significância de que a variedade A difere da B.

$\therefore$ Como $|t_c| < t_{16;0,01}$ não rejeitamos H_0 ao nível de 1% de significância.

Portanto, a variedade A não difere da B ao nível de 1% de significância.

Para Y_3: $t_c = \dfrac{\hat{Y}_3 - 0}{\sqrt{V\hat{a}r(\hat{Y}_3)}} = \dfrac{-8-0}{\sqrt{2,8}} = -4,78$

$\therefore$ Como $|t_c| > t_{16;\alpha}$, rejeita-se H_0 .

portanto, a variedade C difere da variedade D ao nível de 1% de significância.

SOMA DE QUADRADOS DE UM CONTRATE
Idéia: se há uma soma de quadrados e graus de liberdade associados à uma fonte de variação, então, podemos realizar um teste F.

Em geral, a soma de quadrados para qualquer contraste é:

$$\text{S.Q.Contraste} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{I} a_i T_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{I} J_i a_i^2} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{I} a_i J_i \hat{\mu}_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{I} J_i a_i^2}$$

, em que T_i é o total do i-ésimo tratamento.

Para o exemplo do milho temos as seguintes Somas de Quadrados para os contrastes ortogonais:

$$\text{S.Q.}(Y_1) = \frac{(5\times(-7))^2}{5\times 4} = 61{,}25 , \qquad \frac{\left(J\sum_{i=1}^{I} a_i \hat{\mu}_i\right)^2}{J\sum_{i=1}^{I} a_i^2}$$

, uma vez que $J_1=J_2=J_3=J_4=5$

$$\text{S.Q.}(Y_2) = \frac{(5\times 4)^2}{5\times 2} = 40$$

$$\text{S.Q.}(Y_3) = \frac{(5\times(-5))^2}{5\times 2} = 62{,}5$$

Nota_1: O total dessas três somas de quadrados é igual a Soma de Quadrados de Tratamentos (S.Q. de Variedades de milho=163,75). Assim, a construção de (I-1) contrates ortogonais, decompõe a S.Q.Tratamentos, na sua totalidade.

Nota_2: Podemos construir vários grupos de (I-1) contrastes ortogonais e testá-los. Porém cada um deles deve decompor toda a S.Q. do Fator em estudo.

Teste de Scheffé

Requisitos Básicos:

a) Aplicado para testar todo e qualquer contraste de médias, mesmo quando sugeridos pelos dados;
b) Utilizado para testar grupos de médias;
c) É mais rigoroso do que o teste t, porém é mais flexível, tendo em vista a não exigência de ortogonalidade;
d) Exige que o teste F da ANVA para o fator em estudo seja significativo.

ESTATÍSTICA PARA O TESTE:

$$\boxed{S = \sqrt{(I-1)FV\hat{a}r(\hat{y})}}$$

Em que: I – é o número de níveis tratamentos do ensaio;
F – é o valor crítico ao nível α de probabilidade, em função dos graus de liberdade de Tratamentos e resíduo da ANVA.

Exemplo: Considere os dados das variedades de milho. O pesquisador verificou que a variedade D tem maior média, e ele ficou interessado em testar se essa variedade é superior às demais. Assim, o contraste que nos fornece esta comparação é:

$$Y=\mu_A+\mu_B+\mu_C-3\mu_D$$

A estimativa é:

$$\hat{y} = \hat{\mu}_A + \hat{\mu}_B + \hat{\mu}_C - \hat{\mu}_D$$

$$\hat{y} = 23 + 27 + 26 - 3\times 31$$

$$\hat{y} = -17\ kg/100m^2$$

A estimativa de variância da estimativa do contraste é:

$$v\hat{a}r(\hat{y}) = a_1^2\frac{s_1^2}{J_1} + a_2^2\frac{s_2^2}{J_2} + a_3^2\frac{s_3^2}{J_3} + a_4^2\frac{s_4^2}{J_4}$$

$$=(1)^2\frac{6,5}{5}+(1)^2\frac{7,5}{5}+(1)^2\frac{7,5}{5}+(-3)^2\frac{6,5}{5}$$

$$=16,0$$

O valor de F da tabela ao nível de 5% de probabilidade para 3 graus de liberdade de variedades e 16 graus de liberdade do resíduo é 3,24. Logo:

$$S = \sqrt{(4-1)\times 3,24\times 16} = \sqrt{155,52} = 12,4707 \text{ kg/100m}^2$$

Como o $|\hat{y}| > S$, o contraste é significativo ao nível de 5% de probabilidade e concluímos que a variedade de milho D apresenta, em média, uma produção superior à media das demais variedades da ordem de 3,4 kg/100m^2 ($|\hat{y}|/J$).

A soma de quadrados do contraste é:

$$S.Q.(Y)= \frac{(5\times(-17))^2}{5\times 12} = 120,4166$$

EXERCÍCIO:

a) Verifique as pressuposições para a ANOVA e aplique o teste de Tukey e Duncan aos dados do EXERCÍCIO sobre "força (y_{ij}) em Mega Pascal (Mpa) medida em dentes". São esses testes concordantes para esses dados? (Use α=0,05).
b) Use contrastes para comparar, nesses dados, a média do (G2 e G3) vs (G4 e G5).
c) Faça a decomposição da Soma de Quadrados de Tratamentos, utilizando contrastes ortogonais.
d) Considere G1 como grupo controle e realize o teste de Dunnett α=0,05.
e) Use o teste de Scheffé para comparar o contraste entre (G1 e G2) vs (demais), α=0,05.

COMPARAÇÕES MÚLTIPLAS NA ANÁLISE NÃO-PARAMÉTRICA

Campos (1979)

O emprego das comparações múltiplas pode ser encarado como uma complementação do teste de Kruskal-Wallis, onde havíamos considerado a hipótese

$$H_0: t_1=t_2=...=t_I$$

A finalidade das comparações múltiplas é "localizar", quando existem, as diferenças significativas entre pares de tratamentos.

Os processos não-paramétricos empregados nas comparações múltiplas são, na maioria dos casos, deficientes, devido a sua complexidade de estruturação.

Abordaremos os seguintes casos:

a. Comparações múltiplas envolvendo todos os pares de tratamentos;
b. Comparações múltiplas envolvendo apenas os contrastes: testemunha vs tratamento.

Para ambos os casos serão estruturados ainda os processos apropriados a grandes amostras.

1. Comparações envolvendo todos os pares de tratamentos.

1.1 Caso de pequenas amostras

Para cada par i e j de tratamentos, determinamos a diferença:

$$|R_i - R_j| \qquad \begin{cases} i = 1,2,...,I-1 \\ j = i+1,...,I \end{cases}$$

Em que R_i e R_j representam as somas das ordens atribuídas aos tratamentos i e j respectivamente, na classificação conjunta das N observações referentes aos I tratamentos. Se houver empates, utilizam-se as ordens médias para proceder o desempate.

A diferença mínima significativa (dms) a uma "taxa de erro experimental" ("experimentwise error rate") α, segundo a qual admitimos $t_i \neq t_j$ é:

a) Para $J_1=J_2=...=J_I$

$$\text{dms}=\Delta$$

em que, $$P(|R_i - R_j| \geq \Delta) = \alpha$$

(A Tabela 16 em Campos (1979) dá os valores de Δ)

b) Para o caso de diferentes números de repetições entre os I tratamentos:

$$\boxed{\text{dms}=\sqrt{\frac{N(N+1)}{12}\left(\frac{1}{J_i}+\frac{1}{J_j}\right)h}}$$

Em que, h é o limite dado pela Tabela 14 do teste de Kruskal-Wallis.

J_i e J_j são os números de repetições dos tratamentos i e j respectivamente.

Neste caso consideramos as diferenças:

$$\left|\overline{R}_i - \overline{R}_j\right|,$$

Em que,

$$\overline{R}_i = \frac{R_i}{J_i} \quad \text{e} \quad \overline{R}_j = \frac{R_j}{J_j}.$$

Exemplo 1

Numa pesquisa sobre qualidade do vinho, foram provados três tipos, por cinco degustadores. Cada degustador provou doze amostras (quatro de cada tipo) e atribuiu a cada uma delas uma nota de zero a dez. As médias das notas atribuídas pelos cinco degustadores a cada uma das amostras foram:

Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3
5,0(1)	8,3(7)	9,2(11)
6,7(2)	9,3(12)	8,7(9)
7,0(4)	8,6(8)	7,3(5)
6,8(3)	9,0(10)	8,2(6)
R_1=(10)	R_2=(37)	R_3=(31)

Verifique se há preferência dos degustadores por algum dos tipos de vinho.

Solução:

Aplicando o teste de Kruskal-Wallis, temos:

R_1=10 R_2=37 R_3=31 N=12

Conseqüentemente: $H=\frac{12}{12(13)}\left(\frac{10^2}{4}+\frac{37^2}{4}+\frac{31^2}{4}\right)-3(13)=7,731$

Pela Tabela 14, o nms no qual se rejeita H_0: $t_1=t_2=t_3$ é α=0,007. Pode-se então afirmar que pelo menos dois tratamentos diferem entre si.

Por outro lado, organizam-se as diferenças:

$$|R_1 - R_2| = |10 - 37| = 27$$
$$|R_1 - R_3| = |10 - 31| = 21$$
$$|R_2 - R_3| = |37 - 31| = 6$$

A Tabela 16 fornece, à taxa α=0,011, $t_1 \neq t_2$, isto é, os degustadores preferem o tipo 2 ao tipo 1

EXERCÍCIO:

Aplique o método das comparações múltiplas ao Exemplo 1 do teste de Kruskal-Wallis, "Influência do tamanho do disco na aração".

1.2 Caso de grandes amostras

Determinamos as diferenças $|\overline{R}_i - \overline{R}_j|$ e, a uma taxa α, as dms segundo as quais $t_i \neq t_j$ são:

a. Para $J_1=J_2=...=J_I=J$

$$\text{dms}=Q\sqrt{\frac{I(IJ+1)}{12}} = Q\sqrt{\frac{I(N+1)}{12}}$$

A Tabela 17 fornece os valores de Q.

b. No caso de tratamentos não igualmente repetidos:

$$\text{dms} = z_{\alpha/[I(I-1)]}\sqrt{\frac{N(N+1)}{12}\left(\frac{1}{J_i}+\frac{1}{J_j}\right)}$$

em que $z_{\alpha/[I(I-1)]}$ é um limite superior da distribuição normal.

Exemplo:

Estabelecer as comparações múltiplas no exemplo 2 do teste de Kruskal-Wallis, "alimentação de suínos "

Solução:

Naquele exemplo tinha-se J_i=5, R_1=44,0 R_2=82,5 R_3=55,5 R_4=28,0.

Assim, obtém-se: $\overline{R}_1 = 8{,}8$ $\overline{R}_2 = 16{,}5$ $\overline{R}_3 = 11{,}1$ $\overline{R}_4 = 5{,}6$

Podemos formar as seguintes diferenças:

$|\bar{R}_1 - \bar{R}_2| = 7,7 \quad |\bar{R}_2 - \bar{R}_3| = 5,4$

$|\bar{R}_1 - \bar{R}_3| = 2,3 \quad |\bar{R}_2 - \bar{R}_4| = 10,9$

$|\bar{R}_1 - \bar{R}_4| = 3,2 \quad |\bar{R}_3 - \bar{R}_4| = 5,5$

Considerando a taxa $\alpha = 0,05$, e para I=4, a Tabela 17 fornece: Q=3,633.

Logo, $$\text{dms} = 3,633\sqrt{\frac{4(21)}{12}} = 9,6$$

Concluímos que as rações 2 e 4 diferem quanto ao ganho de peso, à taxa de 5%. Observamos também que este resultado é concordante com o obtido no campo paramétrico.

1.3 Comentário Final sobre Transformação em Postos

- O procedimento de Transformação em Postos é muito poderoso e útil. Se aplicarmos o teste F aos postos ao invés dos dados originais, obteremos:

$$F_0 = \frac{H/(J-1)}{(N-1-H)/(N-J)}$$

como estatística teste. [veja Conover (1980)]. Nota-se que enquanto a estatística H de Kruskal-Wallis aumenta ou diminui, F_0 também aumenta ou diminui. Assim o teste de Kruskal-Wallis é equivalente a aplicar a análise da variância usual aos postos.

- Quando as suposições da análise da variância usual (aditividade, normalidade dos erros, não presença de "outliers", homogeneidade da variância, etc.) não são satisfeitas, recomenda-se que a análise da variância usual seja realizada em ambos: dados originais e postos. Se ambos os procedimentos fornecem resultados similares, as suposições da análise da variância estão provavelmente razoavelmente bem satisfeitas, e a análise padrão é satisfatória. Quando os dois procedimentos diferem, a análise dos postos deve ser realizada uma vez que ela é menos distorcida pela falta de suposições.

EXERCÍCIO: Realize a análise de variância paramétrica (F) sobre os postos dos dados de "Qualidade de Vinhos" e verifique se ocorre a equivalência com o teste de Krukal-Wallis.