LISTA #1

PMR3523 – Controle Moderno

Prof. Eduardo Cabral

1) Dada a equação diferencial abaixo que representa a dinâmica de um sistema. Sabendo que a entrada do sistema é f e as saídas são x e $\dot{x}$.

$$\dddot{x}(t) + 5\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 4f(t)$$

Pede-se
a) Defina os estados do sistema.
b) Represente o modelo do sistema na forma do espaço dos estados.
c) Represente o sistema na forma de diagrama de blocos.

2) Um circuito elétrico é representado pelas equações diferenciais-integrais abaixo.

$$\begin{cases} R_1 i_1(t) + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int [i_1(t) - i_2(t)]dt = V(t) \\ \dfrac{1}{C}\displaystyle\int [i_2(t) - i_1(t)]dt + R_2 i_2(t) + L\dfrac{di_2(t)}{dt} = 0 \end{cases}$$

onde i é corrente elétrica, R é resistência elétrica, C é capacitância, L é indutância e V é a tensão da fonte. Sabendo que as saídas do sistema são a queda de tensão no capacitor e as correntes i_1 e i_2, pede-se:
a) Identifique o vetor de estados e o vetor de entradas.
b) Represente o modelo do sistema na forma do espaço dos estados.
c) Represente o sistema na forma de diagrama de blocos.

3) Dado o sistema abaixo na forma do espaço dos estados:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{u}(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}u(t)$$

Pede-se:
a) Calcule os autovalores e os autovetores do sistema e identifique os modos dinâmicos. Forneça uma explicação física para cada modo dinâmico.
b) Especifique condições iniciais que estimulam cada modo dinâmico isoladamente.
c) Verifique a controlabilidade do sistema usando a matriz de controlabilidade.
d) Verifique a observabilidade do sistema usando o teste modal.
e) Obtenha a matriz de função de transferência do sistema.

4) Dado o sistema abaixo na forma do espaço dos estados:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \end{cases}$$

Pede-se:

a) Calcule os autovalores e os autovetores do sistema e identifique os modos dinâmicos. Forneça uma explicação física para cada modo dinâmico.

b) Usando o método de sua escolha calcule a matriz exponencial $e^{\mathbf{A}t}$.

c) Calcule os zeros do sistema resolvendo o problema de autovalor generalizado.

d) Verifique a controlabilidade do sistema usando o teste clássico.

e) Obtenha a matriz de função de transferência do sistema.

5) O modelo dinâmico simplificado de uma suspensão magnética pode ser representado no espaço dos estados em tempo contínuo pelas seguintes expressões:

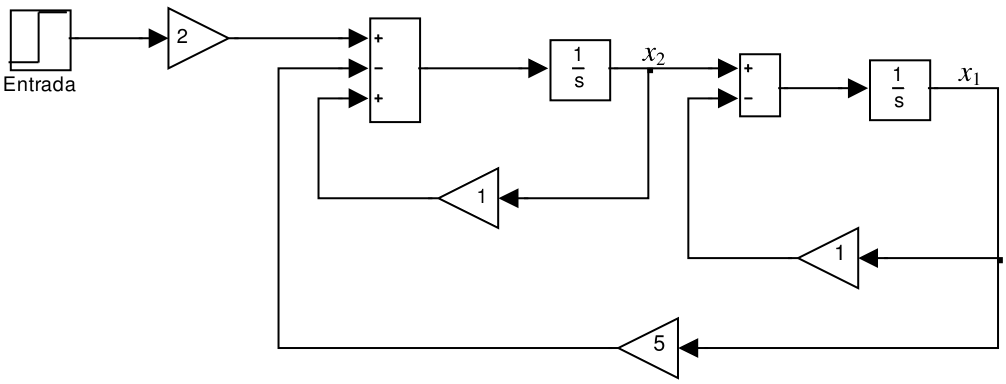
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = -4x(t) + 2u(t - 0.1) \end{cases}$$

onde $x(t)$ é posição, $v(t)$ é velocidade e $u(t)$ é a tensão elétrica aplicada nas bobinas elétricas. Os estados desse sistema são a posição e a velocidade, a entrada é a tensão elétrica e a saída é a posição. Note que existe um atraso de 0,1 segundo entre a tensão elétrica aplicada e a força efetiva aplicada. Pede-se:

a) Escolha um período de amostragem para discretizar temporalmente a dinâmica do sistema e justifique a sua escolha.

b) Obtenha o equivalente em tempo discreto do modelo do sistema.

6) Considere o diagrama de blocos abaixo que representa a dinâmica linearizada de um sistema composto por dois tanques de água.



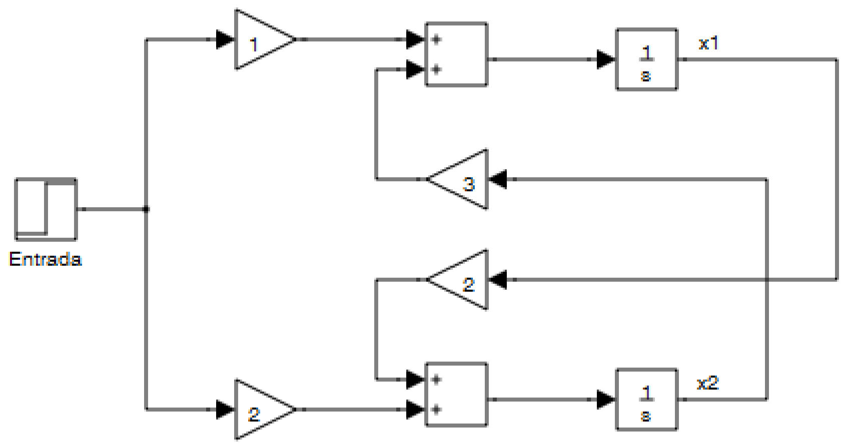
a) Sabendo que a saída do sistema é o estado x_1, obtenha a representação do sistema no espaço dos estados.

b) Calcule os autovalores e os autovetores do sistema.

c) Usando o método de sua escolha calcule a matriz exponencial $e^{\mathbf{A}t}$.

d) Verifique a controlabilidade e observabilidade do sistema usando o método clássico e pelos modos dinâmicos.

7) Considere o diagrama de blocos abaixo que representa a dinâmica linearizada de um pêndulo invertido sobre um carro.

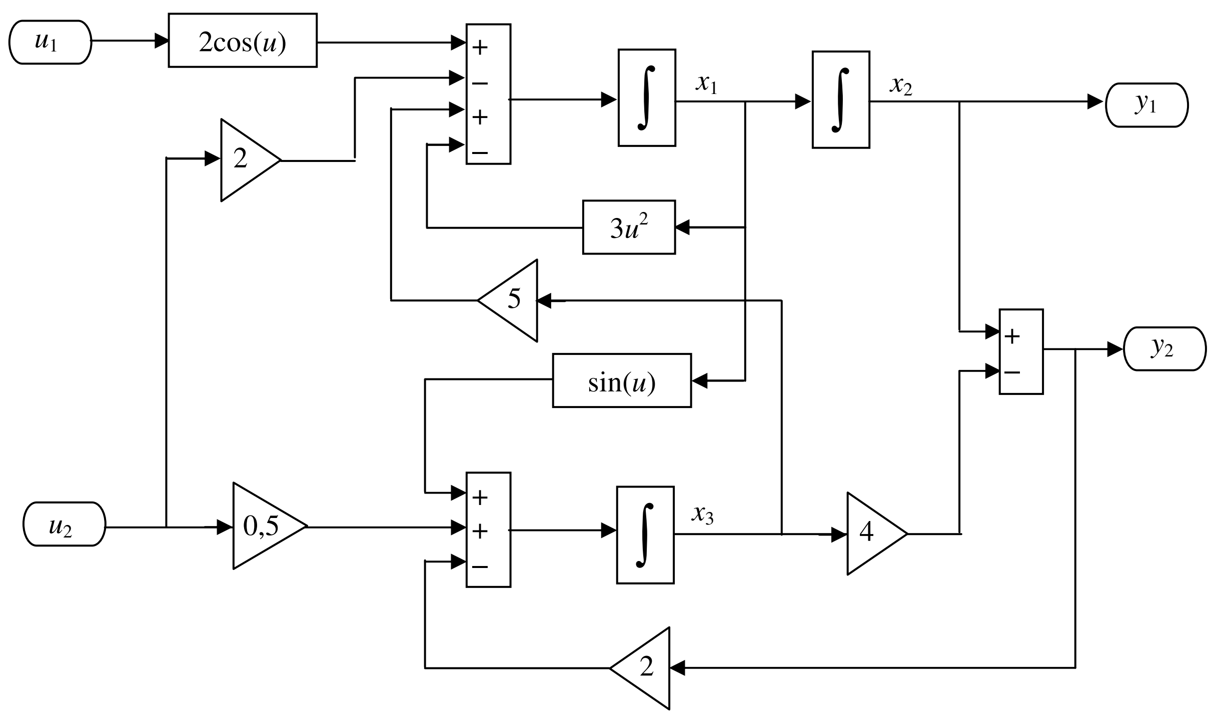


Deseja-se projetar um controlador servo para o sistema e para isso pede-se:

a) Sabendo que a saída do sistema é o estado x_1, obtenha a representação do sistema no espaço dos estados.
b) Verifique a controlabilidade e a observabilidade do sistema.
c) Escolha um período de amostragem para discretizar temporalmente a dinâmica do sistema e justifique a sua escolha.
d) Obtenha o equivalente em tempo discreto do modelo do sistema.

8) Considere o diagrama de blocos abaixo que representa a dinâmica de um sistema não linear. Sabendo que u_1 e u_2 são as entradas do sistema e que y_1 e y_2 são as saídas, pede-se:

a) Identifique os estados do sistema.
b) Obtenha a representação do modelo do sistema na forma do espaço dos estados.



9) A dinâmica de um sistema é dada pelas seguintes equações diferenciais não lineares:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) + x_1(t)u(t) + x_1(t)x_2(t)^2 \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

onde x_1 e x_2 são os estados, u é a entrada e y é a saída do sistema. Pede-se:

a) Determine a condição de linearização do sistema assumindo uma condição estacionária onde $x_1 = 1$.
b) Assumindo que a saída do sistema é o estado x_1, obtenha o modelo linear para esse sistema em torno da posição de equilíbrio obtida no item anterior.
c) Coloque o sistema linearizado na forma do espaço dos estados.

10) A seguinte equação diferencial não linear representa a dinâmica de um sistema:

$$3y(t)\ddot{y}(t) + 8\cos(y(t)) = 2f(t)^2$$

onde y é a saída do sistema e f é a entrada do sistema. Pede-se:

a) Coloque o sistema na forma de espaço de estados não-linear.
b) Adotando como condição de linearização $y_0 = 2\pi$ e $\dot{y}_0 = 0$, linearize a dinâmica do sistema utilizando o método da Série de Taylor e a condição de linearização do item anterior.
c) Linearize o sistema utilizando o método da sua escolha.
d) Coloque o sistema linear na forma do espaço dos estados definindo as suas matrizes.

11) Um sistema de levitação magnética é composto por uma esfera de massa m e um eletroímã. A esfera é suspensa pela força gerada pelo um eletroímã. O eletroímã é composto por uma bobina e um núcleo de material ferromagnético. A bobina é composta por uma resistência elétrica (R) e um indutor (L), ambos em série com uma fonte de tensão. As equações diferenciais que representam o comportamento dinâmico do sistema são as seguintes:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + mg = \dfrac{Ki(t)^2}{[x(t)+\mu]^2} \\ L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V_B(t) \end{cases}$$

onde x é a altura da esfera medida em relação à bobina, i é a corrente elétrica que passa pela bobina, K e μ são constantes e V_B é a tensão da fonte. Pede-se:

a) Determine a condição de linearização de regime estacionário quando a esfera se encontra parada na posição x_0.
b) Linearize a dinâmica do sistema em torno da condição de linearização obtida no item anterior.
c) Sendo a saída do sistema a posição da esfera e a entrada a tensão elétrica da fonte, coloque as equações linearizadas na forma do espaço dos estados.

Solução

1a) Estados: x, $\dot{x}$ e $\ddot{x}$.

1b) $\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} f(t) \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \end{cases}$

2a) Estados: q_1, q_2, i_2. Entrada: V

2b) $\begin{cases} \begin{bmatrix} \dfrac{dq_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dq_2(t)}{dt} \\ \dfrac{di_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_1C} & \dfrac{1}{R_1C} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{1}{LC} & -\dfrac{1}{LC} & -\dfrac{R_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V(t) \\ \begin{bmatrix} i_1(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_1C} & \dfrac{1}{R_1C} & 0 \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V(t) \end{cases}$

3a) $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3/2 & -1 \end{bmatrix}$

3b) $\mathbf{x_{01}} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x_{01}} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, onde α e β são constantes quaisquer

3c) $\mathbf{M_C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & -3 \end{bmatrix}$, sistema controlável

$\mathbf{Cv_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$, modo 1 observável

$\mathbf{Cv_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, modo 2 observável

3e) $\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s^2+3s-8}{s^2+3s-4} & \dfrac{s+2}{s^2+3s-4} \\ \dfrac{2s+2}{s^2+3s-4} & \dfrac{-3}{s^2+3s-4} \end{bmatrix}$

4a) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

4b) $e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \dfrac{e^{-t}+2e^{2t}}{3} & \dfrac{-e^{-t}+e^{2t}}{3} \\ \dfrac{-2e^{-t}+2e^{2t}}{3} & \dfrac{2e^{-t}+e^{2t}}{3} \end{bmatrix}$

4c) $zero = -1$

4d) $\mathbf{M_C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, sistema controlável

4e) $\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{-1}{(s+1)(s-2)} & \dfrac{s}{(s-2)}\\ \dfrac{-s+1}{(s+1)(s-2)} & \dfrac{2}{(s-2)}\end{bmatrix}$

5a) Pólos do sistema = $\pm 2j$, T_a = 0,1 seg (f_a = 20π rad/s) ⇒ múltiplo do atraso e maior que 10 vezes a freqüência natural do sistema

5b) $\begin{cases}\begin{bmatrix}x(k+1)\\ v(k+1)\\ u(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}9801 & 0{,}0993 & 0{,}01\\ -0{,}3973 & 0{,}9801 & 0{,}1987\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(k)\\ v(k)\\ u(k-1)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u(k)\\ y(k)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(k)\\ v(k)\\ u(k-1)\end{bmatrix}\end{cases}$

6a) $\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -5 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{cases}$

6b) $\lambda_1=-2j$, $\lambda_2=2j$, $\mathbf{V}=\begin{bmatrix}0{,}2-0.4j & 0{,}2+0{,}4j\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

6c) $e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix}\cos(2t)-0{,}5\sin(2t) & 0{,}5\sin(2t)\\ -2{,}5\sin(2t) & \cos(2t)+0{,}5\sin(2t)\end{bmatrix}$

7a) $\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{cases}$

7b) $\mathbf{M_C}=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 2 & 2\end{bmatrix}$, sistema controlável

8a) Estados: x_1, x_2, x_3.

8b) $\begin{cases}\dot{x}_1(t)=-3x_1(t)^2+5x_3(t)+2\cos(u_1(t))-2u_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=x_1(t)\\ \dot{x}_3(t)=\sin(x_1(t))-2x_2(t)+8x_3(t)+0{,}5u_2(t)\end{cases}$

$\begin{cases}y_1(t)=x_2(t)\\ y_2(t)=x_2(t)-4x_3(t)\end{cases}$

9a) $x_{10}=1$, $x_{20}=0$, $u_0=-2$.

9b) $\begin{cases}\delta\dot{x}_1(t)=\delta x_2(t)\\ \delta\dot{x}_2(t)=\delta u(t)\\ \delta y(t)=\delta x_1(t)\end{cases}$

9c) $\begin{cases}\begin{bmatrix}\delta\dot{x}_1(t)\\ \delta\dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x_1(t)\\ \delta x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\delta u(t)\\ \delta y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x_1(t)\\ \delta x_2(t)\end{bmatrix}\end{cases}$

10a) $\begin{cases}\dot{y}(t)=v(t)\\ \dot{v}(t)=-\dfrac{8\cos(y(t))}{3y(t)}+\dfrac{2f(t)^2}{3y(t)}\end{cases}$

10b) $\begin{cases} \delta\dot{y}(t) = \delta v(t) \\ \delta\dot{v}(t) = \dfrac{4}{2\pi}\delta f(t) \end{cases}$

10c) $\delta\ddot{y}(t) = \dfrac{4}{3\pi}\delta f(t)$

10d) $\begin{cases} \begin{bmatrix} \delta\dot{y}(t) \\ \delta\dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta y(t) \\ \delta v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{4}{3\pi} \end{bmatrix} \delta f(t) \\ \delta y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta v(t) \end{bmatrix} \end{cases}$

11a) $x_0,\ i_{a0} = (x_0 + \mu)\sqrt{\dfrac{mg}{K}}$, $V_B = Ri_0$.

11b) $\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\delta x(t) = \delta v(t) \\ \dfrac{d}{dt}\delta v(t) = \dfrac{2}{(x_0+\mu)}\delta x(t) + \dfrac{2}{(x_0+\mu)}\sqrt{\dfrac{Kg}{m}}i(t) \\ \dfrac{d}{dt}\delta i(t) = -\dfrac{R}{L}\delta i(t) + \dfrac{1}{R}\delta V_B(t) \end{cases}$

11c) $\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta v(t) \\ \delta i_a(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{2g}{(x_0+\mu)} & 0 & \dfrac{2}{(x_0+\mu)}\sqrt{\dfrac{Kg}{m}} \\ 0 & 0 & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta v(t) \\ \delta i_a(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} \delta V_B(t) \\ \delta y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta v(t) \\ \delta i_a(t) \end{bmatrix} \end{cases}$