LINEARIZAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS

1. Motivação e necessidade

1) Grande parte das teorias de projeto de sistemas de controle foram desenvolvidas para sistemas lineares ⇒ porém praticamente todos os sistemas reais são não-lineares.

2) O que fazer?

   Pode-se obter um modelo linear para o sistema não-linear.

   ⇒ A questão se torna: qual a validade do modelo linear do sistema não-linear?

3) Técnicas de projeto de controladores para sistemas não-lineares são:

   - Complicadas e complexas;
   - Somente garantem estabilidade ⇒ não garantem desempenho;
   - Na maioria dos casos não justifica a complexidade ⇒ controle linear em geral funciona bem mesmo para sistemas não-lineares;
   - Quando controle linear não funciona adequadamente tem-se as alternativas de ⇒ usar programação de ganhos ou controle adaptativo.

2. Sistema dinâmico não-linear

Dado um sistema não-linear de ordem n descrito por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \text{ - vetor de funções da dinâmica dos estados;} \tag{1}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \text{ - vetor de equações das saídas.} \tag{2}$$

onde:

$\mathbf{x}(t)$ - vetor de estados, $\in R^n$ (dimensão nx1);

$\mathbf{u}(t)$ - vetor de entrada, $\in R^m$ (dimensão mx1);

$\mathbf{y}$(t) - vetor de saídas, $\in R^p$ (dimensão px1);

$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ - vetor de funções não-lineares que descreve a dinâmica do sistema, $\in R^n$ (dimensão nx1);

$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ - vetor de funções não-lineares que descreve a saída do sistema, $\in R^p$ (dimensão px1).

O vetor de funções da dinâmica dos estados representado pela eq. (1) é dado de forma mais detalhado como:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)); \\ \dot{x}_2(t) = f_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)); \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)). \end{cases} \tag{3}$$

O vetor de funções da saída representado pela eq. (2) é dado de forma mais detalhado como:

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)); \\ y_2(t) = g_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)); \\ \vdots \\ y_p(t) = g_p(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)). \end{cases} \tag{4}$$

<u>Exemplo</u>: Sistema massa-mola não linear:

Equação diferencial:

$$m\ddot{x}(t) = -k_1 x(t) - k_2 x^3(t) + F(t)$$

$\Rightarrow$ modelo de mola usualmente utilizado para suspensão de automóveis.

Escrevendo o sistema na forma de espaço de estados não-linear fica:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) = f_1(x(t), v(t), F(t)) \\ \dot{v}(t) = -k_1 x(t)/m - k_2 x^3(t)/m + F(t)/m = f_2(x(t), v(t), F(t)) \end{cases}$$

3. Um exemplo simples:

- **Dinâmica longitudinal de um veículo**

Assumindo que o veículo é uma massa pontual, que as forças de atrito são desprezíveis e que a dinâmica do motor é desprezível, a dinâmica longitudinal de um veículo pode ser descrita pela seguinte equação de movimento:

$$\boxed{m\dot{v}(t) = f(t) - bv(t)^2 - mg\sin\alpha} \tag{5}$$

onde v é a velocidade do carro, f é a força aplicada pelo motor, m é a massa do carro, b é o coeficiente da força de arraste, g é a aceleração da gravidade e α é o ângulo de inclinação da estrada.

- **Condição de linearização**
  - Regime estacionário com o veículo em velocidade constante v0.

- Velocidade do carro é constante ⇒ aceleração é igual a zero: $\dot{v}_0 = 0$.
- Equação dinâmica (eq. 5) aplicada na condição de linearização:

$$m\dot{v}_0 = 0 = f_0 - bv_0^2 - mg\sin\alpha$$

onde f_0 é a força motora que deve ser aplicada na massa para contrabalancear a força de arraste e a força peso para manter o carro se movimentando com velocidade constante v_0.

Isolando f_0 resulta em:

$$f_0 = bv_0^2 + mg\sin\alpha \tag{6}$$

- Condição de linearização definida por:

$$\boxed{\begin{cases} v_0 \text{ (conhecido)} \\ f_0 = bv_0^2 \end{cases}}$$

➢ Linearização da equação dinâmica

- Considerando que a inclinação da estrada é constante, o lado esquerdo da eq. (5) é uma função da velocidade e da força motora e pode ser escrita como:

$$\dot{v}(t) = -\frac{b}{m}v^2(t) - g\sin\alpha + \frac{f(t)}{m} = \mathfrak{f}(v(t), f(t)) \tag{7}$$

- A equação dinâmica linearizada é obtida expandindo a função $\mathfrak{f}(v, f)$ em Série de Taylor em torno da condição de linearização.
- A expansão da função $\mathfrak{f}(v, f)$ de duas variáveis em Série de Taylor é feita de seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathfrak{f}(v, f) = \mathfrak{f}(v_0, f_0) + \frac{\partial\mathfrak{f}(v_0, f_0)}{\partial v}(v - v_0) + \frac{\partial\mathfrak{f}(v_0, f_0)}{\partial f}(f - f_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial\mathfrak{f}^2(v_0, f_0)}{\partial v^2}(v - v_0)^2 + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial\mathfrak{f}^2(v_0, f_0)}{\partial f^2}(y - y_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial\mathfrak{f}^2(v_0, f_0)}{\partial v\partial f}(v - v_0)(f - f_0) + \ldots\end{aligned} \tag{8}$$

- Expansão de uma função em Série de Taylor tem infinitos termos ⇒ na eq. (8) somente os primeiros termos de 1ª e de 2ª ordem estão incluídos.
- Truncando a eq. (8) nos termos de primeira derivada

$$\mathfrak{f}(v, f) \cong \mathfrak{f}(v_0, f_0) + \frac{\partial\mathfrak{f}(v_0, f_0)}{\partial v}(v - v_0) + \frac{\partial\mathfrak{f}(v_0, f_0)}{\partial f}(f - f_0) \tag{9}$$

- Derivadas parciais de $\mathfrak{f}(v, f)$ em relação à velocidade e à força motora, calculadas na condição de linearização, são dadas por:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{f}(v_0, f_0)}{\partial v} = -\dfrac{2bv_0}{m} \\ \dfrac{\partial \mathfrak{f}(v_0, f_0)}{\partial f} = \dfrac{1}{m} \end{cases} \tag{10}$$

- Definem-se variáveis de desvio para velocidade, $\delta v(t)$, e força motora, $\delta f(t)$, em torno dos valores da condição de linearização:

$$\begin{cases} \delta v(t) = v(t) - v_0 \\ \delta f(t) = f(t) - f_0 \end{cases} \tag{11}$$

- Substituindo as eq. (10) e (11) na eq. (9) e lembrando que $\dot{v}(t) = \mathfrak{f}(v, f)$

$$\dot{v}(t) = \mathfrak{f}(v, f) \cong -\frac{2bv_0 \delta v(t)}{m} + \frac{\delta f(t)}{m} \tag{12}$$

- Termo $\mathfrak{f}(v_0, f_0)$ da eq. (12) é igual a zero $\Rightarrow$ essa função é igual à derivada temporal da velocidade na condição de linearização

- Como v_0 é constante $\Rightarrow$ derivada temporal do desvio $\delta v(t)$ é igual à derivada temporal da velocidade

$$\delta \dot{v}(t) = \dot{v}(t) \tag{13}$$

- Substituindo a eq. (13) na eq. (12) obtém-se a equação linear que representa a dinâmica linearizada do carro

$$\boxed{\delta \dot{v}(t) = -\frac{2bv_0 \delta v(t)}{m} + \frac{\delta f(t)}{m}}$$

- **Observações:**

1) As variáveis do modelo dinâmico linearizado são os desvios das variáveis em torno da condição de linearização;
2) Como mencionado, o modelo linearizado do sistema é valido somente para operação em torno da condição de linearização, ou seja, para pequenos desvios da velocidade do carro e da força motora em torno das condições de equilíbrio.

- Formalização do método de linearização de sistemas dinâmicos não lineares é apresentada a seguir.

4. Condição de linearização

1) **A linearização de um sistema dinâmico não-linear é feita em torno de uma condição de operação ⇒ denominada condição de linearização.**

2) O sistema linear é válido para operação em "torno" da condição de linearização.

   Quanto em torno?

   Questão em aberto ⇒ depende do sistema!

Condição de linearização:

- Definida por:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0(t) & - \text{vetor de estado na condição de linearização, pode ser variável no tempo;} \\ \mathbf{u}_0(t) & - \text{vetor de entrada na condição de linearização, pode ser variável no tempo;} \\ \mathbf{y}_0(t) & - \text{vetor de saída na condição de linearização, pode ser variável no tempo.} \end{cases}$$

Cálculo da condição de linearização:

- Uma possibilidade é a condição de linearização ser um ponto de equilíbrio do sistema, ou seja:

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t)) = \mathbf{0} \tag{14}$$

$$\mathbf{y}_0(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t)) \tag{15}$$

- Dessas expressões tem-se $n + p$ equações algébricas não-lineares cuja solução fornece $\mathbf{x}_0(t)$, $\mathbf{u}_0(t)$ e/ou $\mathbf{y}_0(t)$.
- Nota-se que em geral o número de saídas de um sistema MIMO é igual ao número de entradas ($m = p$).
- Conhecendo-se, por exemplo, as saídas do sistema na condição de linearização ⇒ pode-se a partir das eq. (14) e (15) obter o vetor de estados e o vetor de entradas na condição de linearização.

- Se a condição de linearização não for um ponto de equilíbrio do sistema, tem-se no lugar da eq. (14) o seguinte:

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t)) \tag{16}$$

  - A equação da saída (eq. 15) não se altera.
  - Nesse caso a condição de linearização tem que satisfazer a equação da dinâmica do sistema ⇒ pode ser difícil de calcular para alguns casos.
  - Em geral a eq. (16) somente serve para calcular as derivadas temporais dos estados, que nem são necessárias.

- Dependendo do problema conhecendo-se, por exemplo, as saídas e alguns estados do sistema na condição de linearização $\Rightarrow$ tem-se $n + p$ equações não-lineares cuja solução deve fornecer os vetores $\mathbf{x}_0(t)$, $\mathbf{u}_0(t)$, $\mathbf{y}_0(t)$ e $\dot{\mathbf{x}}_0(t)$.

➢ **Resumo:**

- A condição de linearização é definida para qualquer caso genericamente por:

$$\boxed{\mathbf{x}_0(t),\ \mathbf{u}_0(t),\ \mathbf{y}_0(t)} \tag{17}$$

- A condição de linearização deve sempre satisfazer as equações de estado independente se for de regime estacionário ou não, ou seja:

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{f}\big(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t)\big)} \tag{18}$$

5. Método de linearização da dinâmica usando Série de Taylor

➢ Define-se pequenos desvios em torno da condição de linearização $\Rightarrow$ $\delta x(t)$, $\delta u(t)$ e $\delta y(t)$:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \delta\mathbf{x}(t); \\ \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0(t) + \delta\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0(t) + \delta\mathbf{y}(t). \end{cases} \tag{19}$$

➢ Dada a condição de linearização (eq. 17 e 18), expandindo o vetor de funções $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})$ das equações de estado (eq. 3) em torno de $\mathbf{x}_0(t)$ e $\mathbf{u}_0(t)$ usando Série de Taylor $\Rightarrow$ cada equação da dinâmica do sistema: $\dot{x}_i(t) = f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, para $i = 1 \dots n$, fica:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = f_i\big(\mathbf{x}_0(t),\mathbf{u}_0(t)\big) + \left(\frac{\partial f_i\big(\mathbf{x}_0(t),\mathbf{u}_0(t)\big)}{\partial x_1}\right)\delta x_1(t) + \ldots + \left(\frac{\partial f_i\big(\mathbf{x}_0(t),\mathbf{u}_0(t)\big)}{\partial x_n}\right)\delta x_n(t) + \\ + \left(\frac{\partial f_i\big(\mathbf{x}_0(t),\mathbf{u}_0(t)\big)}{\partial u_1}\right)\delta u_1(t) + \ldots + \left(\frac{\partial f_i\big(\mathbf{x}_0(t),\mathbf{u}_0(t)\big)}{\partial u_m}\right)\delta u_m(t) + T.O.S. \end{aligned} \tag{20}$$

onde $T.S.O.$ significa termos de ordem superior e o subscrito.

Abrindo a derivada do lado esquerdo da eq. (20) e deseprezando os $T.O.S.$ tem-se:

$$\begin{aligned} \cancel{\dot{x}_{0i}(t)} + \delta\dot{x}_i(t) = \cancel{f_i\big(\mathbf{x}_0(t),\mathbf{u}_0(t)\big)} + \left(\frac{\partial f_i\big(\mathbf{x}_0(t),\mathbf{u}_0(t)\big)}{\partial x_1}\right)\delta x_1(t) + \ldots + \left(\frac{\partial f_i\big(\mathbf{x}_0(t),\mathbf{u}_0(t)\big)}{\partial x_n}\right)\delta x_n(t) + \\ + \left(\frac{\partial f_i\big(\mathbf{x}_0(t),\mathbf{u}_0(t)\big)}{\partial u_1}\right)\delta u_1(t) + \ldots + \left(\frac{\partial f_i\big(\mathbf{x}_0(t),\mathbf{u}_0(t)\big)}{\partial u_m}\right)\delta u_m(t) + T.O.S. \end{aligned} \tag{21}$$

$\Rightarrow$ os *T.S.O.* são de fato desprezíveis desde que $\delta\mathbf{x}(t)$ e $\delta\mathbf{u}(t)$ sejam "pequenos".

Como a condição de linearização deve obedecer a equação dinâmica do sistema (eq. 18) $\Rightarrow$ o 1º termo do lado esquerdo da eq. (21) cancela o 1º termo do lado direito da equação (ver eq. 18). Assim, tem-se:

$$\boxed{\begin{aligned}\delta\dot{x}_i(t) = &\left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x_0}(t),\mathbf{u_0}(t))}{\partial x_1}\right)\delta x_1(t)+\ldots+\left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x_0}(t),\mathbf{u_0}(t))}{\partial x_n}\right)\delta x_n(t)+\\ &+\left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x_0}(t),\mathbf{u_0}(t))}{\partial u_1}\right)\delta u_1(t)+\ldots+\left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x_0}(t),\mathbf{u_0}(t))}{\partial u_m}\right)\delta u_m(t)\end{aligned}} \tag{22}$$

Para todas as n equações de estado linearizadas tem-se na forma matricial:

$$\delta\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)_0\\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right)_0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)_0\end{bmatrix}\delta\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_m}\right)_0\\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_m}\right)_0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_m}\right)_0\end{bmatrix}\delta\mathbf{u}(t) \tag{23}$$

onde os termos $\left(\partial f_i/\partial x_j\right)_0$ e $\left(\partial f_i/\partial u_k\right)_0$ representam uma notação mais compacta para $\left(\partial f_i(\mathbf{x_0}(t),\mathbf{u_0}(t))/\partial x_j\right)_0$ e $\left(\partial f_i(\mathbf{x_0}(t),\mathbf{u_0}(t))/\partial u_k\right)_0$ respectivamente.

Mais compactamente,

$$\delta\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}(t)\delta\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}(t)\delta\mathbf{u}(t)\,. \tag{24}$$

onde $\mathbf{A}(t)$ e $\mathbf{B}(t)$ são matrizes dadas por:

$$\mathbf{A}(t)=\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)_0\\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right)_0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)_0\end{bmatrix}_{(nxn)} \tag{25}$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial u_1}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial u_2}\right)_0 & \cdots & \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial u_m}\right)_0 \\ \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial u_1}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial u_2}\right)_0 & \cdots & \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial u_m}\right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\dfrac{\partial f_n}{\partial u_1}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial f_n}{\partial u_2}\right)_0 & \cdots & \left(\dfrac{\partial f_n}{\partial u_m}\right)_0 \end{bmatrix}_{(nxm)} \tag{26}$$

- O mesmo processo é repetido para as p equações das saídas do sistema (eq. 4) $\Rightarrow$ expandindo cada equação de saída de $\mathbf{x_0}(t)$ e $\mathbf{u_0}(t)$, tem-se:

$$\cancel{y_{0i}(t)} + \delta y_i(t) = \cancel{g_i(\mathbf{x_0}(t),\mathbf{u_0}(t))} + \left(\frac{\partial g_i(\mathbf{x_0}(t),\mathbf{u_0}(t))}{\partial x_1}\right)\delta x_1(t) + \ldots + \left(\frac{\partial g_i(\mathbf{x_0}(t),\mathbf{u_0}(t))}{\partial x_n}\right)\delta x_n(t) +$$
$$+\left(\frac{\partial g_i(\mathbf{x_0}(t),\mathbf{u_0}(t))}{\partial u_1}\right)\delta u_1(t) + \ldots + \left(\frac{\partial g_i(\mathbf{x_0}(t),\mathbf{u_0}(t))}{\partial u_m}\right)\delta U_m(t) + T.O.S. \tag{27}$$

Como a condição de linearização deve obedecer a equação das saídas do sistema (eq. 4) $\Rightarrow$ o 1º termo do lado esquerdo da eq. (27) cancela o 1º termo do lado direito da equação.

Desprezando os *T.O.S.*:

$$\delta y_i(t) = \left(\frac{\partial g_i(\mathbf{x_0}(t),\mathbf{u_0}(t))}{\partial x_1}\right)\delta x_1(t) + \ldots + \left(\frac{\partial g_i(\mathbf{x_0}(t),\mathbf{u_0}(t))}{\partial x_n}\right)\delta x_n(t) +$$
$$+\left(\frac{\partial g_i(\mathbf{x_0}(t),\mathbf{u_0}(t))}{\partial u_1}\right)\delta u_1(t) + \ldots + \left(\frac{\partial g_i(\mathbf{x_0}(t),\mathbf{u_0}(t))}{\partial u_m}\right)\delta u_m(t) \tag{28}$$

Para todas as p equações de saídas do sistema, tem-se:

$$\delta\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial g_1}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\dfrac{\partial g_1}{\partial x_n}\right)_0 \\ \left(\dfrac{\partial g_2}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial g_2}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\dfrac{\partial g_2}{\partial x_n}\right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\dfrac{\partial g_p}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial g_p}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\dfrac{\partial g_p}{\partial x_n}\right)_0 \end{bmatrix} \delta\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial g_1}{\partial u_1}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial g_1}{\partial u_2}\right)_0 & \cdots & \left(\dfrac{\partial g_1}{\partial u_m}\right)_0 \\ \left(\dfrac{\partial g_2}{\partial u_1}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial g_2}{\partial u_2}\right)_0 & \cdots & \left(\dfrac{\partial g_2}{\partial u_m}\right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\dfrac{\partial g_p}{\partial u_1}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial g_p}{\partial u_2}\right)_0 & \cdots & \left(\dfrac{\partial g_p}{\partial u_m}\right)_0 \end{bmatrix} \delta\mathbf{u}(t) \tag{29}$$

onde os termos $\left(\partial g_i/\partial x_j\right)_0$ e $\left(\partial g_i/\partial u_k\right)_0$ representam uma notação mais compacta para $\left(\partial g_i(\mathbf{x_0}(t),\mathbf{u_0}(t))/\partial x_j\right)_0$ e $\left(\partial g_i(\mathbf{x_0}(t),\mathbf{u_0}(t))/\partial u_k\right)_0$ respectivamente.

Mais compactamente,

$$\delta\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\delta\mathbf{u}(t)\,. \tag{30}$$

onde $\mathbf{C}(t)$ e $\mathbf{D}(t)$ são matrizes dadas por:

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_n}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_n}\right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial g_p}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial g_p}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial g_p}{\partial x_n}\right)_0 \end{bmatrix}_{(pxn)} \tag{31}$$

$$\mathbf{D}(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial g_1}{\partial u_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial g_1}{\partial u_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial g_1}{\partial u_m}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial g_2}{\partial u_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial g_2}{\partial u_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial g_2}{\partial u_m}\right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial g_p}{\partial u_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial g_p}{\partial u_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial g_p}{\partial u_m}\right)_0 \end{bmatrix}_{(pxm)} \tag{32}$$

- Em resumo as equações dinâmicas linearizadas de um sistema são as seguintes:

$$\boxed{\begin{aligned} \delta\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\delta\mathbf{u}(t) \\ \delta\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\delta\mathbf{u}(t) \end{aligned}} \tag{33}$$

Nesse caso, como as matrizes do sistema, **A**, **B**, **C** e **D**, variam no tempo, o sistema é do tipo Linear Variante no Tempo (LVT).

- Se a condição de linearização for uma condição de operação em regime estacionário, ou seja, $\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{0}$, então as matrizes do sistema, **A**, **B**, **C** e **D** são constantes e o sistema é do tipo Linear Invariante no Tempo (LIT). Assim a eq. (33) fica:

$$\boxed{\begin{aligned} \delta\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\delta\mathbf{u}(t) \\ \delta\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\delta\mathbf{u}(t) \end{aligned}} \tag{34}$$

- **Usualmente nas eq. (33) e (34) eliminam-se os termos de variação, "δ" ⇒ mas não se pode esquecer que para uma sistema com dinâmica linearizada os estados, as entradas e as saídas representam as variações dessas grandezas em torno da condição de linearização.**

6. Exemplos

Exemplo 1: Massa-mola não-linear:

- Modelo do sistema não-linear:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ -k_1 x(t)/m - k_2 x^3(t)/m + F(t)/m \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(x, v, F) = v(t) \\ \dot{v}(t) = f_2(x, v, F) = \dfrac{1}{m}\left[-k_1 x(t) - k_2 x^3(t) + F(t)\right] \end{cases}$$

- Condição de linearização:

Adotada uma condição de regime estacionário $\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_0 = \dot{v}_0 = 0 \\ F_0 = 0 \end{cases}$

Para a condição de linearização as equações dinâmicas resultam em:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = v_0 = 0 \\ \dot{v}_0 = -k_1 x_0 - k_2 x_0^3 = 0 \end{cases}$$

Que resulta na seguinte relação:

$$k_1 x_0 + k_2 x_0^3 = 0 \;\Rightarrow\; x_0 = \pm\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}$$

$\Rightarrow$ Nota-se que x_0 somente existe se k_1 e k_2 tiverem sinais opostos.

- Linearização da dinâmica do sistema:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_0 = 0 \qquad \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}\right)_0 = 1 \qquad \left(\frac{\partial f_1}{\partial F}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)_0 = \frac{1}{m}\left[-k_1 - 3k_2 x_0^2\right] \qquad \left(\frac{\partial f_2}{\partial v}\right)_0 = 0 \qquad \left(\frac{\partial f_2}{\partial F}\right)_0 = \frac{1}{m}$$

Portanto,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \left(-k_1 - 3k_2 x_0^2\right)/m & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{x}(t) \\ \delta\dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \left(-k_1 - 3k_2 x_0^2\right)/m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \delta F(t)$$

Se por exemplo: $\begin{cases} k_1 = 1\text{N/m} \\ \text{k}_2 = -0{,}5\text{N/m} \\ m = 2\text{kg} \end{cases} \Rightarrow x_0 = \sqrt{\dfrac{1}{1/2}} = \sqrt{2}\ \text{m}$, então:

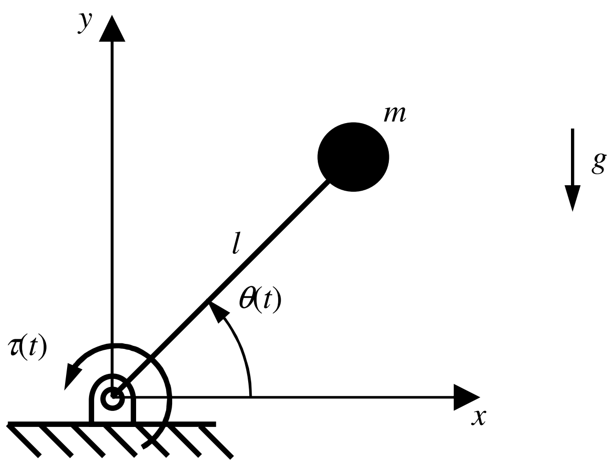
$$\begin{bmatrix} \delta\dot{x}(t) \\ \delta\dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} \delta F(t)$$

<u>Exemplo 2</u>: Pêndulo invertido:

- Seja um pêndulo como mostra a figura a seguir. A massa do pêndulo que é concentrada em sua ponta é m e o seu comprimento é l. Um torque $\tau(t)$ variável é aplicado no pêndulo na posição de sua articulação.

- Equação dinâmica do pêndulo:

$$ml^2\ddot{\theta}(t) + mgl\cos(\theta(t)) = \tau(t)$$



Definindo a velocidade angular do pêndulo $\Rightarrow \omega(t) = \dot{\theta}(t)$.

O sistema na forma do espaço dos estados fica:

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) = -\dfrac{g}{l}\cos(\theta(t)) + \dfrac{\tau(t)}{ml^2} \end{cases}$$

- Condição de linearização:

Na condição de linearização desejada o pêndulo deve estar inclinado de 45º em relação à horizontal ⇒ existem duas condições de linearização possíveis:

a) A condição linearização é um ponto de equilíbrio, ou seja, $\ddot{\theta}_0 = \dot{\theta}_0 = 0$ ⇒ nesse caso tem-se:

$$\begin{cases} \omega_0 = 0 \\ \tau_0 = mgl\cos(\theta_0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} mgl \end{cases}$$

b) A condição de linearização não é um ponto de equlíbrio, ou seja, $\ddot{\theta}_0 \neq 0$ ⇒ nesse caso tem-se:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_0 = \omega_0 \\ \dot{\omega}_0 = -\dfrac{g}{l}\cos(\theta_0) + \dfrac{1}{ml^2}\tau_0 \end{cases}$$

Para definir completamente a condição de linearização deve-se adotar ω_0 e $\dot{\omega}_0$, ou ω_0 e τ_0:

⇒ Adotando $\omega_0 = \tau_0 = 0$ ⇒ $\dot{\omega}_0 = -\dfrac{g}{l}\cos(\theta_0) = -\dfrac{\sqrt{2}g}{2l}$.

⇒ Observa-se que nessa condição de linearização o pêndulo está parado mas iniciando o movimento de queda devido à aceleração da gravidade.

- Dinâmica Linearizada:

Utilizando a condição de linearização (b) para linearizar o sistema, tem-se:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial \theta}\right)_0 = 0 \qquad \left(\frac{\partial f_1}{\partial \omega}\right)_0 = 1 \qquad \left(\frac{\partial f_1}{\partial \tau}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial \theta}\right)_0 = \frac{g}{l}\sin(\theta_0) = \frac{\sqrt{2}g}{2l} \qquad \left(\frac{\partial f_2}{\partial \omega}\right)_0 = 0 \qquad \left(\frac{\partial f_2}{\partial \tau}\right)_0 = \frac{1}{ml^2}$$

Portanto,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}g}{2l} & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{ml^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{\theta}(t) \\ \delta\dot{\omega}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}g}{2l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\theta(t) \\ \delta\omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{ml^2} \end{bmatrix} \delta\tau(t)$$

<u>Exemplo 3</u>: Pêndulo invertido – exemplo numérico:

- Validação do modelo linearizado ⇒ verificar capacidade de representar o sistema não linear por meio de simulações da resposta transitória do pêndulo.

- Condição de linearização para uma condição inicial de não equilíbrio com $\theta_0 = 0^o$.

- Modelo linearizado:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \delta\dot{\theta}(t) \\ \delta\dot{\omega}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\theta(t) \\ \delta\omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{ml^2} \end{bmatrix} \delta\tau(t) \\ \delta y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\theta(t) \\ \delta\omega(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

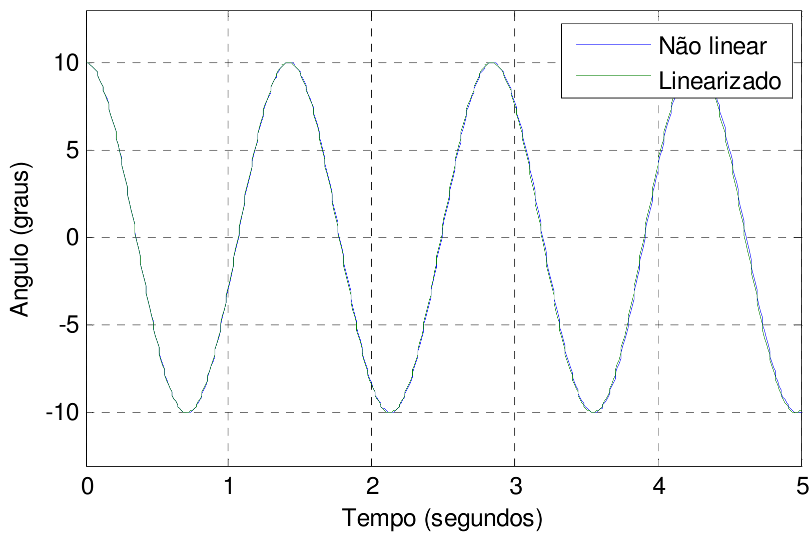


Figura 1. Resposta transitória do pêndulo para uma condição inicial de não equilíbrio com o pêndulo inicialmente inclinado de 10º em relação à vertical.

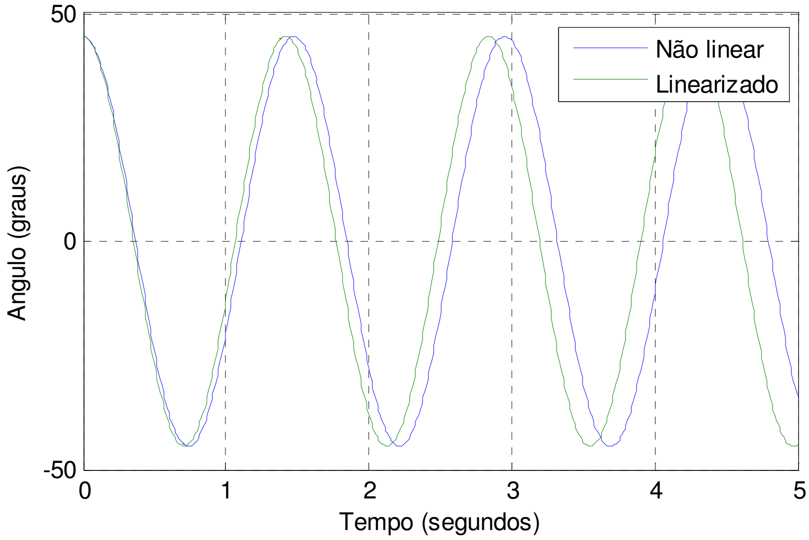


Figura 2. Resposta transitória do pêndulo para uma condição inicial de não equilíbrio com o pêndulo inicialmente inclinado de 45º em relação à vertical.

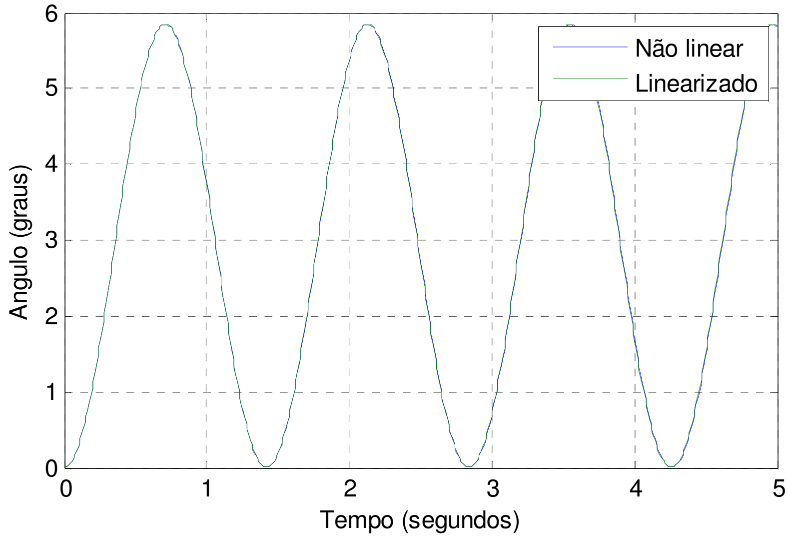


Figura 3. Resposta transitória do pêndulo para o torque variando na forma de degrau de 0 N para 0,25 Nm.

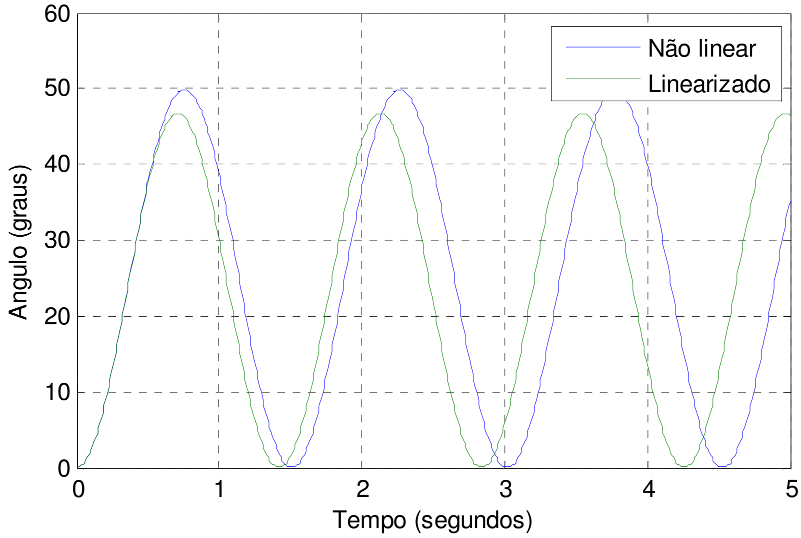


Figura 4. Resposta transitória do pêndulo para o torque variando na forma de degrau de 0 N para 2 Nm.

- **Conclusão:**

  - Figuras 1 e 3 $\Rightarrow$ sistema linearizado representa de forma satisfatória o sistema não linear para pequenos desvios em relação à condição de linearização.

  - Figuras 2 e 4 $\Rightarrow$ resultados do modelo linearizado apresentam erro considerável em relação aos resultados do modelo não linear $\Rightarrow$ resultado esperado em razão da validade do modelo linearizado ser limitada para operação com pequenos desvios em torno da condição de linearização.

7. Método da perturbação para linearização

Um método alternativo para linearizar a dinâmica de um sistema é assumir pequenas variações em torno da condição de linearização, como foi definido na eq. (10), repetida abaixo:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \delta\mathbf{x}(t); \\ \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0(t) + \delta\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0(t) + \delta\mathbf{y}(t). \end{cases} \tag{19}$$

A derivada temporal dos estados são obtidas a partir da derivação da eq. (19), resultando em:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}_0(t) + \delta\dot{\mathbf{x}}(t) \tag{35}$$

Observa-se que a derivada dos estados na condição de linearização não é necessariamente zero, pois a condição de linearização, como visto, não necessita ser uma condição estacionária.

Substituindo as eqs. (19) e (35) nas equações dinâmicas dos estados e nas equações de saída do sistema e desprezando termos de ordem superior obtém-se as equações linearizadas do sistema.

- **Por termos de ordem superior entende-se o seguinte:**
  - **Qualquer variação ao quadrado ⇒ δx_i^2 (seja de variável de estado, de saída ou de entrada);**
  - **Qualquer produto de duas variações ⇒ $\delta x_i \delta x_j$ (seja de variável de estado, de saída ou de entrada).**

<u>Exemplo 4</u>: Pêndulo invertido:

- Equação dinâmica do pêndulo na forma de espaço dos estados:

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) = -\dfrac{g}{l}\sin(\theta(t)) + \dfrac{\tau(t)}{ml^2} \end{cases}$$

- Condição de linearização (condição (b) do exemplo 2):

⇒ Adotando: $\theta_0 = 45^o$, $\omega_0 = \tau_0 = 0 \Rightarrow \dot{\omega}_0 = -\dfrac{g}{l}\cos(\theta_0) = -\dfrac{\sqrt{2}g}{2l}$.

- Dinâmica Linearizada:

Substituindo as eq. (19) e (35) nas equações dinâmicas do sistema tem-se:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_0(t) + \delta\dot{\theta}(t) = \omega_0(t) + \delta\omega(t) \\ \dot{\omega}_0(t) + \delta\dot{\omega}(t) = -\dfrac{g}{l}\cos(\theta_0(t) + \delta\theta(t)) + \dfrac{1}{ml^2}(\tau_0(t) + \delta\tau(t)) \end{cases}$$

Aplicando a relação trigonométrica do cosseno da soma de dois ângulos,

$$\cos(\theta_0 + \delta\theta(t)) = \cos(\theta_0(t))\cos(\delta\theta(t)) - \sin(\theta_0(t))\sin(\delta\theta(t))$$

porém como $\delta\theta$ é pequeno ⇒ $\begin{cases} \cos(\delta\theta) \approx 1 \\ \sin(\delta\theta) \approx \delta\theta \end{cases}$

que resulta em ⇒ $\cos(\theta_0 + \delta\theta(t)) = \cos(\theta_0(t)) - \delta\theta(t)\sin(\theta_0(t))$

Substituindo nas equações dinâmicas:

$$\begin{cases} \cancel{\dot{\theta}_0(t)} + \delta\dot{\theta}(t) = \cancel{\omega_0(t)} + \delta\omega(t) \\ \cancel{\dot{\omega}_0(t)} + \delta\omega(t) = -\dfrac{g}{l}\cancel{\cos(\theta_0(t))} + \dfrac{g}{l}\delta\theta(t)\sin(\theta_0(t)) + \cancel{\dfrac{1}{ml^2}\tau_0(t)} + \dfrac{1}{ml^2}\delta\tau(t) \end{cases}$$

Nota-se que a condição de linearização obedece as equações dinâmicas, assim:

- Na 1ª expressão ⇒ o 1º termo do lado esquerdo cancela o 1º termo do lado direito;
- Na 2ª expressão ⇒ o 1º termo do lado esquerdo cancela o 1º e o 3ª termos do lado direito.

Portanto,

$$\begin{cases} \delta\dot{\theta}(t) = \delta\omega(t) \\ \delta\dot{\omega}(t) = \dfrac{g}{l}\delta\theta(t)\sin(\theta_0(t)) + \dfrac{1}{ml^2}\delta\tau(t) \end{cases}$$

que usando a condição de linearização fica na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{\theta}(t) \\ \delta\dot{\omega}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}g}{2l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\theta(t) \\ \delta\omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{ml^2} \end{bmatrix} \delta\tau(t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}g}{2l} & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{ml^2} \end{bmatrix}$$

8. Método da energia para linearização

➢ Formas especiais de não linearidades

- Algumas formas de não linearidades apresentam descontinuidades ⇒ linearização pode apresentar problemas dependendo da condição de linearização adotada.

  - atrito seco
  - zona morta
  - folga
  - saturação
  - histereses.

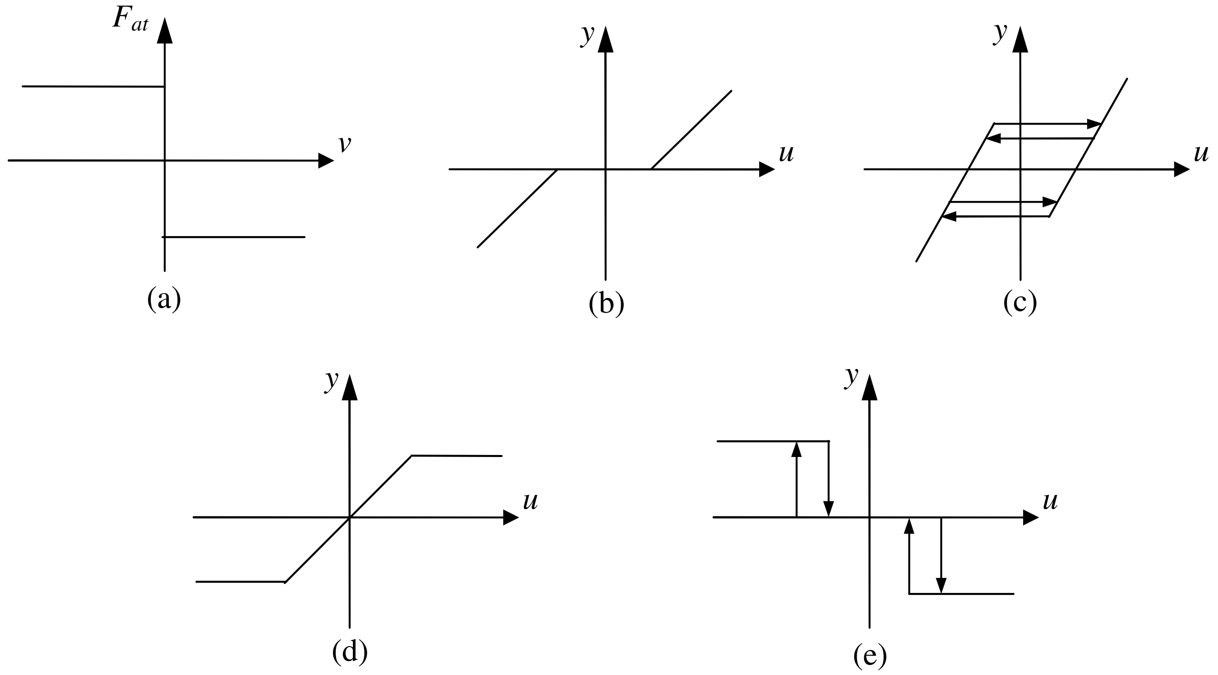


Figura. Formas de não linearidades que apresentam problemas na linearização. a) atrito seco; b) zona morta; c) folga; d) saturação; e e) histereses.

- Devido à descontinuidades ⇒ linearização realizada em torno do ponto onde ocorre a descontinuidade resulta em valores infinitos na relação entre a entrada e a saída da não linearidade, causando problemas no modelo linearizado.

- Outras formas de não linearidades podem ser mal representadas no modelo linear dependendo da condição de linearização utilizada ⇒ exemplo é a força de arraste quando a velocidade do corpo oscila em torno de zero.

  - **Uma forma de eliminar esses problemas é utilizar um termo linear equivalente**

Atrito tipo Coulombiano

- Força de atrito Coulombiano (*Fs*) entre duas superfícies em contato é definida pela seguinte expressão:

$$F_s = -\mu N \text{sinal}(v) \tag{36}$$

onde μ é o coeficiente de atrito, N é a força normal entre as duas superfícies em atrito, v é a velocidade relativa entre as duas superfícies.

Função sinal(v) é definida por:

$$\text{sinal}(v) = \begin{cases} -1, \text{ para } v < 0 \\ \text{indefinido para } v = 0 \\ +1, \text{ para } v > 0 \end{cases} \quad (37)$$

Função sinal ⇒ tem a função de garantir que a força de atrito seja sempre na direção contrária ao movimento.

- Forças de atrito seco apresentam descontinuidade quando a velocidade entre as superfícies em contato fica oscilando em torno de zero ⇒ somente quando a velocidade relativa entre as duas superfícies oscila em torno de zero é que o atrito seco causa problema na linearização

- Solução é substituir a força de atrito seco por uma força de atrito viscoso equivalente em termos de energia dissipada:

$$\boxed{F_s = -\mu N \text{sinal}(v) = b_{eq} v} \quad (38)$$

onde b_{eq} é um coeficiente de atrito viscoso equivalente.

- Expressão é obtida igualando a energia dissipada pela força de atrito seco em um ciclo do movimento com a energia dissipada pela força de atrito viscoso.

- Coeficiente de atrito viscoso equivalente:

$$\boxed{b_{eq} = \frac{4\mu N}{\pi x_m \omega}} \quad (39)$$

onde x_m é a amplitude da oscilação e ω é a freqüência de oscilação.

- Cálculo de b_{eq} depende de x_m e ω ⇒ na prática esses valores não são conhecidos e nem constante ⇒ o que se usa é adotar um valor conveniente para b_{eq} obtido por meio de simulações.

➢ Força de arraste

- Força de arraste surge quando um objeto se move imerso em um meio fluido

$$F_{ar} = cv^2 \quad (40)$$

onde c é o coeficiente de arraste e v é a velocidade relativa entre o objeto e o fluido.

- Problema de linearizar força de arraste ocorre quando a velocidade do objeto em relação ao fluido fica oscilando em torno de zero ⇒ que resulta na anulação desse termo.

- Linearização da força de arraste em torno da condição de linearização v_0

$$\delta F_{ar} = \left(\frac{\partial F_{ar}}{\partial v}\right)_{v_0} \delta v = 2bv_0\delta v \tag{41}$$

Se condição de linearização for $v_0 = 0 \Rightarrow$ no modelo linearizado a força de arraste simplesmente desaparece

- Uma forma de eliminar esse problema é similar ao que foi realizado para o atrito tipo Coulombiano $\Rightarrow$ utilizar uma força de atrito viscoso equivalente, que dissipa a mesma quantidade de energia que a força de arraste em um ciclo do movimento:

$$\boxed{F_{ar} = -cv^2 = b_{eq}v} \tag{42}$$

onde b_{eq} é um coeficiente de atrito viscoso equivalente.

- Expressão é obtida igualando a energia dissipada pela força de atrito seco em um ciclo do movimento com a energia dissipada pela força de arraste.

- Coeficiente de atrito viscoso equivalente:

$$\boxed{b_{eq} = \frac{8bx_m\omega}{3\pi}} \tag{43}$$

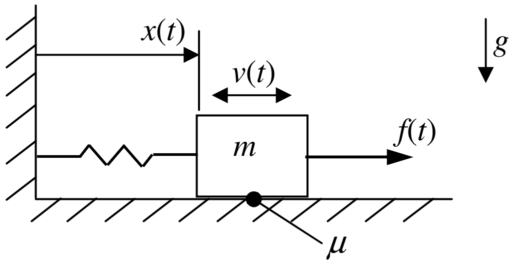
onde x_m é a amplitude da oscilação e ω é a freqüência de oscilação.

- Como no caso de atrito Coulombiano o cálculo de b_{eq} depende de x_m e $\omega \Rightarrow$ na prática esses valores não são conhecidos e nem constante $\Rightarrow$ o que se usa é adotar um valor conveniente para b_{eq} obtido por meio de simulações.

<u>Exemplo 5</u>: Linearização de atrito Coulombiano:

- Seja um sistema mecânico composto por uma massa e uma mola $\Rightarrow$ entre a massa e a superfície existe atrito Coulombiano:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = f(t) - \mu mg\,\text{sinal}(\dot{x}(t))$$



- Força da mola é nula quando a massa está na posição $x = 0$.

- Condição de linearização de equilíbrio adotada:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \dot{x}_0 = \ddot{x}_0 = 0 \\ f_0 = 0 \end{cases}$$

- Substituindo a força de atrito seco por uma força de atrito viscoso equivalente $\Rightarrow$ equação dinâmica do sistema fica:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = f(t) - b_{eq}\dot{x}(t)$$

onde b_{eq} é dado pela eq. (39).

- Utilizando o método da perturbação de linearização:

$$m[\ddot{x}_0 + \delta\ddot{x}(t)] + k[x_0 + \delta x(t)] = f_0 + \delta f(t) - b_{eq}[\dot{x}_0 + \delta\dot{x}(t)]$$

Simplificando

$$m\delta\ddot{x}(t) + b_{eq}\delta\dot{x}(t) + k\delta x(t) = \delta f(t)$$

- Problema que surge na substituição do atrito seco por um atrito viscoso equivalente é que em princípio não se conhece o movimento do sistema $\Rightarrow$ x_m e ω não são conhecidos.

$\Rightarrow$ Uma forma de contornar esse problema é ajustar o coeficiente de atrito viscoso equivalente (b_{eq}) de forma a se ter respostas transitórias do sistema não linear e do sistema linearizado similares.

- Figura mostra os resultados da resposta temporal da posição da massa para o sistema não linear e para o sistema linearizado para uma condição inicial onde a massa está deslocada de 0,5 m da posição de equilíbrio e a força permanece igual a zero.

$\Rightarrow$ Valores adotados: m = 2 kg, k = 30 N/m, μ = 0,1, g = 9,8 m/s^2.

(a)

(b)

(c)

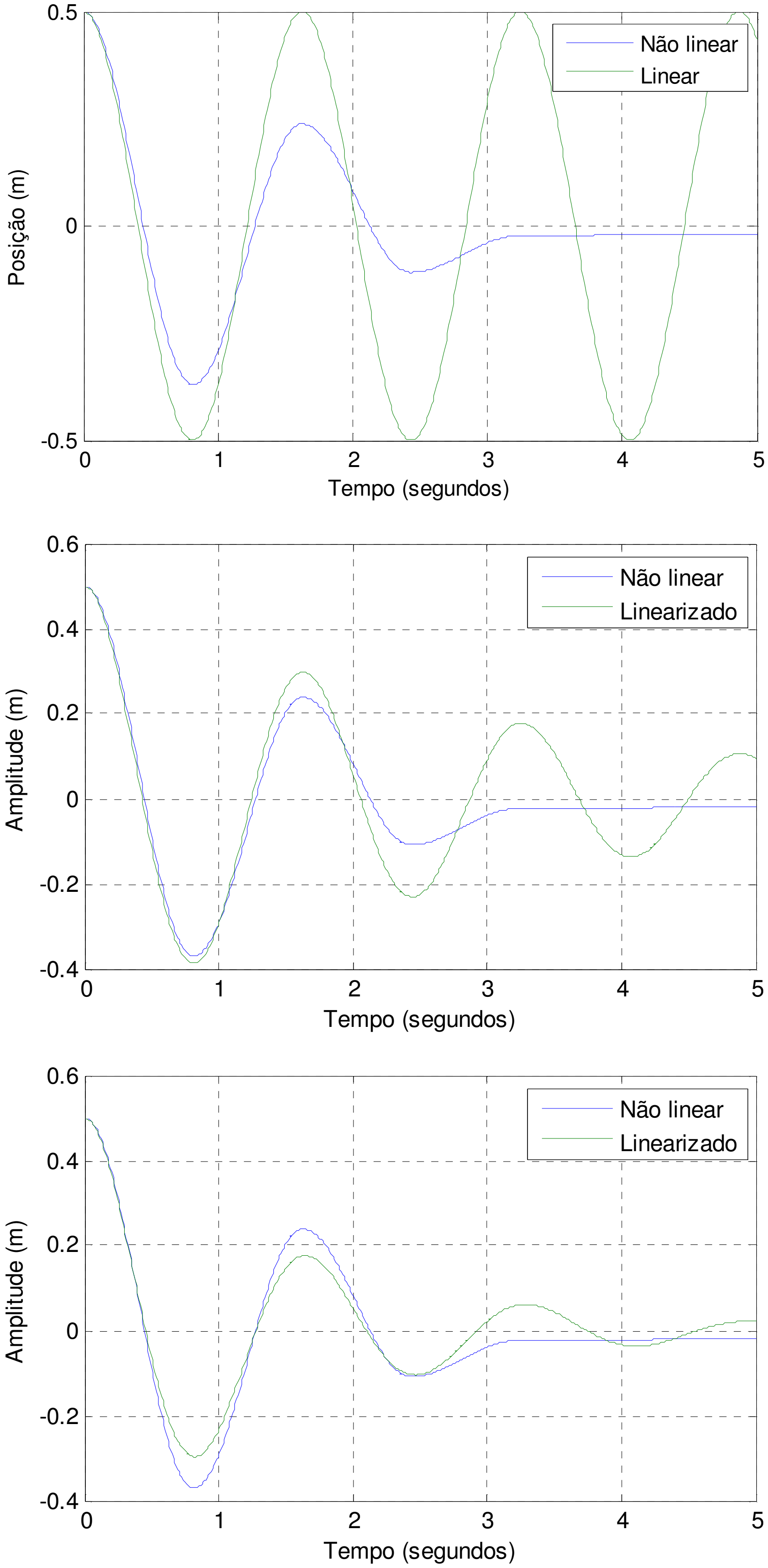


Figura 5. Resposta temporal da posição da massa para uma condição inicial na posição da massa igual a 0,5 m para vários valores de b_{eq}. (a) $b_{eq} = 0$; (b) $b_{eq} = 1{,}27$ Ns/m; e (c) $b_{eq} = 2{,}54$ Ns/m.

- Valor de b_{eq} pode ser calculado pela eq. (39) utilizando a freqüência e a amplitude média de oscilação da resposta do sistema não linear ⇒ do resultado mostrado na figura pode-se estimar o período de oscilação como sendo igual a 1,6 segundos e a amplitude de oscilação como sendo igual a 0,25 m:

$$b_{eq} = \frac{4\mu N}{\pi x_m \omega} = \frac{4*0{,}1*(2*9{,}8)}{\pi*0{,}25*\left(\dfrac{2\pi}{1{,}6}\right)} \cong 2{,}54 \text{ Ns/m}$$

- Além do valor de 2,54 Ns/m para beq é utilizado também na simulação o valor de 1,27 Ns/m para permitir visualizar a influência desse parâmetro na resposta do sistema.

- **Observações:**
  - Percebe-se que o modelo linearizado sem o termo de atrito viscoso equivalente não representa de forma satisfatória o modelo não linear.
  - Dissipação de energia pela força de atrito no modelo não linear faz com que a amplitude de oscilação da massa diminua com o tempo.
  - No modelo linearizado sem o termo de atrito não ocorre dissipação de energia e, assim, a amplitude da oscilação da massa não diminui.
  - Inclusão do termo de atrito viscoso equivalente dissipa energia ⇒ modelo linearizado passa a ter um comportamento semelhante ao modelo não linear.
  - Troca do atrito seco por um atrito viscoso não é perfeita, mas é satisfatória e consiste numa forma de resolver um problema que de outra forma não seria possível.

9. Exercícios

1) Considere a Equação de Van der Pol que representa um oscilador com amortecimento não-linear.

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - \mu\left[1 - x(t)^2\right]\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = u(t),$$

onde $x(t)$ representa a coordenada de posição, μ é uma grandeza que representa a quantidade de amortecimento presente no sistema e $u(t)$ é o termo forçado ou a entrada do sistema.

Essa equação foi muito utilizada na engenharia elétrica/eletrônica para o estudo de válvulas e na dinâmica dos sistemas não-lineares.

Pede-se:

a) Coloque o sistema na forma de espaço de estados não-linear.

b) Defina uma condição de linearização de forma que seja uma condição de regime permanente. Você tem que escolher uma condição numérica. Utilize $\mu = 0{,}2$.

c) Linearize o sistema utilizando um dos métodos vistos em aula.

d) Calcule as matrizes do sistema linear utilizando os resultados dos itens (b) e (c).

e) Defina uma função no Simulink para descrever a Equação de Van der Pol e do sistema linearizado.

f) Utilizando as ferramentas do Matlab verifique se a condição de linearização definida em (b) está correta.

g) Utilizando as ferramentas do Matlab linearize o sistema em torno da condição de linearização calculada em (b) e (f) e verifique o resultado do item (d).

h) Simule os sistemas não-linear e linear para uma condição inicial igual à condição de linearização e para um degrau na entrada de pequena amplitude e compare os resultados.

i) Simule os sistemas não-linear e linear para uma condição inicial diferente da condição de linearizão e compare os resultados.

2) Considere o sistema composto por um pêndulo invertido sobre um carro, cujo modelo dinâmico é dado abaixo.

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = \omega(t) \\ ml\cos\big(\theta(t)\big)\dot{v}(t) + ml^2\dot{\omega}(t) - mgl\sin\big(\theta(t)\big) = 0 \\ (M+m)\dot{v}(t) + ml\cos\big(\theta(t)\big)\dot{\omega}(t) - ml\sin\big(\theta(t)\big)\omega(t)^2 = f(t) \end{cases}$$

onde θ é a posição angular do pêndulo, ω é a velocidade angular do pêndulo, v é a velocidade do carro, f é a força aplicada no carro, M é a massa do carro, m é a massa do pêndulo e l é o comprimento do pêndulo.

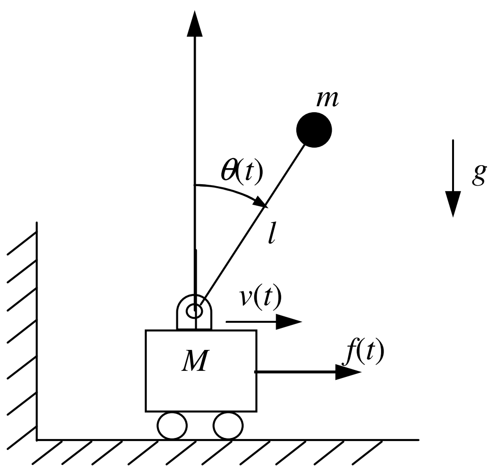


Figura. Esquema do pêndulo invertido sobre o carro.

Pede-se:

a) Determine a condição de linearização onde o pêndulo permanece parado na posição vertical npara cima.

b) Linearize a dinâmica do sistema.

c) Calcule as matrizes do sistema linearizado.

d) Defina uma função no Simulink para descrever a dinâmica do sistema não lienar e do sistema linearizado.

e) Utilizando as ferramentas do Matlab verifique se a condição de linearização definida em (b) está correta.

f) Utilizando as ferramentas do Matlab linearize o sistema em torno da condição de linearização calculada em (b) e (e) e verifique o resultado do item (d).

g) Simule os sistemas não-linear e linear para uma condição inicial igual à condição de linearização e para pequenos degraus na entrada e compare os resultados.

h) Simule os sistemas não-linear e linear para uma condição inicial $\theta_0 = 0,1$ rad e $v_0 = 0$ e compare os resultados.