CAPÍTULO 3 - CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

3.1 Introdução

A definição de função de uma variável independente pode ser dada por: “y= f(x) é uma função de 1 variável, ou seja, é uma função de variável dependente x, se cada valor de x corresponde a apenas 1 valor da variável dependente y.” Dessa maneira, a equação da parábola da Figura 3.1A representa uma função de 1 variável, já a equação do círculo da Figura 3.1B não é uma função de uma variável, pois a cada valor de x correspondem 2 valores distintos de y.

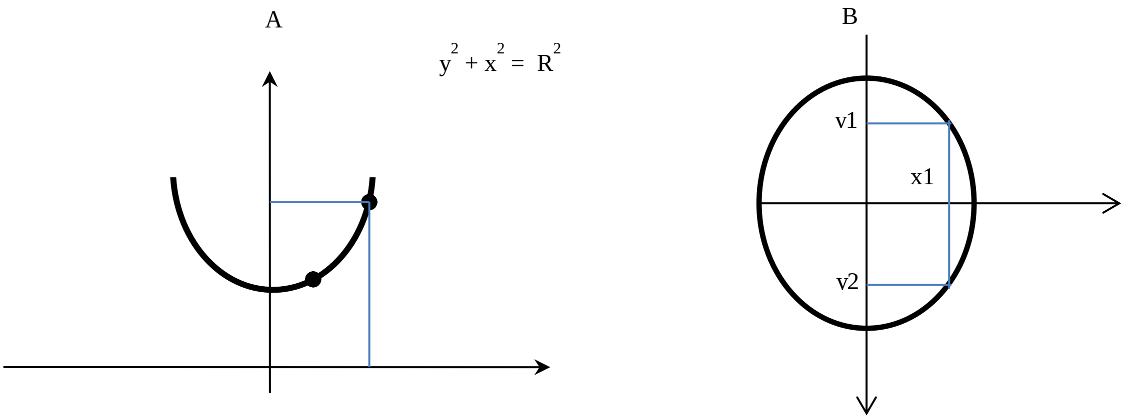


Figura 3.1 Representações gráficas. A) Equação da parábola e B) equação do círculo.

3.1.1 Definição de função de duas variáveis

Sejam *x* e *y* duas variáveis independentes. Se a cada para (*x*, *y*) de certo domínio *D*, corresponde um valor bem determinado da variável *z*, diz-se que *z* é uma função de duas variáveis independentes *x* e *y* no domínio *D*. A variável *z* é denominada variável dependente ou, simplesmente função.

Chama-se domínio de definição de uma função $z = f(x)$, ao conjunto dos pares (*x*, *y*) dos valores de *x* e de *y* para os quais esta função é definida.

3.1.2 Notações:

Para indicar o valor da função em (x, y) são usadas diferentes notações, como:

$z = f(x, y)$, $z = F(x, y)$, $z = g(x, y)$, $z = z(x,y)$, etc.

Quando se usa a notação $z = z(x, y)$, deve-se ficar entendido que, neste caso, z é usado em dois sentidos, isto é, como função e como variável.

3.1.3 Representação gráfica:

Mediante um sistema de coordenadas cartesiano retangular no espaço (Figura 3.2), pose-se dar uma interpretação geométrica à função de duas variáveis. Com efeito, a função

$z = f(x,y)$

faz corresponder a cada par de valores de (x, y) em uma determinada região do plano xoy, um valor de z, de modo que a cada ponto $P(x, y)$ dessa região vem a corresponder um ponto M no espaço. A totalidade destes pontos nos dá uma superfície, que constitui a representação geométrica da função.

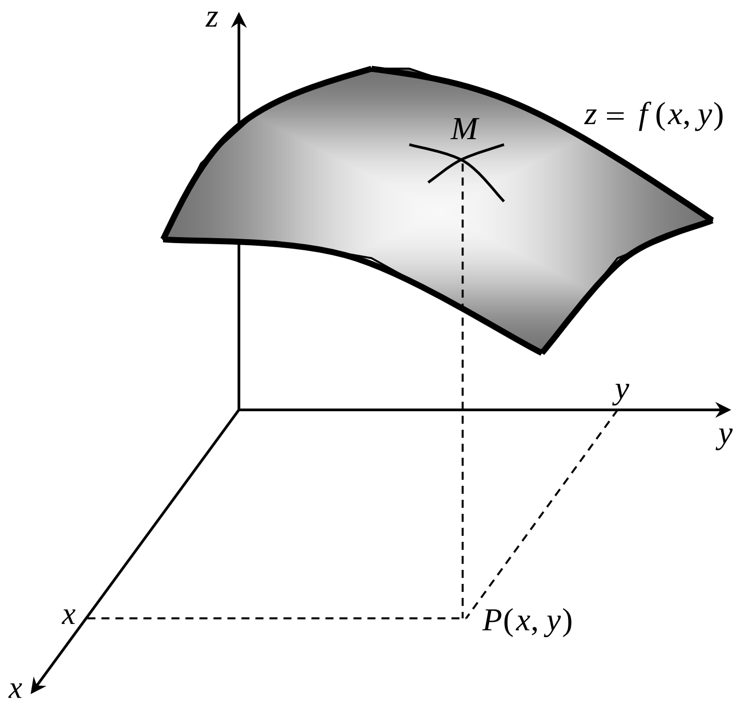


Figura 3.2 - Interpretação geométrica à função de duas variáveis

3.1.4 Funções de três ou mais variáveis

Uma função $z=(x_1, x_2,..., x_n)$ é uma função de n variáveis. Os conceitos anteriores, para funções de duas variáveis, podem ser extendidos facilmente. Assim por exemplo, $W= (x, y, z)$ denota o valor de uma função em (x, y, z).

3.1.5 Continuidade

Uma função $f(x, y)$ é contínua em toda uma região R em que é dada, se for contínua em todos os pontos de R. Ela é contínua num ponto (a, b), se as três condições seguintes forem satisfeitas:

a) $f(a,b)$ exite;

b) $\lim\limits_{x\to a,\ y\to b} f(x,y)$ existe;

c) $\lim\limits_{x\to a,\ y\to b} f(x,y) = f(a,b)$, independentementecomo $x \to a$ e $y \to b$.

3.1.6 Exemplos de funções de várias variáveis

Frequentemente, na prática temos de estudar funções de várias independentes, por exemplo:

- a superfície de um triângulo: $S = b.\ h = f(b, h)$,

- o volume de um cilindro: $V = \pi R^2 h = f(R, h)$,

- a quantidade de calor desprendida por uma resistência elétrica:
  $Q = R I^2 t = f(R, I, t)$,

- a energia total em uma determinada seção de uma tubulação:

$$E = H + \frac{V^2}{2g} + z = f(H, V, Z) \ ,$$

- a vazão de um orifício: $q = K H^x = f(K, H, x)$ em que k depende da área da seção transversal do orifício e do seu coeficiente de descarga,

- a função de produção: $f(x, y) = C x^A y^{1-A}$ denominada função de produção de *Cobb-Douglas.*

Exemplo 3.1

Seja $f(x,y) = x^3 - 2xy + 3y^2$. Calcular $f\left(\frac{1}{x}, \frac{2}{y}\right)$

Solução $\left(\frac{1}{\mathrm{x}}, \frac{2}{y}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2}{y}\right) + 3\left(\frac{2}{y}\right)^2 = \frac{1}{x^3} - \frac{4}{xy} + \frac{12}{y^2}$

Exemplo 3.2

Determinese $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + 2y \ , & (x,y) \neq (1,2) \\ 0 \ , & (x,y) = (1,2) \end{cases}$

a) tem limite quando $x \to 1$ e $y \to 2$

b) é contínua em (1, 2).

Solução:

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} f(x,y) = 1^2 + 2 \,.\, 2 = 5$

b) Como $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} f(x,y) = 5$ e $f(1,2) = 0$, segue-se que

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} f(x,y) \neq f(1,2)$, pelo que a função é descontínua em $(1,2)$.

Exemplo 3.3

Seja $f(x, y) = x\,y$. Mostrar que $f(2 + h, 3) - f(2, 3) = 3\,h$

Solução:

$$f(2+h,3)=(2+h)3=6+3h \qquad \Rightarrow \qquad f(2,3)=2\ .\ 3=6$$

$$f(2+h,\ 3)-f(2,3)=6+3h-6=3h$$

Exemplo 3.4

Uma construção civil retangular de dimensões x, y, z é apresentada na Figura 3.3. Na Tabela 3.1 é fornecida a quantidade de calor perdida por dia por cada lado da construção, medida em unidades de calor por $m^{2.}$ Seja $f(x, y, z)$ a perda total diária de tal construção. Determinar uma equação para $f(x, y, z)$.

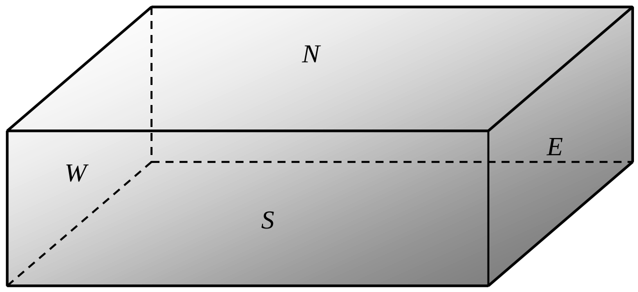


Figura 3.3 - Construção de dimensões x, y, z

Tabela 3.1 Quantidade de calor perdida por dia por cada lado da construção

	Telhado	Lado				Piso
		Este	Oeste	Norte	Sul	
Perda de calor	10	8	6	10	5	1
Área (m^2)	xy	yz	yz	xz	xz	xy

Solução:

A perda de calor é a soma da quantidade total de calor perdido por cada lado da construção:

$$f(x,y,z)=10xy+8yz+6yz+10xz+5xz+1xy=11xy+14yz+15xz$$

3.2 Crescimento parcial e crescimento total de uma função

Consideremos a curva *PS* definida pela interseção da superfície

$$z = f(x, y)$$

com o plano *y* = *constante*, paralela ao plano *oxy*, (Figura 3.4). Sendo *y* constante em todos os pontos deste plano, *z* variará ao longo da curva *PS* somente em função de *x*. Atribuindo à variável independente *x* um crescimento Δx, o crescimento correspondente de *z*, denominado crescimento parcial de *z* em relação a *x*, é definido pela relação:

$$\Delta xz = f(x + \Delta x,\ y) - f(x, y)$$

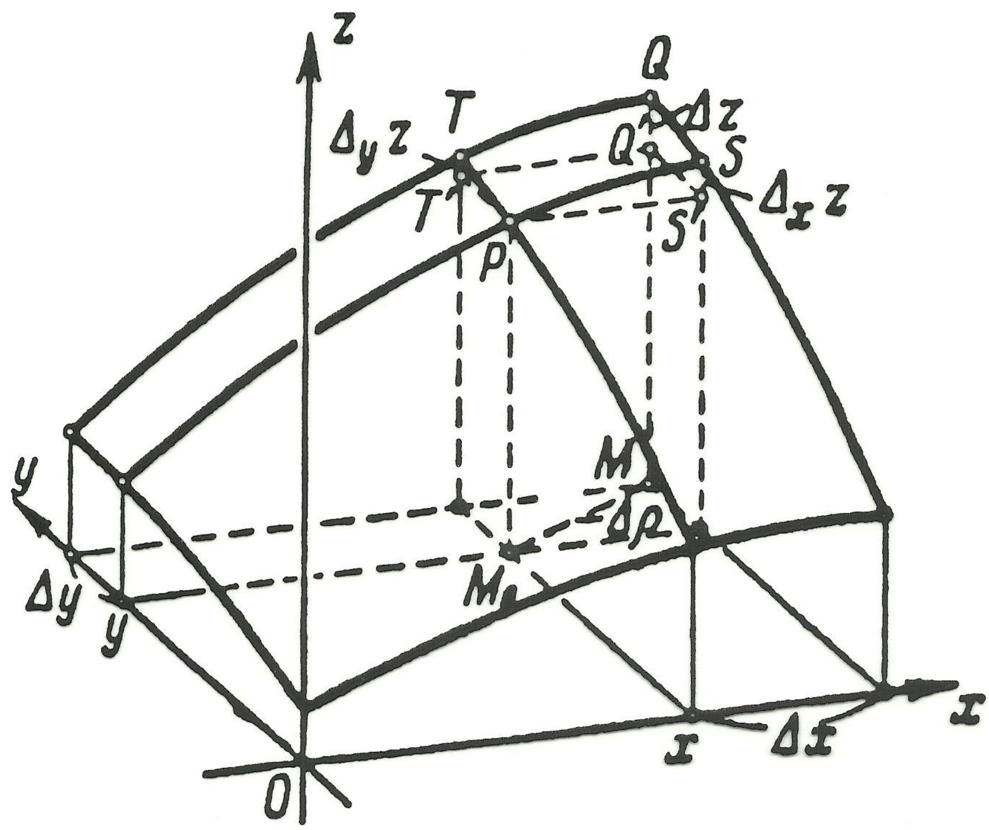


Figura 3.4 – Crescimento parcial e crescimento total

Do mesmo modo, se x é constante e se dá a y um crescimento Δy, o crescimento correspondente de z, denominado crescimento parcial de z em relação a y, é definido pela relação:

$$\Delta yz = f(x,\ y + \Delta y) - f(x, y)$$

Atribuindo, simultaneamente, um crescimento Δx à variável independente x e um crescimento Δy à variável independente y, o crescimento correspondente Δz de z, denominado crescimento total, é definido pela relação:

$$\Delta z = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x, y)$$

Em geral, o crescimento total não é igual à soma dos crescimentos parciais, isto é $\Delta z \neq \Delta xz + \Delta yz$.

Define-se de forma análoga, o crescimento total e os crescimentos parciais para uma função de três variáveis. Seja $u = f(x, y, z)$, então:

$$\Delta xu = f(x + \Delta x,\ y,\ z) - f(x, y, z) \ ;$$
$$\Delta yu = f(x,\ y + \Delta y,\ z) - f(x, y, z) \ ;$$
$$\Delta zu = f(x,\ y,\ \mathrm{z} + \Delta \mathrm{z}) - f(x, y, z) \ ;$$
$$\Delta z = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ \mathrm{z} + \Delta \mathrm{z}) - f(x, y, z) \ .$$

Exemplo 3.5

Seja $z = xy$. Calcular Δxz, Δyz e Δz, para $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 0{,}2$, $\Delta y = 0{,}3$.

Solução:

$$\Delta xz = (x + \Delta x)y - xy = y\ \Delta x = 2\ .\ 0{,}2 = 0{,}4$$
$$\Delta xz = x(y + \Delta y) - xy = x\ \Delta y = 1\ .\ 0{,}3 = 0{,}3$$
$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\ \Delta x + x\ \Delta y + \Delta x \Delta y = 2\,.\,0{,}2 + 1\,.\,0{,}3 + 0{,}2\,.\,0{,}3 = 0{,}76$$

3.3 Derivadas parciais

3.3.1 Definição: Derivadas parciais de primeira ordem

Chama-se derivada parcial de primeira ordem da função $z = f(x, y)$, em relação à x, ao limite do quociente de crescimento parcial Δxy em relação à x e do crescimento Δx da variável x, quando Δx tende para *zero.* Uma das seguintes notações é utilizada:

$$z'x\,; \quad f'x\,; \quad f'x(x,y)\,; \quad \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \frac{\partial f}{\partial x}; \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\ .$$

Logo, por definição,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta xz}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x,\ y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Define-se, do mesmo modo, a derivada parcial da função $z = f(x, y)$, em relação a y, como o limite do quociente do crescimento parcial Δyz em relação a y e do crescimento Δy quando Δy tende para *zero.* Uma das seguintes notações é utilizada:

$$z'y\ ; \quad f'y\ ; \quad f'y(x,y)\ ; \quad \frac{\partial z}{\partial y}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}; \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\ .$$

Assim, por definição,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta yz}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,\ y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Deve-se observar que Δxz é calculado deixando y sem alteração e Δyz deixando x sem alteração. Se y é mantido constante, z é uma função somente de x e a derivada de z com relação à x pode ser calculada. A derivada obtida desse modo é chamada derivada parcial de z em relação à x, representando a taxa de variação de $f(x, y)$ em relação às mudanças na variável x.

Analogamente, se x é mantido constante, z é uma função somente de y e a derivada de z com relação a y pode ser calculada. A derivada assim obtida é chamada derivada parcial de z em relação à y. Define-se, da mesma forma, as derivadas parciais de uma função de um número qualquer de variáveis. Por exemplo, se tivermos uma função u de quatro variáveis x, y, z, t:

$u = f(x, y, z, t)$ então

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, \mathrm{z}, \mathrm{t}) - f(x, y, z, t)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, \mathrm{y}+\Delta y, \mathrm{z}, \mathrm{t}) - f(x, y, z, t)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, \mathrm{z}+\Delta \mathrm{z}, \mathrm{t}) - f(x, y, z, t)}{\Delta \mathrm{z}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x, y, \mathrm{z}, \mathrm{t}+\Delta \mathrm{t}) - f(x, y, z, t)}{\Delta t}$$

Exemplo 3.6

Seja, $f(x,y) = 5x^3y^2$. Cacular $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$

Solução

Inicialmente, trataremos $5y^2$ como uma constante. Assim, $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2(5y^2) = 15x^2y^2$

Agora, considerando $5\,x^3$ como constante, obtém-se $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y(5y^3) = 10x^3y$.

Exemplo 3.7

Seja, $z = xy + \ln \mathrm{x}$ Cacular $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$

Solução

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + \frac{1}{x} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

Exemplo 3.8

Seja, $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 5y$. Calcular

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,4)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,4)$;

b) Interpretar as derivadas parciais de (a)

Solução

Uma derivada parcial de uma função com várias variáveis é também uma função de várias variáveis e, portanto, pode ser calculada para valores específicos dessas variáveis. Escrevemos

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{a},\mathrm{b})$ para $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ calculada no ponto $x = \mathrm{a}$ e $y = \mathrm{b}$. Do mesmo modo,

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{a},\mathrm{b})$ indica a função $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ calculada para $x = \mathrm{a}$ e $y = \mathrm{b}$.

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 6x + 2y$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,4) = 6\,.\,1 + 2\,.\,4 = 14$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x + 5$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,4) = 2\,.\,1 + 5 = 7$

b) Uma vez que $\partial f/\partial x$ é simplesmente uma derivada comum com y constante, $\partial f/\partial x$ fornece a taxa de variação de $f(x, y)$ em relação a x para y mantido constante. Em outras palavras, mantendo y constante e aumentando x por uma unidade, teremos uma variação em $f\ (x,\ y)$ que é aproximadamente dada por $\partial f/\partial x$. Pode-se fazer uma interpretação análoga para $\partial f/\partial y$.

O fato de que $\frac{\partial f}{\partial x}(1,4) = 14$ significa que y é mantido constante e igual a 4, e x pode variar próximo a 1, então $f\ (x,\ y)$ varia a uma taxa igual a 14 vezes a variação de x. Isto é, se x aumenta por uma (1) unidade, então $f\ (x,\ y)$ aumenta por aproximadamente 14 unidade. Se x aumenta por h unidades (h pequeno), então $f\ (x,\ y)$ aumenta aproximadamente 14 h unidades. Isto é, temos:

$$f(1+h,\ 4) - \mathrm{f}(1,4) \approx 14\mathrm{h}$$

Do mesmo modo, o fato de que $\frac{\partial f}{\partial y}(1,4) = 7$ significa que se x é mantido constante e igual a 1 e y varia próximo a 4, então $f\ (x,\ y)$ varia a uma taxa igual a sete vezes a variação de y. Assim, para um pequeno valor de k, temos

$$f(1,\ 4+k) - f(1,4) \approx 7k$$

Podemos generalizar as interpretações de $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ para obter o seguinte fato geral: Seja $f\ (x,\ y)$ uma função de duas variáveis. Então se h e k são pequenos, temos

$$f(a+h,\ b) - f(a,b) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h\ ;$$

$$f(a,\ b+k) - f(a,b) \approx \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k$$

3.3.2 Interpretação geométrica

Seja $z = f\ (x,\ y)$ uma função uniforme das variáveis reais x e y, dada em uma região R do plano. Se a y damos um valor particular, digamos y_0, a função $z= f\ (x,\ y_0)$

resultará uma função unicamente de x. Se $z = f\,(x,\, y_0)$ representa uma superfície S (Figura 3.5), $z = f\,(x,\, y_0)$ representa a curva C, interseção do plano $y = y_0$, paralelo ao plano xoy, com a superfície $z = f\,(x,\, y)$. Particularizando também $x = x_0$, obtemos a curva C_2, representada por $z = f\,(x_0,\, y)$. A interseção das duas curvas dá um ponto P $(x_0,\, y_0,\, z_0)$ da superfície S.

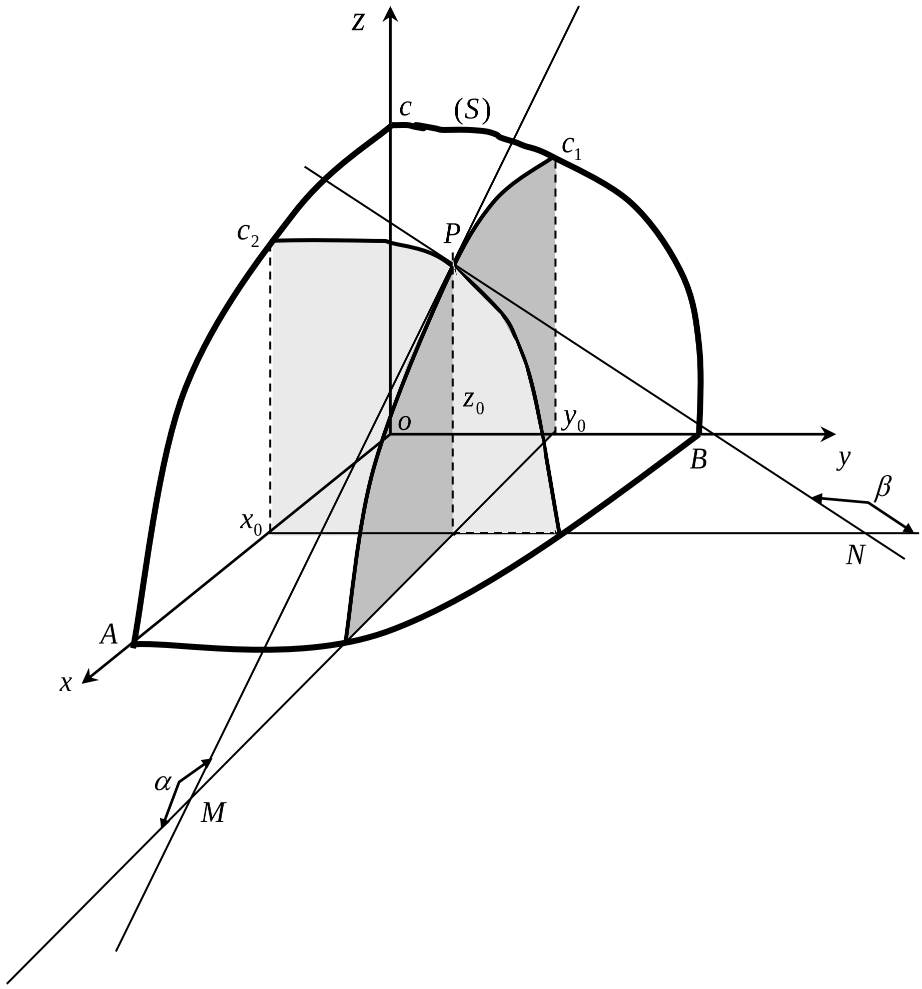


Figura 3.5 - Representação geométrica de uma derivada parcial

Como se observa na Figura 3.5, a derivada parcial $\partial z\,/\partial x$ representa a declividade da tangente PM à curva c_1 no ponto $P(x_0,\, y_0,\, z_0)$, isto é

$$\tan\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(x_0 + \Delta x,\ y_0) - f\,(x_0 + y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}$$

Do mesmo modo, a derivada parcial $\partial z\,/\partial y$ representa o declive da tangente PN à curva c_2 no mesmo ponto:

$$\tan\beta = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0 + y_0)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Exemplo 3.9

Dado o elipsoide $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{6} = 1$ achar o coeficiente angular da curva de interseção do elipsoide

a) com o plano $y = 1$, no ponto onde $x = 4$ e z é positivo;

b) com o plano $x = 2$, no ponto onde $y = 3$ e z é positivo.

Solução

Considerando y como constante,

$$\frac{2}{24}x + \frac{2}{6}z\ \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{4z}$$

Considerando x como constante,

$$\frac{2}{12}y + \frac{2}{6}z\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{2z}$$

a) Quando $y = 1$ e $x = 4$

$$\frac{4^2}{24} + \frac{1^2}{12} + \frac{z^2}{6} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{z} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Logo, $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

b) Quando $x = 2$ e $y = 3$

$$\frac{2^2}{24} + \frac{3^2}{12} + \frac{z^2}{6} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Logo, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3}{2\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{3}{2}\sqrt{2}$

3.3.3 Derivadas de ordem superior

Como as derivada parciais de uma função $z = f(x, y)$ são em geral, funções de x e y, elas podem ser diferenciadas com relação a x ou y. Estas derivadas, se existirem. São denominada derivadas parciais de segunda ordem, e escrevemos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = z_{xx}'' = f_{xx}'' \text{ : derivada parcial de } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ em relação à } x;$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = z_{yy}'' = f_{yy}'' \text{ : derivada parcial de } \frac{\partial z}{\partial y} \text{ em relação à y};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = z_{xy}'' = f_{xy}'' \text{ : derivada parcial de } \frac{\partial z}{\partial y} \text{ em relação à } x;$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = z_{yx}'' = f_{yx}'' \text{ : derivada parcial de } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ em relação à y}$$

Em particular, dizem-se mistas as derivadas parciais

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

calculadas primeiro em y depois em x e vice-versa.

Normalmente, as derivadas parciais mistas possuem a propriedade

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

quando são satisfeitas as condições de continuidade.

De um modo geral, para indicar que uma função $z = f(x, y)$ foi derivada parcialmente n vezes em relação à x e nenhuma vez em relação à y, ou vice-versa, escrevemos

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} = \frac{\partial^n z}{\partial y^n} \ , \quad \text{respectiva mente} \ .$$

Se a função foi derivada n vezes, sendo i vezes em relação a x e depois j vezes em relação a y, $(i + j = n)$, escrevemos

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^i \partial y^j}$$

Exemplo 3.10

Seja, $f(x, y) = x^2 + 3xy + 2y^2$. Calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Solução: Primeiro calculamos $\partial f / \partial x$ e $\partial f / \partial y$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y \ , \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 4y$$

Para calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, diferenciamos $\frac{\partial f}{\partial x}$ em relação a x: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$

Do mesmo modo, para calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, diferencia mos $\frac{\partial f}{\partial y}$ em relação a y: $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$

Do mesmo modo, para calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, diferencia mos $\frac{\partial f}{\partial y}$ em relação a x: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3$

Para calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, diferencia mos $\frac{\partial f}{\partial x}$ em relação a y: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3$

Exemplo 3.11

Seja, $z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$. Calcular $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

Solução:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}\,(2x) = 3x(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{3}{2}x\ (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}\ (2y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}\,(2y) = 3y(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{3}{2}y\ (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}\ (2x)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 3xy\,(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Exemplo 3.12

Se $u = Ax^4 + Bx^3y + Cx^2y^2 + Dxy^3 + Ey^4$, determine $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$ e $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}$.

Solução:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4Ax^3 + 3Bx^2y + 2Cxy^2 + Dy^3$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12Ax^2 + 6Bxy + 2Cy^2$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 24Ax + 6By$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 6Bx + 4Cy$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Bx^3 + 2Cx^2y + 3Dxy^2 + 4Ey^3$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2Cx^2 + 6Dxy + 12Ey^2$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 4Cx + 6Dy$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 6Dx + 24Ey$$

3.4 Aplicações das derivadas parciais na economia

3.4.1 Custo marginal

Custo marginal, a qualquer nível q de produção, é o custo extra da produção de uma unidade extra a mais (ou menos) de q. Por exemplo, se para produzir 400 unidades de um dado produto o custo é 16.000 unidades monetárias e para produzir 401 unidades desse mesmo produto o custo é 16.045 unidades monetárias, o custo marginal é 45 unidades monetárias.

Se a função de custo para produzir as quantidades x e y de dois bens é dada por $C = Q\ (x, y)$, então as derivadas parciais de C são as funções de custo marginal:

$$\frac{\partial C}{\partial x} \text{ é o custo marginal com relação a } x\text{;}$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} \text{ é o custo marginal com relação a } y$$

Exemplo 3.13

Se a função de custo para produzir as quantidades x e y de dois bens é $C = x \ln (5 + y)$, determinar os custos marginais com relação a x e y.

Solução

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \ln(5 + y) \text{ é o custo marginal com relação a } x\text{;}$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\mathrm{x}}{5 + \mathrm{y}} \text{ é o custo marginal com relação a } y\text{.}$$

Exemplo 3.14

Se a função de custo para produzir as quantidades *x* e *y* de dois bens é $c = 15 + 2x^2 + xy + 5y^{2,}$ determinar os custos marginais com relação a *x* e *y*. Se *y* é mantido constante em 6 e $x = 3$, a produção de uma unidade adicional de *x* acrescenta quantas unidades monetárias no custo total? Se *x* é mantido constante em 3 e $y = 6$, a produção de uma unidade adicional de *y* acrescenta quantos cruzados ao custo total?

Solução:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 4x + y \text{ é o custo marginal com relação a } x;$$
$$\frac{\partial C}{\partial y} = x + 10y \text{ é o custo marginal com relação a } y$$

Se $y = 6$ e $x = 3$, a produção de uma unidade adicional de *x* acrescenta

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 4x + y = 4.3 + 6 = 18 \text{ unidades monetárias no custo total.}$$

Se $y = 6$ e $x = 3$, a produção de uma unidade adicional de y acrescenta

$$\frac{\partial C}{\partial y} = x + 10y = 3 + 10.6 = 63 \text{ unidades monetárias no custo total.}$$

3.4.2 Funções de produção

Função de produção é a relação técnica que indica a quantidade de produto capaz de ser obtida com todo e qualquer conjunto de fatores específicos (ou fatores de produção). É definida para um determinado estado de conhecimento técnico.

Se a função de produção é dada por $z = f(x, y)$, então a derivada parcial de *z* com relação a *x* (com *y* mantido constante) é a produtividade marginal de *x* ou o produto marginal de *x*. A derivada parcial de *z* com relação a *y* (com *x* mantido constante) é a produtividade marginal de *y* ou o produto marginal de *y*. Observe que é igual à taxa de aumento do produto total quando este insumo aumenta, supondo-se que a quantidade do outro insumo é mantida constante.

Exemplo 3.15

Considere a função de produção $f(x, y) = 60\, x^{3/4}\, y^{1/4}$, que fornece o número de unidades de mercadorias produzidas quando se utilizam x unidades de trabalho e y unidades de capital.

a) Calcular o aumento do número de mercadorias quando se aumenta 1 unidade de trabalho e ou 1 de capital para x = 81 e y= 16

b) Produtividade marginal de trabalho e de capital para x = 81 e y= 16

c) interpretar os números calculados em (b).

Solução

(a) $\mathrm{f}(81{,}16) = 60 \cdot 81^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} = 3.240\ unidades$

$incremento\ de\ 1\ unidade\ de\ x \rightarrow \mathrm{f}(82{,}16) = 60 \cdot 82^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} = 3.269{,}95\ unidades$

$\Delta xz = 29{,}65\, unidades$

$incremento\ de\ 1\ unidade\ de\ y \rightarrow \mathrm{f}(81{,}17) = 60 \cdot 81^{\frac{3}{4}} \cdot 17^{\frac{1}{4}} = 3.289{,}48\ unidades$

$\Delta yz = 48{,}48\, unidades$

(b) $$\frac{\partial f}{\partial x} = 60 \,.\, \frac{3}{4}\, x^{-\frac{1}{4}} \,.\, y^{\frac{1}{4}} = 45\, x^{-\frac{1}{4}} \,.\, y^{\frac{1}{4}} = 45 \frac{y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(81{,}16) = 30\, unidades$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 60 \,.\, \frac{1}{4}\, x^{\frac{3}{4}} \,.\, y^{-\frac{3}{4}} = 15\, x^{\frac{3}{4}} \,.\, y^{-\frac{3}{4}} = 15 \frac{x^{\frac{3}{4}}}{y^{\frac{3}{4}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(81{,}16) = 50{,}625\, unidades$$

c) As quantidades $\partial f / \partial x$ e $\partial f / \partial y$ são denominadas produtividade marginal de trabalho e produtividade marginal de capital. Se a quantidade de capital é fixada em y = 16 e a quantidade de trabalho aumenta de uma unidade, então a quantidade de mercadoria produzida aumentará de aproximadamente 30 unidades. Do mesmo modo, um aumento de capital de 1 unidade (com trabalho fixado em 81) resulta em um aumento no produção de aproximadamente 50,625 unidade de mercadoria.

3.5 Diferencial total

3.5.1 Incremento total

Seja $z = f(x, y)$ uma função dada em uma região R do plano xoy, e suponhamos que são derivadas parciais $f_x'(x, y)$ e $f_y'(x, y)$ existam e sejam contínuas em todo o entorno $U(P)$ de um ponto $P(x, y)$ de R. Atribuamos a x e y os incrementos Δx e Δy respectivamente, de modo que o ponto $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ esteja ainda em $U(P)$ (onde por hipótese, as derivadas parciais $f'x$ e $f'y$ são contínuas). A função $z = f(x, y)$ sofrerá um incremento.

$$\Delta z = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x, y)$$ que se diz o seu incremento total

3.5.2 Diferencial total

A diferencial total de uma função $z = f(x, y)$, pode ser obtida, aproximadamente, pela expressão:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

Chamam-se diferenciais das variáveis independentes x e y e designa-se, respectivamente por dx e dy aos incrementos Δx e Δy das variáveis x e y. Assim, fazendo $\Delta x \approx dx$ e $\Delta y \approx dy$, tem-se a solução exata:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Por extensão, a diferencial total de uma função $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é a soma de suas diferenciais parciais, isto é:

$$dz = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_i$$

Se, por sua vez, as variáveis x_i são funções diferenciáveis de outra variável, digamos t, então

$$dx_i = \frac{dx_i}{dt} dt$$

e se os x_i são funções diferenciáveis de duas variáveis, digamos r e s, então

$$dx_i = \frac{dx_i}{dr} dr + \frac{dx_i}{ds} ds$$

Exemplo 3.16

Calcular o incremento total e a diferencial total da função $z = x\,y$ no ponto (2; 3), se $\Delta x = 0{,}1$ e $\Delta y = 0{,}2$.

Solução

$$\Delta z = (x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$$
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = y dx + x dy \approx y\Delta x + x\Delta y$$

Por conseguinte,

$$\Delta z = 3\,.\,0{,}1\ +\ 2\,.\,0{,}2\ +\ 0{,}1\,.\,0{,}2 = 0{,}72$$
$$\mathrm{dz} = 3\,.\,0{,}1\ +\ 2\,.\,0{,}2 = 0{,}7$$

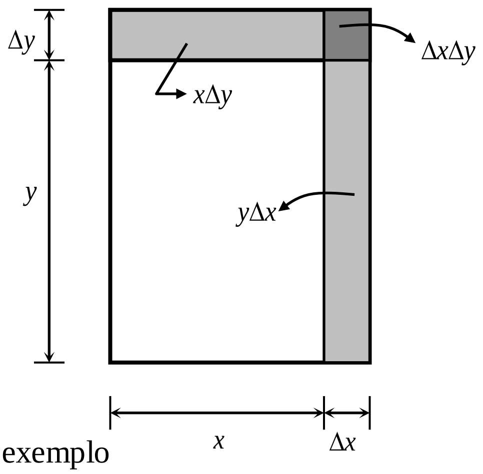


Figura 3.6 Ilustração do exemplo

Portanto, $\Delta z - dz = 0{,}72 - 0{,}70 = 0{,}02 = 2{,}777\ \%$ de Δz.

3.5.3 Aplicação da diferencial total para cálculos aproximados

Seja $z = f\,(x,\ y)$ uma função diferencial no ponto $(x,\ y)$. Calculemos o incremento total desta função

$$\Delta z = f\,(x+\Delta x,\ \ y+\Delta y) - f\,(x,y)\,,\ \text{donde}\ \ f\,(x+\Delta x,\ \ y+\Delta y) = f\,(x,y) + \Delta z$$

Fazendo $\Delta z \approx dz$, temos:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x \ + \ \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

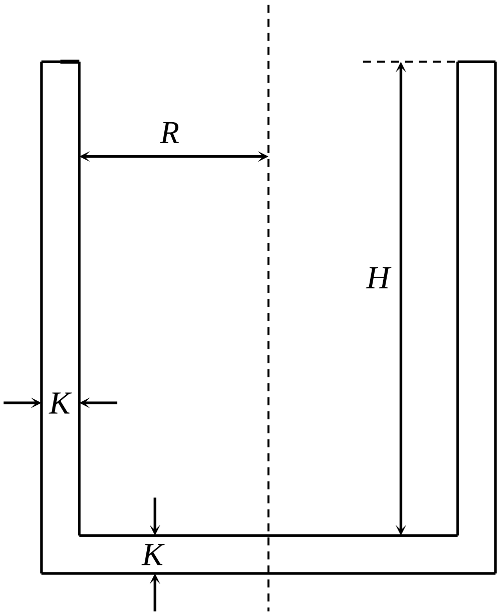
Substituindo na equação (1) Δz pela expressão explícita de *dz,* tem-se a equação aproximada:

$$f\,(x+\Delta x,\ \ \mathrm{y}+\Delta y) \approx f\,(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Delta y$$

sendo o erro cometido, um infinitamente pequeno de ordem superior em relação a Δx e Δy.

Exemplo 3.17

Calcular o volume de material utilizado para a fabricação de um cilindro, cujas dimensões são:



$R =$ raio interno do cilindro $= 4$ cm;
$H =$ altura interna do cilindro $= 20$ cm;
$K =$ espessura das paredes $= 0{,}1$ cm.

Solução

a) Solução exata – O volume procurado V é igual à diferença dos volumes dos cilindros externo e interno, sendo o raio do cilindro externo igual a $R + K$ e a altura igual a $H + K$. Então, tem-se:

$$V = \pi\,(R+K)^2\,(H+K) - \pi\,R^2 H \quad \text{ou}$$
$$V = \pi\,(2\,RHK + R^2K + HK^2 + 2RK^2 + K^3)$$
$$V = \pi\,(2\,.\,4\,.\;20\,.\,0{,}1 + 4^2\,.\,0{,}1 + 20\,.\,0{,}1^2 + 2\,.\,4\,.\,0{,}1^2 + 0{,}1^3) = 17{,}881\pi$$

b) Solução aproximada – Designemos por f o volume do cilindro interno. Então, $f = \pi R^2 H$. Onde f é uma função de duas variáveis R e H. Somando K a R e a H, a função f sofre um acréscimo correspondente Δf ; este acrescimento será o volume procurado, isto é

$$V = \Delta f \qquad \text{ou} \qquad V = df\,.$$

Então, $$V \approx \frac{\partial f}{\partial R}\,\Delta R + \frac{\partial f}{\partial H}\,\Delta H\,.$$

Como, $$\frac{\partial f}{\partial R} = 2\,\pi\,RH \;,\qquad \frac{\partial f}{\partial H} = \pi\,R^2 \quad \text{e} \quad \Delta R = \Delta H = K \;,$$

temos, $$V \approx \pi\,(2RHK + R^2K)$$
$$V \approx \pi\,(2\,.\,4\,.\,20\,.\,0{,}1 + 4^2\,.\,0{,}1) = 17{,}6\,\pi\,.$$

Comparando as soluções exatas e aproximadas, verificamos que elas diferem pela quantidade $\pi\,(H K^2 + 2\,R\,K^2 + K^2)$, composta unicamente de termos que contém K ao quadrado e ao cubo. O erro contido é inferior a $0{,}3\,\pi$, ou seja, $100.\dfrac{0{,}3.\pi}{17{,}881\pi}\,\%$, isto é, menos de 2 % da quantidade medida.

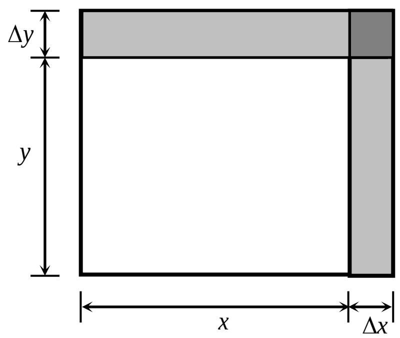
3.5.4 Emprego da diferencial para avaliar o erro cometido durante os cálculos numéricos

Se uma grandeza física é função de duas (ou mais) outras, podemos avaliar a primeira medindo estas últimas.

Como não existem medições que se possam considerar exatas, importa saber como se propagam sobre a grandeza dependente, os erros cometidos ou admissíveis ao medir as grandezas independentes. Suponhamos, por exemplo, que se trate de avaliar a área *A* de um retângulo de dimensões *x* e *y*, medindo os seus lados. A área é

A = x y.

Se admitirmos um erro possível Δx na medição de *x* e um erro Δy na medição de *y*, o erro cometido na avaliação da área será



$$\Delta A = (x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy$$
$$\Delta A = xy + y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\,\Delta y - xy$$
$$\Delta A = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\,\Delta y$$

Em comparação com os erros Δx e Δy, o produto $\Delta x\,\Delta y$ pode ser desprezado como insignificante, pois se Δx e Δy forem da ordem de 0,01, o seu produto $\Delta x \Delta y$ será da ordem de 0,0001. Assim,

$$\Delta A = y\Delta x + x\Delta y$$

Mas, esta relação é precisamente a diferencial da função *A*, visto que

$$\frac{\partial A}{\partial x} = y \quad \text{e} \quad \frac{\partial A}{\partial y} = x\,;$$

donde,

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy\ .$$

Dessa forma, o erro cometido na avaliação da área A é a diferencial da função $A = xy$.

Generalizando, seja $U = f(x, y, z, ..., t)$ uma função de várias variáveis $x, y, z, ..., t$. Suponhamos que a avaliação dos valores numéricos das quantidades $x, y, z, ..., t$ é feita com um certo erro (respectivamente $dx, dy, dz, ..., dt$). O valor de u será determinado com erro du, devido ao erro de avaliação das variáveis independentes. Propomo-nos determinar o erro du, se se supõem conhecidos os erros $dx, dy, dz, ..., dt$. Assim,

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + ... + \frac{\partial f}{\partial t}dt.$$

As derivadas parciais e os erros relativos às variáveis independentes são ou positivos ou negativos. Designando-se por $|dx|$, $|dy|$, $|dz|$, ... , $|dt|$ os erros absolutos máximos das variáveis correspondentes (os limites dos valores absolutos dos erros), tem-se

$$|du| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right||dx| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right||dy| + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right||dz| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right||dt|$$

O erro relativo máximo da grandeza avaliada é a razão entre o erro absoluto máximo e o valor absoluto da grandeza medida. Assim, para avaliar o erro relativo máximo da função u, dividimos todos aos membros da equação (4.11) por $u = f(x, y, z, ..., t)$:

$$Er = \frac{|du|}{|u|} = \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f}\right||dx| + \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f}\right||dy| + \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{f}\right||dz| + \cdots + \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{f}\right||dt|$$

onde,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f} = \frac{\partial}{\partial x}\log|f|; \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f} = \frac{\partial}{\partial y}\log|f|; \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{f} = \frac{\partial}{\partial z}\log|f|; \quad \cdots\cdots ; \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{f} = \frac{\partial}{\partial t}\log|f|$$

Exemplo 3.18

Foram medidos o *lado a* e a *hipotenusa c* de um triângulo retângulo com erros absolutos máximos $|dc| = 0{,}2$ e $|dy| = 0{,}1$. Tendo-se medido $c = 75$ e $a = 32$, determine o ângulo α pela fórmula $\text{sen}\alpha = a/c$ e o erro máximo absoluto $|d\alpha|$ cometido ao se calcular este ângulo.

Solução

$$\text{sen}\alpha = \frac{a}{c}, \quad \alpha = \text{arcsen}\frac{a}{c} \quad , \quad \text{portanto}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial a} = \frac{1}{\sqrt{c^2 + a^2}} \quad , \quad \frac{\partial \alpha}{\partial c} = -\frac{a}{c\sqrt{c^2 + a^2}}$$

Utilizando a equação (18), temos:

$$|d\alpha| = \frac{1}{\sqrt{(75)^2 - (32)^2}} \cdot 0{,}1 + \frac{32}{75\sqrt{(75)^2 - (32)^2}} \cdot 0{,}2 = 0{,}00275 \text{ radianos} = 9'38''$$

$$\text{Logo,} \quad \alpha = \text{arcsen}\frac{32}{75} \pm 9'38''$$

Exemplo 3.19

Suponhamos que se trate de determinar g pela fórmula do pêndulo simples

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

medindo l e T. Seja l = 100 cm com um erro admissível de 0,05 cm e T = 2 s com um erro admissível de 0,01 s. Determinar o erro cometido na determinação de g.

Solução: Resolvendo em g a fórmula do pêndulo, vem

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

e diferenciando em relação as variáveis l e T temos o erro absoluto máximo:

$$|dg| = \left|\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{4\pi^2 l}{T^2}\right)\right||dl| + \left|\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{4\pi^2 l}{T^2}\right)\right||dT| \;\Rightarrow\; \left|\frac{4\pi^2}{T^2}\right||dl| + \left|-\frac{8\pi^2 l}{T^3}\right||dT|$$

Para T = 2, l = 100, dT = ± 0,1 e dl = ± 0,05 pode-se calcular o erro absoluto máximo $|dg|$:

$$|dg| = \frac{4\pi^2}{4}\cdot 0{,}05 + \frac{8\pi^2}{8}\cdot 100(0{,}01) = 10{,}36 \text{ cm.s}^{-2}$$

O erro relativo máximo será:

$$E_r = \frac{|dg|}{|g|} \qquad E_r = \frac{\left|\frac{4\pi^2}{T^2}\right||dl|}{\left|\frac{4\pi^2 l}{T^2}\right|} + \frac{\left|-\frac{8\pi^2 l}{T^3}\right||dT|}{\left|\frac{4\pi^2 l}{T^2}\right|}$$

$$E_r = \frac{|dl|}{|\,l\,|} + \frac{2}{|\,T\,|}|dT| = \frac{0{,}05}{100} + \frac{2\,.\,0{,}01}{2} = 0{,}0105$$

O erro porcentual correspondente será E_p = 100 e E_r – 1,05 %

3.6 Derivada de uma função composta (derivada total)

3.6.1 Funções compostas de uma variável independente

Seja $z = f(x, y)$ uma função diferenciável em uma região R do plano. Se x e y, por sua vez não são independentes, sendo funções de uma mesma variável independente t, precisamente,

$$x = \phi(t) \quad \text{e} \quad y = \psi(t)$$

de modo que a cada valor de t em certo intervalo (a, b), corresponda um ponto (x, y) de R, z passará a ser função de t através de x e y, e se dirá uma função composta de t. Geometricamente,

$$x = \phi(t) \quad \text{e} \quad y = \psi(t)$$

faz corresponder uma cota determinada z a cada ponto da referida curva. Em muitos casos, é fácil exprimir diretamente z como função de t :

$$z = f(x, y) = f\left[\phi(t), \psi(t)\right] = F(t)$$

- **Derivação**

Suponhamos que as derivadas parciais de $\phi(t)$, $\Psi(t)$ e $F(t)$ são contínuas com relação ao seu argumento. Como $z = f(x, y)$ e diferenciável por hipótese, podemos escrever

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

que é a derivada total de z em função t, através das variáveis intermediárias x e y.

Do mesmo modo, tratam-se os casos de três ou mais variáveis intermediárias. Se $u = f(x, y, z)$ e $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$,

então,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Analogamente, se $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ e $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$,..., $x_n = x_n(t)$, tem-se:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

Exemplo 3.20

Seja, $z = 3x^2 + 5y^2 - 4xy$ e $x = \tan 2t$, $y = \text{sen}^2 t$. Achar $\dfrac{dz}{dt}$.

Solução

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x - 4y \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 10y - 4x \ ;$$

$$\frac{dx}{dt} = 2\sec^2 2t \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = 2sent.\cos t = sen2t$$

$$\frac{dz}{dt} = (6x - 4y)\,2\sec^2 2t + (10y - 4x)sen2t$$

$$\frac{dz}{dt} = 4(3x - 2y)\sec^2 2t + 2(5y - 2x)sen2t$$

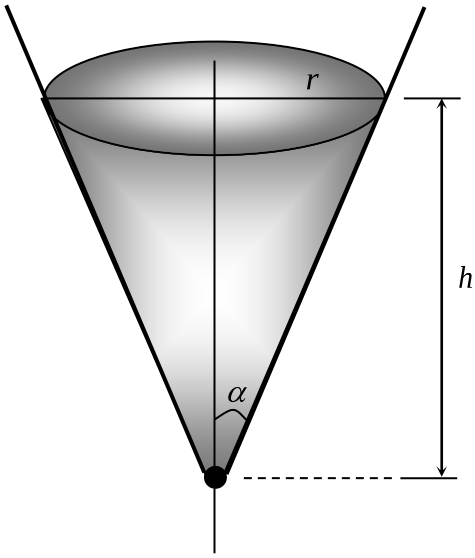
Se necessário, pode-se expressar dz/dt unicamente em função da variável independente t.

Exemplo 3.21

De um funil cônico escoa água à razão de $18\pi\,\text{cm}^3\,\text{s}^{-1.}$ Sabendo-se que a geratriz faz com a parede do cone um ângulo $\alpha = 30^{\text{o}}$, achar a velocidade com que baixa o nível da água no funil, no momento em que o raio da base do volume líquido é igual a 6 cm.

Solução

Seja r o raio da base do volume líquido e h a sua altura. O seu volume será:



$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

Aqui, V é uma função de r e h, os quais, por sua vez, são funções do tempo t. A derivada total de V em função de t, através de r e h, será:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2}{3}\pi\, r\, h\,; \qquad \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{1}{3}\pi\, r^2\,.$$

Assim,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2}{3}\pi\, r\, h\frac{dr}{dt} + \frac{1}{3}\pi\, r^2\,\frac{dh}{dt} \qquad \text{ou} \qquad \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}\left(2rh\frac{dr}{dt} + r^2\,\frac{dh}{dt}\right)$$

A variável independente t representa um tempo; as derivadas das grandezas V, r e h em relação a t, representam a velocidade de variação das referidas grandezas. Em paticular, dV/dt representa a velocidade com que diminui o volume de água, isto é, a razão de escoamento (vazão), que no caso e dada,

$$\frac{dV}{dt} = 18\pi \text{ cm}^3\text{s}^{-1}$$

Trata-se de determinar dh/dt (velocidade com que baixa o nível h) quando r = 6 cm. Conhecida a relação entre r e h, vamos eliminar h e dr/dt em dV/dt, porque não importa conhecer seus valores.

Sabe-se que, $\tan\alpha = \dfrac{r}{h}$ ou $r = h \tan\alpha$ e $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{dh}{dt}\tan\alpha$

Mas,

$$\alpha = 30^\circ \quad \text{e} \quad \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}; \text{ donde,}$$

$$r = h\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ou} \quad h = \frac{3r}{\sqrt{3}} = r\sqrt{3}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{dh}{dt}.$$

Assim,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}(2\,r\,r\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{dh}{dt} + r^2\frac{dh}{dt})$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}(2\,r^2\frac{dh}{dt} + r^2\frac{dh}{dt}) = \frac{\pi}{3}3\,r^3\frac{dh}{dt} = \pi\,\mathrm{r}^2\frac{dh}{dt}$$

como $\dfrac{dV}{dt} = 18\pi$,

tem-se, $18\pi = \pi\,\mathrm{r}^2\dfrac{dh}{dt}$ e $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{18\pi}{6^2\,\pi} = \dfrac{1}{2}$ cm s^{-1}

3.6.2 Funções compostas de várias variáveis independentes

Suponhamos que seja dada a função $z = f(x, y)$ e que x e y sejam funções deriváveis de duas variáveis independentes t e s ;

$$x = \varphi(t, s) \quad \text{e} \quad y = \psi(t, s).$$

Neste caso, z é uma função composta das variáveis t e s. Por conseguinte, podemos expressar z diretamente como uma função de t e s :

$$z = f[\varphi(t, s), \psi(t, s)] = F(t, s),$$

e podemos escrever

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

Devemos observar que, neste caso, as derivada de z, x e y deve ser calculadas em t e em s e, portanto, são derivadas parciais uma vez que há duas variáveis independentes.

- **Generalização**

As equações acima são facilmente generalizadas para um número maior de variáveis. Suponhamos dada uma função diferenciável de n variáveis $x_1, x_2, x_3,..., x_n$:

$$y = f(x_1, x_2, x_3,..., x_n)$$

e estas, por sua vez, funções deriváveis de m variáveis independentes t_1, t_2, t_3, ..., t_m ; então

$x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, t_3,..., t_m)$

$x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, t_3,..., t_m)$

....

....

$x_n = \varphi_n(t_1, t_2, t_3,..., t_m)$

As derivadas parciais da função y em relação às variáveis independentes t_1, t_2, t_3, ..., t_m, através das variáveis intermediárias x_1, x_2, x_3,..., x_n, assumem a forma:

$$\frac{\partial y}{\partial t_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1}$$

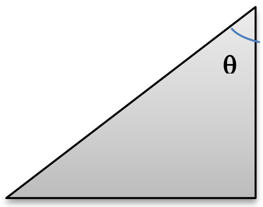
$$\frac{\partial y}{\partial t_2} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_2})$$

… …

$$\frac{\partial y}{\partial t_m} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_m} + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m}$$

Exemplo 3.22

Em um dado instante, o comprimento de um cateto de um triangulo é de 10 cm e cresce a uma taxa de 1cm/minuto. Enquanto isso o comprimento do outro cateto é de 12 cm e decresce a uma taxa de 2cm/minuto. Encontre a taxa de variação da medida do ângulo oposto ao cateto de 12 cm de comprimento no instante dado.



Solução

No instante x = 12 e y = 10 → $tg\ \theta = \frac{x}{y}$ e $\theta = arctg\left(\frac{x}{y}\right)$

$$\theta = \theta(x,y) \Rightarrow \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \quad \Rightarrow \theta = \theta(t)$$

Dessa maneira:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Sendo:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}.y = \frac{1}{y+\frac{x^2}{y}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}.\frac{-x}{y^2} = \frac{-x}{y^2+x^2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{y+\frac{x^2}{y}}.(-2) + \frac{-x}{y^2+x^2}.1 = \frac{1}{10+\frac{12^2}{10}}.(-2) + \frac{-12}{10^2+12^2}.1 =$$

$\frac{d\theta}{dt} =$ -0,131 radianos/minuto

3.7 Derivação de funções implícitas

3.7.1 Equação e funções implícitas

Seja f (x, y) uma função definida numa região R do plano xoy. Se igualarmos essa função a zero, obtemos uma equação

$$f(x, y) = 0$$

que estabelece um vínculo entre as duas variáveis *x* e *y*, de modo que os valores de uma vêm a depender de certa forma dos valores da outra. Quando a equação é apta a definir *y* como função de *x* em uma certa região do plano, de modo que a cada valor de *x* em um dado intervalo, venha a corresponder um e somente um valor de *y*, dizemos que ela define implicitamente *y* como função de *x* na região referida.

Seja (S) uma superfície (Figura 3.7) que representa geometricamente a função $z = f(x, y)$. A equação $f(x, y) = 0$ nos dá a totalidade dos pontos de cota $z = 0$, isto é, a curva AB, interseção da superfície (S) com o plano *xoy*.

Se $z = ax + by + c$ ou $f(x, y) = ax + by + c$ representa um plano e se fizermos $z = 0$, vem:

$$ax + by + c = 0$$

que representa uma reta no plano *xoy*, interseção do plano dado com o plano *xoy*. A equação

$$ax + by + c = 0$$

define implicitamente *y* como função de *x* em todo o plano cartesiano.

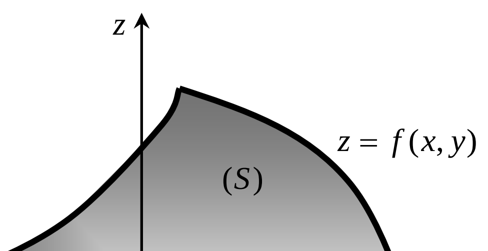


Figura 3.7 - Representação geométrica da superfície de uma função $z = f\,(x, y)$

3.7.2 Derivada de funções implícitas

Seja y uma função contínua de x, definida implicitamente pela equação

$$f\,(x, y) = 0$$

donde $f\,(x, y)$, $f'_x(x, y)$ e $f'_y(x, y)$ são funções contínuas em certo domínio D. Para fins de derivação, seja

$$z = f\,(x, y)\ ,$$

então:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}$$

Mas se $f(x, y) = 0$, então $z = 0,\ \frac{\partial z}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0$

Portanto,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

De modo semelhante, a equação $F(x, y, z) = 0$

define z como função implícita das duas variáveis independentes x e y. Para achar as derivadas parciais de z em relação a x e a y, procedemos como segue:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Exemplo 3.23

Dado $x^2 y^4$ + sen y = 0, achar dy/dx

Solução

Seja $f(x, y) = x^2 y^4 + \operatorname{sen} y$

Então, $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^4 \ , \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2 y^3 + \cos y$$

Portanto, $$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^4}{4x^2 y^3 + \cos y}$$

Exemplo 3.23

Pela equação

$$\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{6} - 1 = 0$$

z é definida como uma função implícita de x e y. Achar as derivadas parciais desta função.

Solução

$$F = \frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{6} - 1$$

Logo, $$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x}{12} \ , \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{y}{6} \ , \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{z}{3}$$

Assim, $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{4z} \ , \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{2z} \ .$$

Exemplo 3.24

Se uma função de produção é dada por

$z^2 + 4\,x^2 + 5\,y^2 - 12\,x\,y = 0$

onde z é a quantidade de produção final e x e y são as quantidades dos insumos, ache as produtividades marginais.

Solução

$$F = z^2 + 4\,x^2 + 5\,y^2 - 12\,x\,y$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 8x - 12y \ , \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 10y - 12x \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z$$

A produtividade marginal de x é

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{6y - 4x}{z}$$

e a produtividade marginal de y é

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{6y - 5x}{z} \ .$$

EXERCICIOS PROPOSTOS – LISTA 3A

1 – Calcule as derivadas parciais utilizando as regras ordinárias de derivação

a) $f(x,y)=4y^3+\sqrt{x^2+y^2}$

b) $f(\theta,\alpha)=sen3\theta.\cos2\alpha$

c) $z=f(x,y)=e^{\frac{y}{x}}.\ln\left(\frac{x^2}{y}\right)$

d) $f(x,y,z)=e^{x.y.z}+arctg\left(\frac{3.x.y}{z^2}\right)$

e) $u=f(x,y,z)=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Respostas:

a) $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial f}{\partial y}=12y^2+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

b) $\frac{\partial f}{\partial \theta}=3\cos3\theta.\cos2\alpha$; $\frac{\partial f}{\partial \alpha}=-2sen3\theta.sen2\alpha$

c) $\frac{\partial z}{\partial x}=-e^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{y}{x^2}\cdot\ln\left(\frac{x^2}{y}\right)+\frac{2e^{\frac{y}{x}}}{x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=+e^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{x^2}{y}\right)-\frac{e^{\frac{y}{x}}}{y}$

d) $\frac{\partial f}{\partial x}=+e^{xyz}\cdot y\cdot z+\frac{1}{1+\left(\frac{3xy}{z^2}\right)^2}\cdot\frac{3y}{z^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y}=+e^{xyz}\cdot x\cdot z+\frac{1}{1+\left(\frac{3xy}{z^2}\right)^2}\cdot\frac{3x}{z^2}$;

$\frac{\partial f}{\partial z}=+e^{xyz}\cdot x\cdot y-\frac{6xy}{z^3+\left(\frac{3xy}{z^2}\right)^2\cdot z^3}$

e) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{-z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

2 – Encontrar $\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial f}{\partial y}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

a) $f(x, y) = \frac{x^2}{y} - \frac{y}{x^2}$

b) $f(x, y) = e^{2x} \cdot sen\, y$

c) $f(x, y) = 4x \cdot senh\, y + 3y \cdot \cosh x$

Respostas:

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y} + \frac{2y}{x^3}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x^2}{y^2} - \frac{1}{x^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{y} - \frac{6y}{x^4}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{y^3}$;
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-2x}{y} + \frac{2}{x^3}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-2x}{y} + \frac{2}{x^3}$

b) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{2x}\, sen\, y$; $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{2x} \cos y$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4e^{2x}\, sen\, y$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^{2x}\, sen\, y$;
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2e^{2x} \cos y$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2e^{2x} \cos y$

c) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4\, senh\, y + 3y\, senh\, x$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 4x \cosh y + 3 \cosh x$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 3y \cosh x$;
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x\, senh\, y$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4 \cosh y + 3\, senh\, x$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4 \cosh y + 3\, senh\, x$

3 – Para cada uma das funções de produção seguintes, ache as produtividades marginais. A quantidade produzida é denotada por **z** e os insumos são denotados por **x** e **y**

a) $z = 4x^{\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{1}{4}}$

b) $z = 4xy - x^2 - 3y^2$

c) $z = 25 - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ $aplicadas aos\ pontos x = 1 e\ y = 1$

Respostas:

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^{-\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}}$; $\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial y} = x^{\frac{3}{4}} y^{-\frac{1}{4}}$

b) $\frac{\partial z}{\partial x} = 4y - 2x$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 4x - 6y$

c) $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = 1$; $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = 1$

3.8 Máximos e mínimos não condicionados

Definição 1

Se $z = f(x, y)$ é uma função de duas variáveis, então dizemos que $f(x, y)$ possui um máximo no ponto $x = a$ e $y = b$ se

$$f(a,b) > f(x,y)$$

para todos os pontos (x, y) suficientes próximos do ponto (a, b), mas diferentes deste ponto. Geometricamente, o gráfico de $f(x, y)$ possui um pico no ponto (a, b), conforme ilustrado na Figura 3.8.

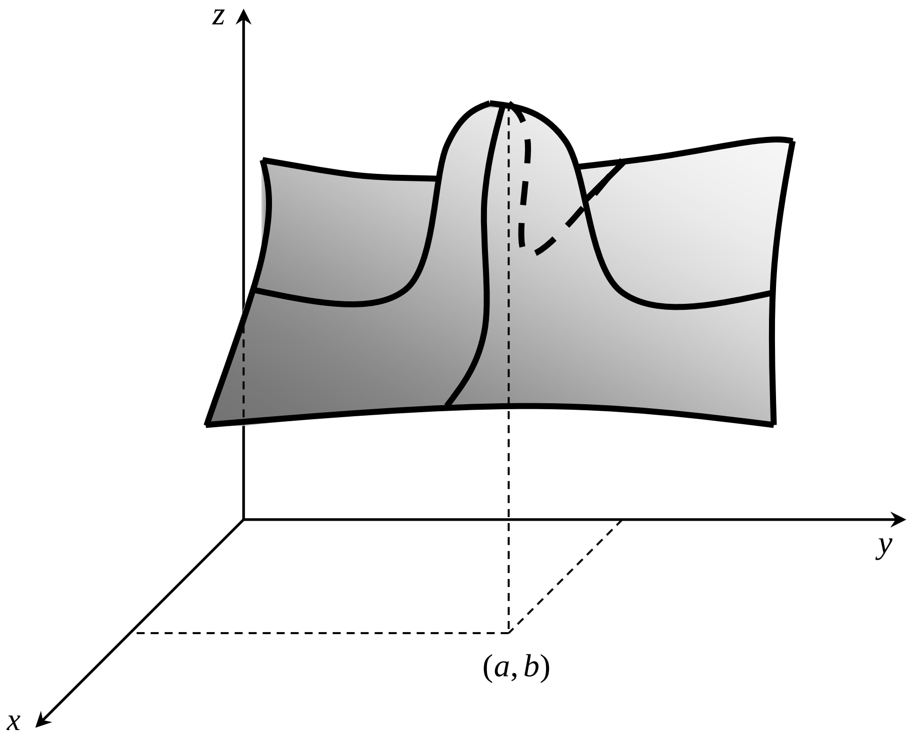


Figura 3.8 - Representação geométrica da superfície de uma função $z = f(x, y)$ com ponto de máximo.

Definição 2

Se $z = f(x, y)$ é uma função de duas variáveis, então dizemos que $f(x, y)$ possui um mínimo no ponto $x = a$ e $y = b$ se

$$f(a, b) < f(x, y)$$

para todos os pontos (x, y) suficientemente próximos do ponto(a, b), mas diferentes deste ponto. Geometricamente, o gráfico de $f(x, y)$ possui uma concavidade com a base no ponto (a, b) conforme ilustrado na Figura 3.9.

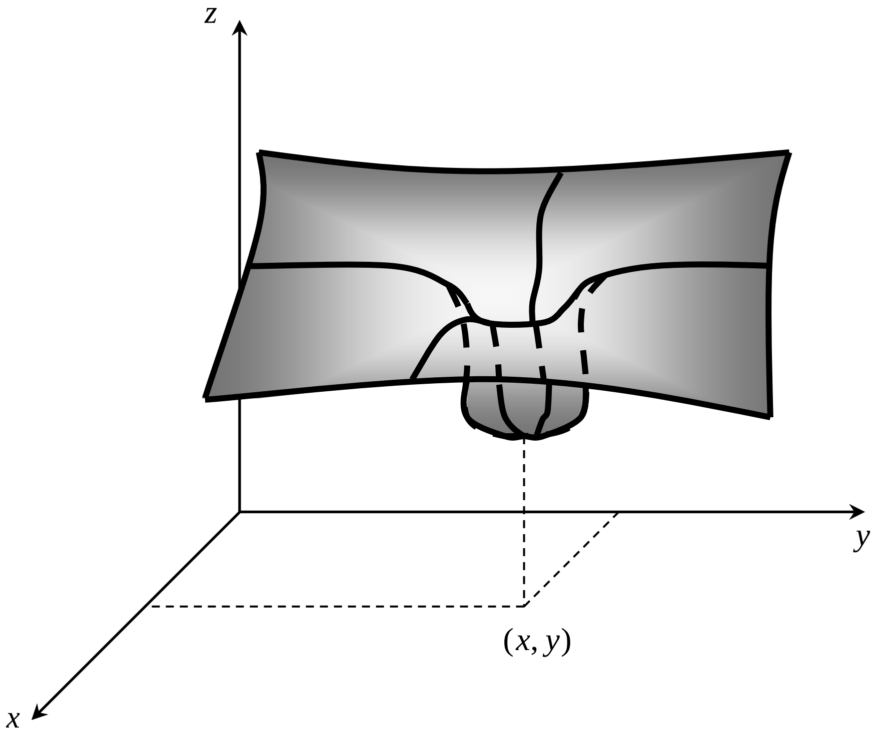


Figura 3.9 - Representação geométrica da superfície de uma função $z = f(x, y)$ com ponto de mínimo.

- **Primeiro teste da derivada para extremos**

Ao máximo e ao mínimo de uma função chamam-se extremos dessa função. Em outras palavras, diz-se que uma função admite um extremo em um dado ponto se ela tem nesse ponto um máximo ou um mínimo.

Suponha que $f\,(x,\,y)$ possui um máximo em $(x,\,y) = (a,\,b)$. Então se mantendo y constante em b, $f\,(x,\,y)$ torna-se uma função da variável x com um máximo em $x = a$. Portanto, sua derivada em relação a x é zero para $x = a$. Isto é,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$$

Do mesmo modo, mantendo-se x constante em a, $f\,(x,\,y)$ torna-se uma função da variável y com um máximo em $y = b$. Portanto sua derivada em relação a y é zero para $y = b$. Isto é

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

As mesmas considerações podem ser feitas se $f\,(x,\,y)$ possui um mínimo em $(x,\,y) = (a,\,b)$. Assim, temos o seguinte teste para extremos em duas variáveis:

se $f\,(x,\,y)$ possui ou um máximo ou um mínimo em $(x,\,y) = (a,\,b)$, então

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

Estas condições são necessárias para a existência de um extremo, mas não são suficientes. Contudo, se estamos certos da existência dos extremos, tais condições permitem determinar os seus valores. Caso contrário é preciso fazer um estudo mais detalhado, como segue.

- **Segundo teste da derivada para máximos e mínimos**

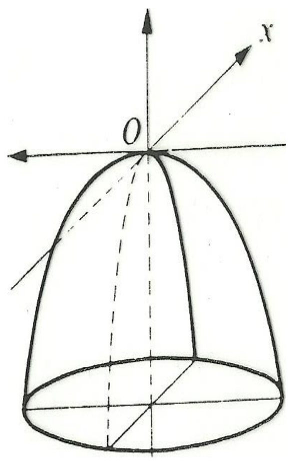
Seja $f\ (x,\ y)$ uma função definida num domínio que contem o ponto $(a,\ b)$ e cujas derivadas parciais são contínuas até a terceira ordem inclusive; suponhamos, ainda, que o ponto $(a,\ b)$ seja um extremo, isto é

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0\ .$$

Então, para $x = a$ e $y = b$:

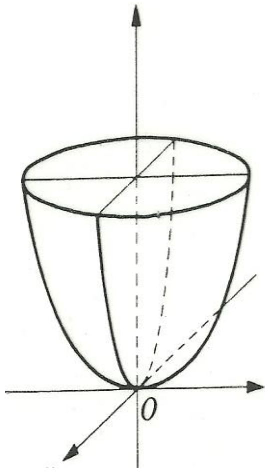
Caso1) $f\ (x,\ y)$ tem um máximo, se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right]^2>0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)<0$$



Caso2) $f\,(x, y)$ tem um mínimo, se

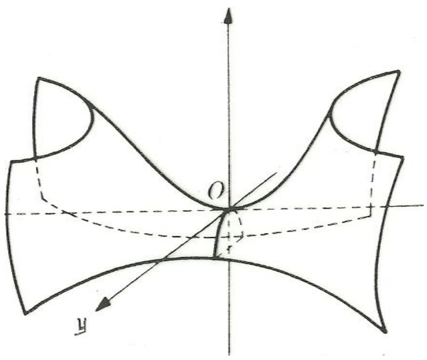
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\right]^2>0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)>0$$



Caso3) $f\,(x, y)$ não possui máximo nem mínimo se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\right]^2<0$$

Chamado de ponto de sela ou minimax



(1) Nenhuma conclusão é possível (pode ou não existir extremo) se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\right]^2=0$$

A expressão que acabamos de apresentar

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\right]^2$$

pode ser disposta em forma de matriz quadrada e se apresenta por *H* (de *Hesse*, matemático alemão), a saber:

$$H=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\end{vmatrix}$$

que diz o *Hessiano* da função $f\,(x, y)$ para $x = a$ e $y = b$.

Exemplo 3.25

Estudar os máximos e mínimos da função $z = x^2 - x\,y + y^2 + 3x - 2y + 1$.

Solução

Determine os pontos extremos:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-y+3$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-x+2y-2$$

Resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases}2x-y+3=0\\-x+2y-2=0\end{cases}$$

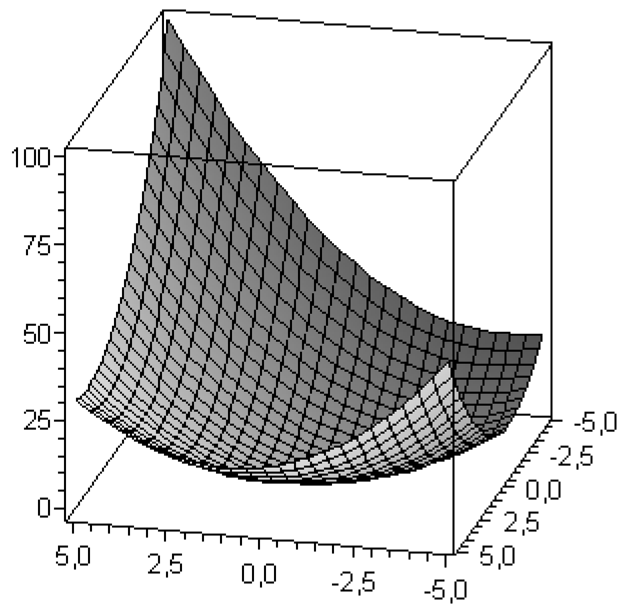
Achamos: $x=-\dfrac{4}{3}$; $y=\dfrac{1}{3}$

Assim, no ponto $\left(-\frac{4}{3}\ ,\ \frac{1}{3}\right)$ ocorre um máximo ou um mínimo da função z, o qual deverá ser pesquisado, de acordo com as condições de suficiência.

Calculemos, agora, os valores das derivadas parciais de segunda ordem, no ponto (–4/3, 1/3) e estabeleçamos a natureza desse extremo:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \ ; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \ ; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1 \ .$$

Assim, $h = 2.\ 2 - (-1)^2 = 3 > 0$. Por conseguinte, no ponto (–4/3, 1/3) a função tem um mínimo cujo valor é $z = -\frac{4}{3}$.



Exemplo 3.26

Estudar os máximos e mínimos da função $z = x^3 - y^3 - 3\,x\,y$.

Solução

Determine os pontos críticos, utilizando as condições necessárias para a existência de um extremo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

Obtemos os pontos extremos $x_1 = 1$, $y_1 = 1$ e $x_2 = 0$, $y_2 = 1$.

Calculamos as derivadas parciais de Segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x \;; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6\,y\,; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3\ .$$

Estudemos a natureza do primeiro ponto, (1, 1):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6 \;; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6\,; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3\ .$$

Assim, $H = 6\,.\,6 - (-3)^2 = 27 > 0$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$. Logo, a função admite um mínimo no ponto (1, 1); o valor da função neste ponto é $z = -1$.

Estudemos, agora, a natureza do segundo ponto, (0, 0):

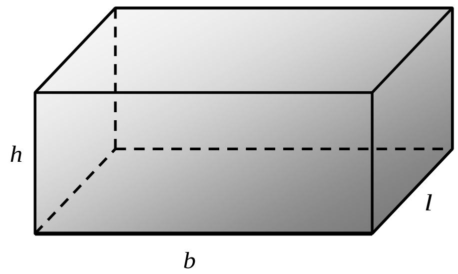
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \;; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \;; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \text{-}3.$$

Assim, $0\,.\,0 - (-3)^2 = -9 < 0$. Logo, este ponto não é mínimo nem máximo (minimax).

Exemplo 3.27

Determine as dimensões de uma caixa d'água retangular, sem cobertura, tais que, para um volume dado *V*, as superfícies das paredes e do assoalho sejam mínimas (Figura 3.12), de maneira que se tenha o mínimo de despesa.

Solução



Sejam,
$b = $ comprimento da base,
$h = $ altura,
$L = $ largura

O volume é $V = b.\ h.\ L = f\,(b, h, L)$

onde obtemos, $h = \dfrac{V}{b\,\mathrm{L}}$

A superfície total é

$$S = b\,L + 2\,\mathrm{L}\,h + 2\,b\,h \qquad \text{ou} \qquad S = b\,\mathrm{L} + 2\,\mathrm{L}\left(\frac{V}{b\,\mathrm{L}}\right) + 2\,b\left(\frac{V}{b\,\mathrm{L}}\right)$$

$$S = b\,\mathrm{L} + \frac{2\,V}{b} + \frac{2\,V}{L} = f\,(b, \mathrm{L})$$

Calculando as derivadas parciais e igualando-as a zero tem-se:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial b} = L - \dfrac{2V}{b^2} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial S}{\partial L} = b - \dfrac{2V}{L^2} = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações, obtemos $b = L$. Assim, substituindo em $f\,(b,\ \mathrm{L})$, resulta:

$$S = b^2 + \frac{4V}{b} \quad \text{e} \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 2\,b - \frac{4V}{b^2} = 0 \quad \text{ou} \quad b = L = \sqrt[3]{2V}$$

Temos um máximo ou um mínimo de *S* ?

Como, $\dfrac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2 + \dfrac{8V}{b^3} > 0$, trata-se de um mínimo de S.

Exemplo 3.28

Suponha que a função de produção seja:

$16\ z = 65 - 2(x - 5)^2 - 4\ (y - 4)^2.$

Os preços unitários dos insumos x e y (sob condições de competição) são 8 e 4, respectivamente, e o preço unitário do produto acabado é 32; determine o lucro máximo.

Solução

A função de lucro é
$L = 32\ z - 8\ x - 4\ y$ ou $L = 130 - 4\ (x - 5)^2 - 8\ (y - 4)^2 - 8\ x - 4\ y$

As condições necessárias para lucro máximo ou mínimo são:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = -8(x-5) - 8 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -16(y-4) - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -8x + 32 = 0 \\ -16y + 60 = 0 \end{cases}$$

ou, $x = 4$ e $y = 15/4$. Portanto, o lucro tem um máximo ou um mínimo em (4, 15/4).

Calculando as derivadas de segunda ordem, temos:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -8\ , \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -16 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$$

ou

$$g(x, y) = 11xy + \frac{14V}{x} + \frac{15V}{y}\ .$$

Para minimizar esta função, primeiro calculamos as derivadas parciais em relação a x e y; depois igualamo-las a zero.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = 11y - \dfrac{14V}{x^2} = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} = 11x - \dfrac{15V}{y^2} = 0 \end{cases}$$

Deste sistema de equações temos:

$$y = \frac{14V}{11x^2} \qquad \Rightarrow \qquad 11xy^2 = 15V$$

Ou $$11x\left(\frac{14V}{11x^2}\right)^2 = 15V \qquad \Rightarrow \qquad \frac{14^2\, V^2}{11x^3} = 15V$$

Assim, x = 56.

$$x^3 = \frac{14^2\, V^2}{11.15V} = \frac{14^2\, V}{11.15} = \frac{14^2\, .\, 147840}{11.15} = 175.616$$

A largura y, será $$y = \frac{14.147840}{11.56^2} = 60.$$

Finalmente

$$z = \frac{147840}{56.60} = 44.$$

Como,

H = (– 8). (– 16) – 0 = 128 > 0 e $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -8 < 0$,

trata-se, de fato, de um máximo da função de lucro em x = 4 e y = 15/4. O lucro máximo será $L_{máx}$ = 78 ½.

Exemplo 3.29

Suponha que desejamos fazer o projeto de uma construção retangular de 147.840 m^3 de volume. Considerando que a perda diária de calor é dada por

$11\,x\,y + 14\,y\,x + 15\,x\,y$

onde x, y, z são, respectivamente, o comprimento, a largura e a altura da construção. Determine as dimensões da construção nas quais a perda de calor seja mínima.

Solução

É preciso minimizar a função
$f\,(x, y, z) = 11\,x\,y + 14\,y\,x + 15\,x\,y$

onde x, y, z satisfaçam $V = x\,y\,z = 147.840$

em que V é o volume da construção.

Logo, $z = \dfrac{V}{xy}\cdot$

Substituindo esta expressão para z na função $f\,(x, y, z)$, obtemos uma função de perda de calor $g(x, y)$ de duas variáveis, a saber

$$g(x,y) = 11xy + 14y\frac{V}{xy} + 15x\frac{V}{xy}$$

Afinal, a função $g(x, y)$ terá um máximo ou um mínimo em (56, 60, 44)? Aplicando o teste da derivada segunda verificamos que
e portanto trata-se de um mínimo

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} > 0$$

3.9 Máximos e mínimos condicionados

Muitos problemas de otimização consistem em maximizar ou minimizar uma função objetivo sujeita a certas condições de restrição sobre as variáveis envolvidas. Estas restrições podem ser estabelecidas como igualdades ou desigualdades.

Uma técnica eficiente para resolver problemas desse tipo é o método dos operadores de *Lagrange*. Este método é utilizado para otimizar funções sujeitas a restrições de igualdade, podemos ser facilmente generalizado para o caso de uma restrição de desigualdade. Máximos e mínimos sujeitos a múltiplas restrições de igualdade e de desigualdade são obtidos utilizando-se as condições de *Kuhn-Tucker*.

Operadores de *Lagrange*

Sejam $f(x, y)$ e $g(x, y)$ funções de duas variáveis. Determinar os valores de x e y que maximizam (ou minimizam) a função objetivo $f(x, y)$ e que também satisfaçam a equação de restrição $g(x, y) = 0$.

A ideia básica do método dos operadores de *Lagrange* para resolver tal problema é substituir $f(x, y)$ por uma função auxiliar de três variáveis $F(x, y, \lambda)$, definida como

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) \pm \lambda \, \mathrm{g(x, y)}$$

A nova variável λ (lambda) é denominada operador de *Lagrange*, podendo ser precedido do sinal mais ou menos, sendo que na solução muda apenas o sinal de λ.

Se $F(x, y, \lambda)$ possui um máximo (ou mínimo) em $(x, y, \lambda) = (a, b, c)$, então $f(x, y)$ terá um máximo (ou mínimo) em $(x, y) = (a, b)$ sujeito à equação de restrição $g(x, y) = 0$.

Para localizar os pontos onde $F(x, y, \lambda)$ possui um máximo ou mínimo, precisamos determinar os valores de x, y e λ para os quais as três derivadas parciais de $F(x, y, \lambda)$ são iguais a zero. Então, as três equações.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \pm \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \pm \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = g(x, y) = 0$$

Podem ser resolvidas para as três incógnitas x, y, λ . A terceira equação é exatamente a equação de restrição original $g(x, y) = 0$; portanto $F(x, y, \lambda)$ necessita ser diferenciada parcialmente, apenas com relação a x e a y. Em muitos casos, os valores de λ não são de interesse, e não são calculados.

A solução das três equações acima fornece o ponto extremo da função condicionada. Este extremo satisfaz o vínculo, mas deve ser testado como máximo ou mínimo da função, por meio do procedimento seguinte.

Para um ponto extremo $x = a$, $y = b$,

$$\text{se}, \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(a,b) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b) = 0 \end{cases}$$

$$\text{e} \quad H = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a,b) \, . \, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(a,b) - \left[\frac{\partial F}{\partial x \partial y}(a,b) \right]^2$$

$$
\text{então}\begin{cases}
H \ \leq o\ teste\ e\ a\ função\ deve\ ser\ examinado\ ns\ vizinhanças\ de\ x = a\ e\ y = b \\[2ex]
H > 0 \begin{cases}
máximo\ em\ x = a,\ \ y = b, se \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a,b) < 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(a,b) < 0 \end{cases} \\[6ex]
mínimo\ em\ x = a,\ y = b, se \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a,b) > 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(a,b) > 0 \end{cases}
\end{cases}
\end{cases}
$$

Observe que, para máximos e mínimos não sujeitos a restrições, se $H < 0$, o ponto extremo não é nem um máximo nem um mínimo. Entretanto, para máximos e mínimos condicionados, se $H < 0$, o ponto extremo pode ser de fato, um máximo ou um mínimo. Isto corresponde ao fato que um ponto pode ser um máximo ou mínimo da função condicionada, embora não seja um máximo ou um mínimo da função não condicionada.

O método dos operadores de *Lagrange* pode ser extendido a uma função de n variáveis $f\,(x_1, x_2,..., x_n)$

sujeito a k restrições $g_j\,(x_1, x_2,..., x_n) = 0$

para j = 1, 2,..., k onde $k \leq n$. Assim,

$$F(x_1,\dots,x_n\,;\ \lambda_1,\dots,\lambda_k) = f(x_1,\dots,x_n) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j\, g_j(x_1,\dots,x_n)$$

e a derivação parcial resulta em $n + k$ equações a serem resolvidas para $n + k$ incógnitas.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} - \cdots - \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_1} = 0 \\
&\frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} - \cdots - \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_2} = 0 \\
&\cdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\
&\frac{\partial F}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n} - \cdots - \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_n} = 0
\end{aligned}
$$

Exemplo 3.30

Ache os máximos e mínimos (se houver) de $f(x, y) = 5x^2 + 6y^2 + xy$, sujeitos à restrição $x + 2y = 24$.

Solução

$$F(x, y, \lambda) = 5x^2 + 6y^2 + xy - \lambda(x + 2y - 24)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 10x - y - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 12y - x - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + 2y - 24 = 0$$

Resolvendo o sistema de equações,

$$\begin{cases} 10x - y - \lambda = 0 \\ -x + 12y - 2\lambda = 0 \\ x + 2y - 24 = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \begin{cases} -20x + 2y + 2\lambda = 0 \\ -x + 12y - 2\lambda = 0 \end{cases} \\ \hline -21x + 14y + 0 = 0 \end{array}$$

ou, $3x - 2y = 0$

Resolvendo simultaneamente com a terceira equação,

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 3x - 2y + 0 = 0 \\ x + 2y - 24 = 0 \end{cases} \\ \hline 4x + 0 - 24 = 0 \end{array}$$

Portanto, $x = 6$ e $y = 9$.

O ponto extremo será $(6, 9)$; $\lambda = 51$.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 10 \quad ; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 12 \quad ; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -1$$

Como $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} > 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} > 0$ e $H > 0$ o ponto extremo $(6, 9)$ é um ponto de mínimo .

Exemplo 3.31

Ache os pontos de máximo e mínimo (se houver) de $f(x, y) = 12\,x\,y - 3\,y^2 - x^2$, sujeito à restrição $x + y = 16$.

Solução

$$F(x, y, \lambda) = 12\,x\,y - 3\,y^2 - x^2 - \lambda\,(x + y - 16)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 10y - 2x - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 12x - 6y - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -(x + y - 16) = 0$$

Resolvendo o sistema de equações encontramos $x = 9$, $y = 7$ e $\lambda = 66$. Logo, o ponto extremo será $(9, 7)$; $\lambda = 66$.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -2 \quad ; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -6 \quad ; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 12$$

$$H = (-2)\,(-6) - (12)^2 = -\,132 < 0.$$

Portanto, a função deve ser examinada nas vizinhanças de (9, 7). Sabe-se que, se $f(x + h, y + k) - f(a, b) < 0$ o ponto extremo (a, b) corresponde a um máximo, e se $f(x + h, y + k) - f(a, b) > 0$ o ponto extremo (a, b) corresponde a um mínimo.

Logo:

$$\begin{aligned} g(9+h,\ 7+k) = x + h + y + k &= 16 \\ 9 + h + 7 + k &= 16 \\ h + k = 0 \quad \therefore \quad k &= -h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(9+h,\ \ 7+h) - f(9,7) &= 12\,(9+h)(7+h) - 3\,(7-h)^2 - (9+h)^2 \\ &\quad -12.9.7 - 3.7^2 - 9^2 \\ &= -\,24h - 12h^2 + 42h - 3h^2 - 18h - h^2 \\ &= -16h^2 < 0 \end{aligned}$$

Portanto, o ponto (9, 7) corresponde a um máximo.

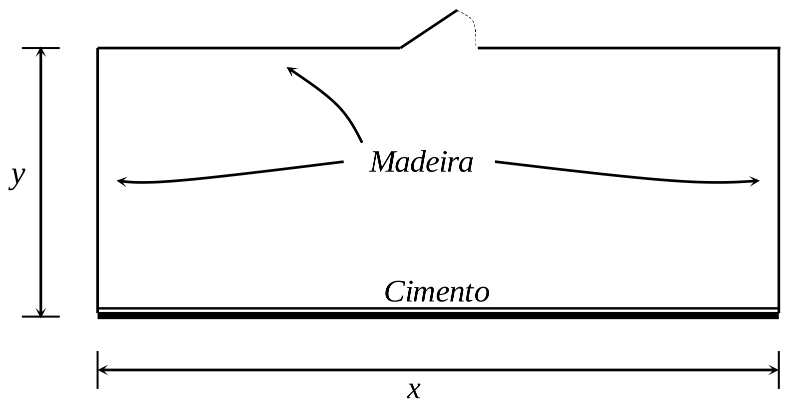
Exemplo 3.32

Deseja-se construir uma área retangular fechada, de 600 m^2. Três lados devem ser construídos de madeira ao custo de R$ 7,00 por metro linear. O quarto lado deve ser construído com blocos de cimento ao custo de R$ 14,00 por metro linear. Determinar as dimensões da cerca que minimizam o custo total dos materiais de construção.

Solução

Seja x o comprimento do lado construído com blocos de cimento e y o comprimento do lado adjacente, conforme a Figura 3.13. Como a área cercada necessita ser 600 m^2, a equação de restrição será:

x. y = ***600***



A função objetivo deve ser a expressão do custo total dos materiais de construção. Assim,

Custo da madeira = Custo da cerca de madeira x Custo da madeira por metro
Custo da madeira = $(x + 2y)$. $7 = 7x + 14y$.

Custo dos blocos de cimento = Comprimento da parede de cimento x Custo dos blocos por metro
Custo dos blocos de cimento = x. 14

Se C indica o custo total do material, então $C = 7x + 14y + 14x$

e a função objetivo será: $C = 21x + 14y$

Usando o método dos operadores de *Lagrange* para minimizar a função objetivo, temos:

$$f(x,y) = 21x + 14y$$
$$g(x,y) = 600 - xy$$
$$F(x,y,\lambda) = 21x + 14y + \lambda(600 - x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 21 - \lambda\, \mathrm{y} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 14 - \lambda\, \mathrm{x} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 600 - xy = 0$$

Das duas primeiras equações, vem $\lambda = \dfrac{21}{y} = \dfrac{14}{x}$

Portanto, $21x = 14y$ e $x = 2/3\, y$.

Substituindo esta expressão de x na terceira equação, temos:

$$600 - \left(\frac{2}{3}y\right)y = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{3}{2}.600 = 900 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{y} = \pm 30$$

Rejeitamos $y = -30$ porque não convém à geometria do problema. Logo, $y = 30$ cm, $x = 20$ cm e $\lambda = 7/10$

Devemos verificar se o ponto extremo (20, 30) corresponde ao mínimo da função de custo.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\lambda = -\frac{7}{10}$$
$$H = 0\,.\,0 - \left(-\frac{7}{10}\right)^2 = -\frac{49}{100} < 0$$

Como $H < 0$, a função deve ser examinada nas vizinhanças de (20, 30).

$$g(20+h,\ 30+k) = 600 - (20+h).(30+k)$$
$$(20+h).(30+k) = 600$$
$$\mathrm{k} = \frac{600}{20+\mathrm{h}} - 30$$

$$\begin{aligned} f(20+h,\ 30+k) - f(20,30) &= 21(20+h) + 14(30+k) - (21.20 + 14.30) \\ &= 21h + 14k \\ &= 21\mathrm{h} + 14\left(\frac{600}{20+\mathrm{h}} - 30\right) \\ &= \frac{21h^2}{20+h} > 0 \end{aligned}$$

Portanto, o ponto (20, 30) corresponde a um mínimo. Assim, o valor mínimo de 21 x + 14 y com x e y sujeitos à restrição, ocorre quando x = 20 cm e y = 30 cm e o custo mínimo sujeito à restrição 600 – x y = 0, é $C_{mín}$ = R$ 840,00

Exemplo 3.33

Deseja-se construir uma caixa paralelepipédica de volume máximo com uma folha de chapa metálica de superfície *S*. Quais as dimensões da caixa.

Solução

Sejam, x = comprimento da caixa;

y = largura da caixa;

z = altura da caixa;

V = volume.

O problema consiste em achar o máximo da função objetivo

V = x. y. z

Se as variáveis x, y, z estão sujeitas a relação

$$x\,y + x\,z + y\,z - S = 0$$

em que, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Formemos a função auxiliar

$$F(x, y, z, \lambda) = x\,y\,z + \lambda\,(x\,y + x\,z + y\,z - a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz + \lambda\,(\mathrm{y} + \mathrm{z}) = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = xz + \lambda\,(\mathrm{x} + \mathrm{z}) = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = xy + \lambda\,(\mathrm{x} + y) = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = xy + xz + yz - S = 0$$

Resolvendo o sistema de quatro equações a quatro incógnitas. Multiplicando a primeira equação do sistema por *x*, a Segunda por *y* e a terceira por *z*, tem-se:

$$\begin{cases} xyz + \lambda\,(xy + xz) = 0 \\ xyz + \lambda\,(xy + yz) = 0 \\ xyz + \lambda\,(xz + yz) = 0 \end{cases}$$

$$3xyz + \lambda\,(xy + xz) + \lambda\,(xy + yz) + \lambda\,(xz + yz) = 0$$

$$3xyz + 2\lambda\,(xy + xz + yz) = 0$$

$$3xyz + 2\lambda\, a = 0$$

$$\lambda = -\frac{3xyz}{2a}$$

Assim,

$$\begin{cases} yz\left[1 - \dfrac{3x}{2a}(y+z)\right] = 0 \\ xz\left[1 - \dfrac{3y}{2a}(x+z)\right] = 0 \\ xy\left[1 - \dfrac{3z}{2a}(x+y)\right] = 0 \end{cases}$$

Como $x \neq 0$, $y \neq 0$ e $z \neq 0$, deduz-se destas equações que

$$\frac{3x}{2a}(y+z) = 1, \quad \frac{3y}{2a}(x+z) = 1 \quad \text{e} \quad \frac{3z}{2a}(x+y) = 1$$

Das duas primeiras equações, obtemos $x = y$. Da segunda e da terceira $y = z$. Substituindo na equação de restrição, tem-se $x = y = z = \sqrt{\dfrac{a}{3}}$.

Pode-se demostrar que este ponto é, precisamente, um ponto de máximo. O volume da caixa é, pois, máximo quando ela tem a forma de um cubo de aresta $\sqrt{\dfrac{a}{3}}$.

Exemplo 3.34

Suponhamos que x unidades de trabalho e y unidades de capital podem produzir $f(x, y) = 60\,x^{3/4}\,y^{1/4}$ unidades de um certo produto. Suponha também que cada unidade de trabalho custa R$ 100,00 e cada unidade de capital custa R$ 200,00. Considerando que R$ 30.000,00 estão disponíveis para ser gasto na produção. Quantas unidades de trabalho e quantas unidades de capital devem ser utilizadas para maximizar a produção?

Solução

O custo de x unidades de trabalho e y unidades de capital é

$C = 100\,x + 200\,y$

Uma vez que queremos usar todo o dinheiro disponível (R$ 30.00,00), precisamos satisfazer a equação restritiva $100\,x + 200\,y = 30.000$ ou $g(x, y) = 30.000 - 100\,x - 200\,y = 0$

A função objetivo é $f(x,y) = 60x^{\frac{3}{4}}\,y^{\frac{1}{4}}$.

Neste caso, temos a seguinte função auxiliar

$$F(x, y, \lambda) = 60x^{\frac{3}{4}}\,y^{\frac{1}{4}} + \lambda\,(30.000 - 100x - 200y).$$

Assim,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 45x^{-\frac{1}{4}}\,y^{\frac{1}{4}} - 100\lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 15x^{-\frac{3}{4}}\,y^{-\frac{3}{4}} - 200\lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 30.000 - 100x - 200y = 0$$

Resolvendo as duas primeiras equações para λ,

$$\lambda = \frac{45}{100}x^{-\frac{1}{4}}\,y^{\frac{1}{4}} = \frac{9}{20}x^{-\frac{1}{4}}\,y^{\frac{1}{4}}\ ,$$

$$\lambda = \frac{15}{200}x^{-\frac{3}{4}}\,y^{-\frac{3}{4}} = \frac{3}{40}x^{-\frac{3}{4}}\,y^{-\frac{3}{4}}\ .$$

Portanto, precisamos ter $$\frac{9}{20}x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} = \frac{3}{40}x^{-\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}$$

Multiplicando ambos os lados dessa expressão por $x^{1/4}\,y^{3/4}$, vem:

$$\frac{9}{20}y = \frac{3}{40}x \;, \qquad \text{ou} \qquad y = \frac{1}{6}x$$

Substituindo este resultado na equação restritiva

$$100x + 200\left(\frac{1}{6}x\right) = 30.000 \quad \text{e} \quad \text{x} = 225. \qquad \text{Logo } y = 37{,}5.$$

E, assim, a produção máxima é atingida utilizando-se 225 unidades de trabalho e 37,5 unidades de capital. Isso resulta, no valor ótimo, $\lambda = 0{,}2875$. Nesse caso, o operador de *Lagrange* pode ser interpretado como a produtividade marginal do dinheiro. Isto é, se uma unidade monetária adicional é utilizada, então aproximadamente 0,2875 unidades adicionais do produto podem ser produzidas.

Lembre-se que as derivadas parciais $\partial f\ /\partial x$ e $\partial f\ /\partial y$ são denominadas, respectivamente, de produtividade marginal de trabalho e capital. Neste exemplo,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 45.(225)^{-\frac{1}{4}}.(37{,}5)^{\frac{1}{4}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 15.(225)^{\frac{3}{4}}.(37{,}5)^{-\frac{3}{4}}$$

$$\frac{\text{Produtividade marginal de trabalho}}{\text{Produtividade marginal de capital}} = \frac{1}{2}$$

Por outro lado, $$\frac{\text{Custo por unidade de trabalho}}{\text{Custo por unidade de capital}} = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$$

Este resultado ilustra a seguinte lei da economia econômica: se o trabalho e o capital estão em níveis ótimos, então a razão de suas produtividades marginais é igual à razão do custo por unidade.

Condições de *Kuhn-Tucker*

Embora o método dos operadores de *Lagrange* possa ser modificado para resolver problemas de otimização com uma restrição de desigualdade, ele não pode ser convenientemente modificado para mais de uma restrição de desigualdade. Para a solução de tais problemas, é vantajoso o uso das condições de *Kuhn-Tucker.*

Considere uma função de duas variáveis $f\,(x, y)$, sujeita à restrição $g(x, y) \leq 0$. Um ponto $m = (x^*, y^*)$ um ponto de máximo local de $f\,(x, y)$ sujeito à $g(x, y) \leq 0$ somente se existir um λ não-negativo, tal que λ e(x^*, y^*) satisfaçam as condições de *Kuhn-Tucker*.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \lambda\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \lambda\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$$

$$\lambda\ \mathrm{g(x, y)} = 0$$

$$g(x, y) \leq 0$$

Estas condições também são suficientes se $f\,(x, y)$ é côncava e a restrição é côncava. Como um ponto de máxima de $f\,(x, y)$ é um ponto de mínima de $-f\,(x, y)$, este resultado é aplicável para minimizar uma função convexa, sujeita a uma restrição convexa.

As condições de *Kuhn-Tucker* podem ser facilmente generalizadas para uma função de *n* variáveis, $f\,(x_1, x_2, ..., x_n)$. Sujeita à restrição $f\,(x_1, x_2, ..., x_n)$,

como,

$$h_1 = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda\ \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0\ ,\quad \text{para } i = 1,\ 2,\ ...\ ,\ n$$

$$\lambda\ g\ (x_1, x_2, ...\ , x_n) = 0$$

$$g\ (x_1, x_2, ...\ , x_n) \leq 0$$

Exemplo 3.35

Uma indústria fabrica dois tipos de equipamentos de irrigação, x e y. A função de custo-conjunto é dada por

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy\ .$$

Para minimizar o custo, quantos equipamentos de cada tipo devem ser produzidos, a fim de que se tenha um total de pelo menos 8 equipamentos produzidos num determinado período?

Solução

Usando as condições de *Kuhn-Tucker*,

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda\ \frac{\partial g}{\partial x} = 2x - y - \lambda\ = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda\ \frac{\partial g}{\partial y} = 4y - x - \lambda\ = 0$$

$$\lambda\ \ g = \lambda\ \ (x + y - 8) = 0$$

$$g = x + y - 8 \geq 0$$

Devemos ter $\lambda = 0$ ou $x + y - 8 = 0$. Se $\lambda = 0$, então $x = y = 0$, de maneira a satisfazer as duas primeiras equações, mas então $x + y \geq 8$ não é satisfeita. Se $x + y - 8 = 0$, então $x = 8 - y$ e, substituindo nas duas primeiras equações, resulta

$$\begin{cases} 2(8 - y) - y - \lambda\ = 0 \\ -(8 - y) + 4y - \lambda\ = 0 \end{cases}$$

Portanto, o ponto de mínimo de $f(x, y) = x^2 - 2y^2 - xy$, sujeita à restrição $x + y \geq 8$ é $x = 5$ e $y = 3$.

EXERCICIOS PROPOSTOS – LISTA 3B

1 – Utilizando os testes de 1° e 2° derivadas, examine cada uma das seguintes funções no que concerne a máximos e mínimos (teste os pontos).

a) $z = f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$

b) $z = f(x,y) = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$

c) $z = f(x,y) = 2x^2 + -2xy + y^2 + 5x - 3y$

d) $z = f(x,y) = x^3 - 3axy + y^3$

e) $z = f(x,y) = x^3 - 12xy + y^3$

Respostas:

a) ponto mínimo $= (4,-2)$

b) ponto máximo $= \left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right)$

c) ponto mínimo $= \left(-1, \frac{1}{2}\right)$

d) ponto mínimo $= (a, a)$

e) ponto mínimo $= (4,4)$

2 – Utilizando os multiplicadores de Lagrange ache os máximos e/ou mínimos de cada uma das seguintes funções sujeitas às restrições dadas (teste os pontos).

a) $z = f(x,y) = 3x^2 + 4y^2 - xy$ sujeito à $2x + y = 21$

b) $z = f(x,y) = x + y$ sujeito à $x^2 + y^2 = 1$

c) $z = f(x,y) = x^2 - y^2 + xy + 5x$ sujeito à $x = 2y$

Respostas:

a) ponto mínimo $= (8,5;4)$

b) ponto máximo $= (0,707;0,707)$ e ponto mínimo $= (-0,707;-0,707)$

c) ponto de sela $= (-2\ -1)$

3 – Use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrara possíveis pontos extemos das funções submetidas às restrições dadas (sem testar condições de suficiência).

a) $w = f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeito à $x.y.z = 1$

b) $w = f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 16z^2$ sujeito à $x.y = 1$

c) $w = f(x,y,z) = x.z + yz$ sujeito às retrições simultâneas $x^2 + z^2 = 2$ e $y.z = 2$

Respostas:

a) (1,1,1);(1,-1,-1);(1,-1,1);(1,1,-1);(-1,1,1);(-1,-1,-1);(-1,-1,1);(-1,1,-1)

b) $(1,4142;0,707;0); (-1,4142;-0,707;0); (-1,4142;0,707;0); (1,4142;-0,707;0)$

c) $(1,2,1); (1,-2,-1); (-1,2,1); (-1,-2,-1)$

4 – Utilize as condições de Kuhn-Tucker pra encontrar os pontos extremos das funções:

a) $f(x,y) = 4x^2 + 5y^2 - 6y \quad se\ x + 2y \geq 18$
(confirmarque se trata de ponto de mínimo)

b) $f(x,y) = 3x^2 + 3y^2 \quad se\ x + y \geq 10$
(confirmarque se trata de ponto de mínimo)

c) $f(x,y) = 10x.y - 5x^2 - 7y^2 + 40x \quad se\ x + y \leq 13$
(confirmarque se trata de ponto de máximo)

Respostas:

a) $(4;7)$ e $\lambda = 32$
b) $(5;5)$ e $\lambda = 30$
c) $(8;5)$ e $\lambda = 10$

5 – Dividir um segmento a em 3 partes tais que o produto entre as partes seja máximo.

a) Resolva incorporando a restrição na função objetivo.

b) Resolva utilizando multiplicador de Lagrange.

Respostas:

a) $x = \frac{1}{3}a;\ y = \frac{1}{3}a;\ z = \frac{1}{3}a$

$b)\ x = y = z = \frac{1}{3}\ e\ \lambda = \frac{1}{9}$

6 – Uma calha deve ser construída com uma folha de largura **a** e comprimento qualquer. Dá-se a seção da calha a forma de um trapézio isóscele. Qual deve ser a largura da base e a inclinação das faces para que sua capacidade seja máxima? (Utilizar multiplicador de Lagrange)

Resposta: $b = \frac{1}{3}a$ e $\theta = 120°$

7 – Uma boia deve ter a forma de um cilindro terminado em dois cones iguais e de mesma base que o cilindro. Achar as relações:

a) Entre altura do cilindro e a altura do cone

b) Entre a altura do cilindro e o raio do cilindro

Para que o material empregado seja mínimo, considerando-se o volume da boia (Utilizar multiplicador de Lagrange)

Respostas:

$\text{a) altura do cone} = \text{altura do cilindro}$

$\text{b) altura do cilindro} = \dfrac{2r}{\sqrt{5}}$

8 – Um fabricante produz 2 tipos de açúcar. Um lhe custa, em média, 50 centavos o quilo e o outro 60 centavos. Considere que o preço de venda do primeiro é **x** centavos por quilo e do segundo é **y** centavos por quilo. Se o número de quilos de açúcar que pode ser vendido em cada semana é dado pelas fórmulas:

N1 = 250 (y-x) primeiro tipo

N2 = 32000 + 250 (x-2y) segundo tipo

Mostre que o lucro obtido é máximo quando os preços são fixados em 89 centavos e 94 centavos por quilo, respectivamente.