1) Resolva detalhadamente o problema de valores de contorno:

$$x^2y'' + 5xy' + (4+\pi^2)y = \ln(x), \quad y(1)=0, \ y(e)=0.$$

Sol.: Iniciamos resolvendo a eq. dif. homogênea correspondente que é de tipo Cauchy-Euler.

$$x^2y'' + 5xy' + (4+\pi^2)y = 0$$

Proposta de Solução da forma $y(x) = x^r$, onde r é um coeficiente a ser determinado.

$$\begin{cases} y(x) = x^r \\ y'(x) = rx^{r-1} \\ y''(x) = r(r-1)x^{r-2} \end{cases}$$

$$x^2 r(r-1)x^{r-2} + 5xrx^{r-1} + (4+\pi^2)x^r = 0$$

$$x^r\left[r(r-1) + 5r + 4 + \pi^2\right] = 0$$

Vamos procurar uma solução para $x>0$ pois as condições de contorno são para valores de x positivos. e $\ln(x)$ somente está definido se $x>0$

Logo $x^r \neq 0$ e temos

$$r(r-1) + 5r + 4 + \pi^2 = 0$$

$$\boxed{r^2 + 4r + 4 + \pi^2 = 0} \quad \text{Eq. Caraterística}$$

$$r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(4+\pi^2)}}{2} \quad \text{Fórmula de Bhaskara}$$

②

$r_{1,2} = -2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\cancel{16}-\cancel{16}-4\pi^2}$

$r_{1,2} = -2 \pm \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\pi i$

$r_{1,2} = -2 \pm \pi i$ Tipo III (Raizes Complexas Conjugadas)

$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

$\boxed{\alpha = -2}$ e $\boxed{\beta = \pi}$

A solução geral da eq. h. no tipo III é

$$y_{gh}(x) = x^{\alpha}\left[C_1 \cos(\beta \ln(x)) + C_2 \operatorname{sen}(\beta \ln(x))\right]$$

Logo,

$$\boxed{y_{gh}(x) = x^{-2}\left[C_1 \cos(\pi \ln(x)) + C_2 \operatorname{sen}(\pi \ln(x))\right]}$$

Trocar $C_1 \to E_1(x)$ e $C_2 \to E_2(x)$

As soluções fundamentais são

(I) $y_1(x) = \dfrac{\cos(\pi \ln(x))}{x^2}$

e

(II) $y_2(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(\pi \ln(x))}{x^2}$

Vamos usar o <u>Método de Variação dos Parâmetros</u> para encontrar uma solução particular (y_p) da eq. não homogênea. Isto é, faremos a proposta de solução

$$y_p(x) = x^{-2}\left[E_1(x)\cos(\pi \ln(x)) + E_2(x)\operatorname{sen}(\pi \ln(x))\right] \quad \text{(III)}$$

onde $E_1(x)$ e $E_2(x)$ são funções a serem encontradas.

Podem rever os vídeos 37, 38 e 39 do curso de Cálculo II caso tenham dúvidas sobre o Método de Variação dos Parâmetros

O Wronskiano das soluções da eq. diferencial homogênea é

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

De (I) temos

$$y_1(x) = \frac{\cos(\pi \ln(x))}{x^2}$$

$$y_1'(x) = \frac{-\operatorname{sen}(\pi \ln(x))\,\frac{\pi}{\cancel{x}}\,x^{\cancel{2}} - 2x\cos(\pi \ln(x))}{x^4}$$

$$y_1'(x) = -\frac{1}{x^3}\left(\pi \operatorname{sen}(\pi \ln(x)) + 2\cos(\pi \ln(x))\right)$$

De (II) temos

$$y_2(x) = \frac{\operatorname{sen}(\pi \ln(x))}{x^2}$$

$$y_2'(x) = \frac{\cos(\pi \ln(x))\,\frac{\pi}{\cancel{x}}\,x^2 - 2x\operatorname{sen}(\pi \ln(x))}{x^4}$$

$$y_2'(x) = \frac{1}{x^3}\left(\pi \cos(\pi \ln(x)) - 2\operatorname{sen}(\pi \ln(x))\right)$$

$$\therefore\quad W(x) = \begin{vmatrix} \dfrac{\cos(\pi \ln(x))}{x^2} & \dfrac{\operatorname{sen}(\pi \ln(x))}{x^2} \\[2ex] -\dfrac{1}{\cancel{x}^3}\left(\pi \operatorname{sen}(\pi \ln(x)) + 2\cos(\pi \ln(x))\right) & \dfrac{1}{\cancel{x}^3}\left(\pi \cos(\pi \ln(x)) - 2\operatorname{sen}(\pi \ln(x))\right) \end{vmatrix}$$

$$W(x) = \frac{1}{x^5}\cos(\pi \ln(x))\left[\pi\cos(\pi\ln(x)) - \cancel{2\,\mathrm{sen}(\pi\ln(x))}\right] +$$

$$\frac{1}{x^5}\,\mathrm{sen}(\pi\ln(x))\left[\pi\,\mathrm{sen}(\pi\ln(x)) + \cancel{2\cos(\pi\ln(x))}\right]$$

$$\cos^2(\pi\ln(x)) + \mathrm{sen}^2(\pi\ln(x)) = 1$$

$$\boxed{W(x) = \frac{\pi}{x^5}}$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ \frac{D(x)}{A(x)} & y_2'(x) \end{vmatrix} \quad e \quad W_2(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & \frac{D(x)}{A(x)} \end{vmatrix}$$

tinhamos

$$\underbrace{\boxed{x^2}}_{A(x)} y'' + 5xy' + (4+\pi^2)y = \underbrace{\boxed{\ln(x)}}_{D(x)}$$

logo

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\mathrm{sen}(\pi\ln(x))}{x^2} \\ \frac{\ln(x)}{x^2} & \frac{1}{x^3}\left[\pi\cos(\pi\ln(x)) - 2\,\mathrm{sen}(\pi\ln(x))\right] \end{vmatrix}$$

$$\boxed{W_1(x) = -\frac{\ln(x)\,\mathrm{sen}(\pi\ln(x))}{x^4}}$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \frac{\cos(\pi\ln(x))}{x^2} & 0 \\ -\frac{1}{x^3}\left(\pi\,\mathrm{sen}(\pi\ln(x)) + 2\cos(\pi\ln(x))\right) & \frac{\ln(x)}{x^2} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{W_2(x) = \frac{\ln(x)\cos(\pi\ln(x))}{x^4}}$$

Continuando com o método da variação dos parâmetros temos que

$$E_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)} \quad e \quad E_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)}$$

logo $$E_1'(x) = \frac{-\ln(x)\,\text{sen}(\pi\ln(x))}{\cancel{x^4}} \cdot \frac{x^{\cancel{5}}}{\pi}$$

$$E_1'(x) = -\frac{x}{\pi}\ln(x)\,\text{sen}(\pi\ln(x)) = \frac{dE_1(x)}{dx}$$

$$E_1(x) = \int -\frac{x}{\pi}\ln(x)\,\text{sen}(\pi\ln(x))\,dx$$

$$\boxed{E_1(x) = \frac{x^2\left[\pi\left((4+\pi^2)\ln(x)-4\right)\cos(\pi\ln(x)) - \left(2(4+\pi^2)\ln(x)+\pi^2-4\right)\text{sen}(\pi\ln(x))\right]}{\pi(4+\pi^2)^2}}$$

$$E_2'(x) = \frac{\ln(x)\cos(\pi\ln(x))}{\cancel{x^4}} \cdot \frac{x^{\cancel{5}}}{\pi}$$

$$E_2'(x) = \frac{1}{\pi}x\ln(x)\cos(\pi\ln(x)) = \frac{dE_2(x)}{dx}$$

$$E_2(x) = \int \frac{x}{\pi}\ln(x)\cos(\pi\ln(x))\,dx$$

$$\boxed{E_2(x) = \frac{x^2\left[\pi\left((4+\pi^2)\ln(x)-4\right)\text{sen}(\pi\ln(x)) + \left(2(4+\pi^2)\ln(x)+\pi^2-4\right)\cos(\pi\ln(x))\right]}{\pi(4+\pi^2)^2}}$$

As integrais foram calculadas no site www.wolframalpha.com

Com isto encontramos a forma das funções $E_1(x)$ e $E_2(x)$ que devem ser substituídas em (III) para obter a solução particular $\{y_p(x)\}$

A solução geral da eq. dif. não homogênea é

$$y_{gnh}(x) = y_{gh}(x) + y_p(x).$$

- Vamos usar agora a primeira restrição: $y(1)=0$

$$y_{gh}(1) = \frac{1}{1^2}\Big[C_1 \underbrace{\cos(\pi \underbrace{\ln(1)}_{0})}_{1} + C_2 \underbrace{\operatorname{sen}(\pi \underbrace{\ln(1)}_{0})}_{0}\Big]$$

$$y_{gh}(1) = C_1$$

$$y_p(1) = \frac{1}{1^2}\Big[E_1(1) \cdot 1 + E_2(1) \cdot 0\Big]$$

Resta avaliar $E_1(1)$.

$$E_1(1) = \frac{1^2\Big[\pi\big((4+\pi^2)\cancel{\ln(1)}^{0} - 4\big)\underbrace{\cos(\pi \cancel{\ln(1)}^{0})}_{1} - \big(2(4+\pi^2)\cancel{\ln(1)}^{0} + \pi^2 - 4\big)\underbrace{\operatorname{sen}(\pi \cancel{\ln(1)}^{0})}_{0}\Big]}{\pi(4+\pi^2)^2}$$

$$E_1(1) = \frac{-4}{\pi(4+\pi^2)^2}$$

$$y_p(1) = \frac{-4}{\pi(4+\pi^2)^2}$$

$$y_{gnh}(1) = C_1 - \frac{4}{\pi(4+\pi^2)^2} = 0$$

$$\boxed{C_1 = \frac{4}{\pi(4+\pi^2)^2}}$$

- Agora vamos usar a segunda restrição: $y(e)=0$

$$y_{gh}(e) = \frac{1}{e^2}\Big[\underbrace{C_1 \cos(\pi \underbrace{\ln(e)}_{1})}_{-1} + \underbrace{C_2 \operatorname{sen}(\pi \underbrace{\ln(e)}_{1})}_{0}\Big]$$

$$\boxed{y_{gh}(e) = \frac{-C_1}{e^2}}$$

$$y_p(e) = \frac{1}{e^2}\Big[E_1(e)C_1(-1) + E_2(e)\cdot 0\Big]$$

$$y_p(e) = \frac{-E_1(e)\,C_1}{e^2}$$

Resta avaliar $E_1(e)$

$$E_1(e) = \frac{e^2\Big[\pi((4+\pi^2)\overbrace{\ln(e)}^{1}-4)\overbrace{\cos(\pi \overbrace{\ln(e)}^{1})}^{-1} - (2(4+\pi^2)\ln(e)+\pi^2-4)\underbrace{\overbrace{\operatorname{sen}(\pi\ln(e))}^{1}}_{0}\Big]}{\pi(4+\pi^2)^2}$$

$$E_1(e) = \frac{e^2\cancel{\pi}((\cancel{4}+\pi^2)-\cancel{4})}{\cancel{\pi}(4+\pi^2)^2} = \frac{e^2\pi^2}{(4+\pi^2)^2}$$

$$y_p(e) = -\frac{\cancel{e^2}\pi^2 \; C_1}{(4+\pi^2)^2\,\cancel{e^2}} = -\frac{\pi^2 C_1}{(4+\pi^2)^2}$$

$$y_{gnh}(e) = -\frac{C_1}{e^2} - \frac{\pi^2 C_1}{(4+\pi^2)^2} = 0$$

$$\boxed{C_1 = 0}$$

Como o valor de C_1 é diferente usando a primeira e a segunda restrição <u>não existe nenhuma solução</u>

Uma segunda solução, mais rápida, era propor uma solução particular da forma

$$y_p(x) = E_1 \ln(x) + E_0$$, onde E_0 e E_1 são constantes a serem determinadas

$$y_p'(x) = \frac{E_1}{x}$$

$$y_p''(x) = -\frac{E_1}{x^2}$$

Substituindo na eq. dif. não homogênea

$$x^2 y'' + 5xy' + (4+\pi^2) y = \ln(x)$$

$$\cancel{x^2}\left(\frac{-E_1}{\cancel{x^2}}\right) + 5\cancel{x}\frac{E_1}{\cancel{x}} + (4+\pi^2)\left[E_1 \ln(x) + E_0\right] = \ln(x)$$

$$\underbrace{+4E_1 + (4+\pi^2)E_0}\ + \underbrace{(4+\pi^2)E_1}\ln(x) = 1 \ln(x) + 0$$

válida $\forall x > 0$

$$\begin{cases} (4+\pi^2)E_1 = 1 \\ 4E_1 + (4+\pi^2)E_0 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{E_1 = \frac{1}{4+\pi^2}}$$

$$\boxed{E_0 = -\frac{4}{(4+\pi^2)^2}}$$

logo $\boxed{y_p(x) = \frac{1}{4+\pi^2}\ln(x) - \frac{4}{(4+\pi^2)^2}}$

e $y_{gnh}(x) = y_{gh}(x) + y_p(x)$

Avaliando a solução particular em $x=1$ e $x=e$ temos (9)

$$y_p(1) = \frac{-4}{(4+\pi^2)^2} \quad e \quad y_p(e) = \frac{1}{4+\pi^2} - \frac{4}{(4+\pi^2)^2}$$

$$= \frac{4+\pi^2-4}{(4+\pi^2)^2} = \frac{\pi^2}{(4+\pi^2)^2}$$

$$y_{gnh}(1) = y_{gh}(1) + y_p(1) = 0$$

$$= C_1 - \frac{4}{(4+\pi^2)^2} = 0$$

$$C_1 = \frac{4}{(4+\pi^2)^2}$$

Primeira Restrição

$$y_{gnh}(e) = y_{gh}(e) + y_p(e) = 0$$

$$= -\frac{C_1}{e^2} + \frac{\pi^2}{(4+\pi^2)^2} = 0$$

$$C_1 = \frac{\pi^2 e^2}{(4+\pi^2)^2}$$

Segunda Restrição

Os valores são diferentes para C_1, logo não existe solução. ∎

2) Encontre os autovalores reais e autofunções do problema de valores de contorno:

$$y'' - \lambda y = 0\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(L) = 0$$

Note que a segunda restrição é na derivada.

Sol.: Partimos da eq. diferencial

$$y'' - \lambda y = 0$$

Propomos que $y(x) = e^{rx}$ seja uma solução

Trocas $\begin{cases} y'' \to r^2 \\ y' \to r \\ y \to 1 \end{cases}$

$$r^2 - \lambda = 0$$

$$(I) \quad r^2 = \lambda$$

Neste ponto temos três casos $\boxed{i)\ \lambda < 0}$, $\boxed{ii)\ \lambda = 0}$ e $\boxed{iii)\ \lambda > 0}$.

i) $r^2 = \lambda$ com $\lambda < 0$

$\lambda = -\mu^2$ com $\mu > 0$

$r^2 = -\mu^2$

$r = \pm \mu i$ Tipo III $(r_{1,2} = \alpha \pm \beta i)$

$\alpha = 0$ e $\beta = \mu$

$$\boxed{y_{gh}(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \operatorname{sen}(\mu x)}$$

Usando a primeira restrição: $y(0) = 0$

$$y_{gh}(0) = 0 = C_1 \underbrace{\cos(0)}_{1} + C_2 \underbrace{\text{sen}(0)}_{0}$$

$$\boxed{C_1 = 0}$$

Para usar a segunda restrição vamos derivar $y_{gh}(x)$

$$y'_{gh}(x) = -\mu C_1 \,\text{sen}(\mu x) + \mu C_2 \cos(\mu x)$$

Segunda restrição: $y'(L) = 0$

$$y'_{gh}(L) = 0 = -\mu C_1 \,\text{sen}(\mu L) + \mu C_2 \cos(\mu L)$$

Como $C_1 = 0$ da análise da primeira restrição

$$\mu C_2 \cos(\mu L) = 0$$

Queremos soluções não triviais da eq. dif., logo $C_2 \neq 0$

e $\cos(\mu L) = 0$

A função cosseno se anula quando

$\mu L = \frac{\pi}{2}$ ou $\mu L = \frac{3\pi}{2}$ na primeira volta do círculo trigonométrico

em geral.

$$\mu L = \underbrace{(2n+1)}_{\text{ímpar}} \frac{\pi}{2} \quad \text{com } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\therefore \mu = (2n+1)\frac{\pi}{2L} \quad \text{e} \quad \lambda = -\mu^2$$

$$\boxed{\lambda = -(2n+1)^2 \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$$

Autovalores

$$y_{PVC}(x) = C_2 \,\text{sen}\left((2n+1)\frac{\pi}{2L} x\right) \quad \text{com } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

não triviais

$\boxed{y_{PVC}(x) = 0 \text{ é a solução trivial}}$

Ignorando a constante C_2 as autofunções são

$$\boxed{y(x) = sen\left((2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x}{L}\right) \text{ com } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$$

- Caso ii) $r^2 = \lambda$ com $\lambda = 0$

$r^2 = 0$ Tipo II $(r_1 = r_2)$

$$y_{gh}(x) = C_1 \underbrace{e^{0x}}_{1} + C_2 \cdot x \underbrace{e^{0x}}_{1}$$

$$y_{gh}(x) = C_1 + C_2 \cdot x$$

Usando a primeira restrição $y(0) = 0$

$$y_{gh}(0) = 0 = C_1 + C_2 \cdot 0$$

$$\boxed{C_1 = 0}$$

Derivamos $y_{gh}(x)$

$$y'_{gh}(x) = C_2$$

Usamos a segunda restrição: $y'(L) = 0$

$$y'_{gh}(L) = 0 = C_2$$

$$C_2 = 0$$

Logo, neste caso somente existe a solução trivial

- Caso iii) $r^2 = \lambda$ com $\lambda > 0$

Seja $\lambda = \mu^2$ com $\mu > 0$

$r^2 = \mu^2$

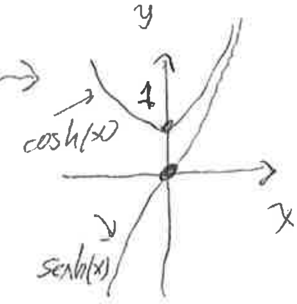
$r_{1,2} = \pm \mu$ Tipo ~~III~~ $(r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R})$

$$y_{gh}(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = D_1 \cosh(r_1 x) + D_2 \operatorname{senh}(r_2 x)$$

Vamos escrever a solução geral neste caso usando as funções hiperbólicas pois simplificam avaliar as condições de contorno

$$y_{gh}(x) = D_1 \cosh(\mu x) + D_2 \operatorname{senh}(\mu x)$$

Usando a primeira restrição : $y(0) = 0$



$$y_{gh}(0) = 0 = D_1 \underbrace{\cosh(0)}_{1} + D_2 \underbrace{\operatorname{senh}(0)}_{0}$$

$$\boxed{D_1 = 0}$$

Derivando

$$y'_{gh}(x) = \mu D_1 \operatorname{senh}(\mu x) + \mu D_2 \cosh(\mu x)$$

$D_1 = 0$ logo

$$y'_{gh}(x) = \mu D_2 \cosh(\mu x)$$

Usando a segunda restrição : $y'(L) = 0$

$$y'_{gh}(L) = 0 = \mu D_2 \underbrace{\cosh(\mu L)}_{\neq 0}$$

$$\boxed{D_2 = 0}$$

Logo, neste caso somente existe a solução trivial

– Resumindo, os autovalores e autovetores são

$$\lambda = -(2n+1)^2 \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \quad \text{com } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$y(x) = \operatorname{sen}\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{L}\right)$$

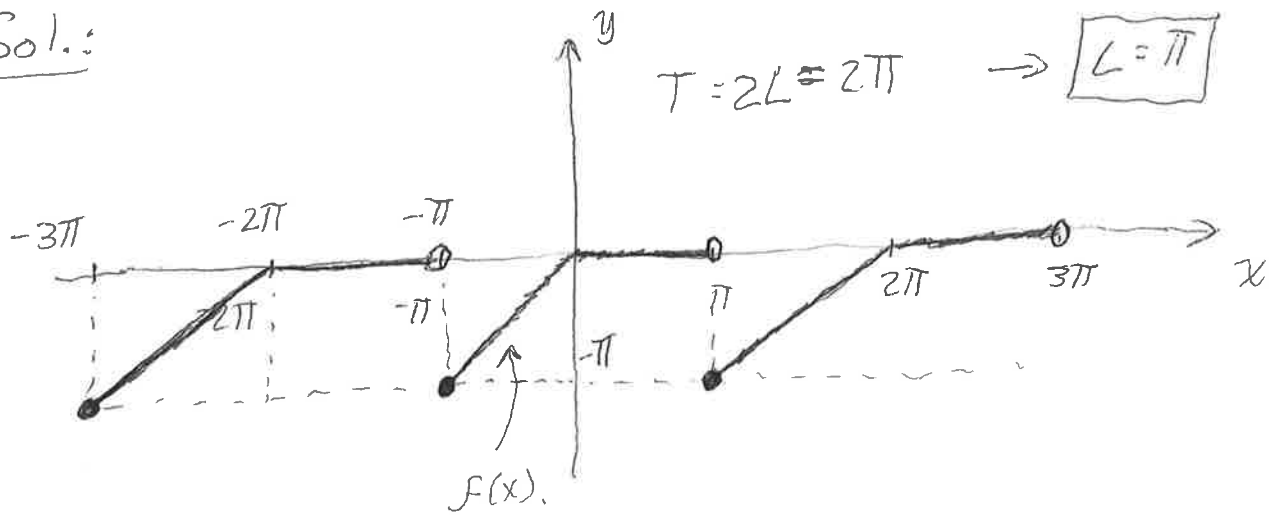
3) Encontre a série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } -\pi \le x < 0 \\ 0, & \text{se } 0 \le x < \pi \end{cases} \quad \text{e } f(x+2\pi) = f(x)$$

Faça os gráficos de $f(x)$ e das três primeiras aproximações para $f(x)$ seguindo a série de Fourier encontrada no intervalo $-2\pi \le x \le 2\pi$.

Sol.:

$T = 2L = 2\pi \rightarrow \boxed{L = \pi}$



A série de Fourier se escreve como

$$(I) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$

onde $\quad a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$

$n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx$$

Neste problema basta calcular as integrais entre $-\pi$ e zero. Entre zero e π a função é zero.

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \qquad \text{temos } \boxed{L=\pi}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{\pi}\left(0 - \frac{(-\pi)^2}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{2\pi} = -\frac{\pi}{2}$$

(II) $\boxed{a_0 = -\pi/2}$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos(nx)\,dx$$

Usando a fórmula de integração por partes

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

$$u = x \xrightarrow{\text{derivando}} du = dx$$

$$dv = \cos(nx)\,dx \xrightarrow[\text{integrando}]{} v = \frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx)$$

$$\int_{-\pi}^{0} x\cos(nx)\,dx = \frac{1}{n}x\operatorname{sen}(nx)\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\operatorname{sen}(nx)\,dx$$

$$= 0 - \cancel{(-\pi)\underbrace{\operatorname{sen}(-n\pi)}_{0}} - \frac{1}{n}(-1)\frac{1}{n}\cos(nx)\Big|_{-\pi}^{0}$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\underbrace{\cos(0)}_{1} - \underbrace{\cos(-n\pi)}\right]$$

$\cos(-n\pi) = \cos(n\pi)$ função par

$\cos(n\pi) = (-1)^n$

$$\int_{-\pi}^{0} x\cos(nx)\,dx = \frac{1}{n^2}\left(1-(-1)^n\right)$$

n par, $n=2k$ $\swarrow$ $\qquad$ $\searrow$ n impar, $n=2k-1$

$$\int_{-\pi}^{0} x\cos(nx)\,dx = 0 \qquad\qquad \int_{-\pi}^{0} x\cos(nx)\,dx = \frac{2}{n^2}$$

$\downarrow$

(III) $\boxed{a_{n\ \text{impar}} = a_{2k-1} = \frac{1}{\pi}\frac{2}{(2k-1)^2}}$ $\quad k=1,2,\dots$

Vamos calcular agora b_n

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx$$

, com $L=\pi$ temos $f(x)=x$ quando $-\pi \le x < 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\,\mathrm{sen}(nx)\,dx$$

$u = x \longrightarrow du = dx$

$dv = \mathrm{sen}(nx)\,dx \longrightarrow v = -\frac{1}{n}\cos(nx)$

$$\int_{-\pi}^{0} x\,\mathrm{sen}(nx)\,dx = -\frac{x}{n}\cos(nx)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\cos(nx)\,dx$$

$$= -\frac{1}{n}\left(0-(-\pi)\cos(-n\pi)\right) + \frac{1}{n^2}\,\mathrm{sen}(nx)\Big|_{-\pi}^{0}$$

$$= -\frac{\pi}{n}(-1)^n + \frac{1}{n^2}\left(0-\cancel{\mathrm{sen}(-n\pi)}^{\,0}\right)$$

$$\int_{-\pi}^{0} x\,\mathrm{sen}(nx)\,dx = -\frac{\pi}{n}(-1)^n$$

logo $b_n = \frac{1}{\pi} \frac{-\pi}{n}(-1)^n$

(IV) $\boxed{b_n = \frac{-(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}}$

Subtituindo (II), (III) e (IV) em (I) temos

$$\boxed{f(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\right)}_{\text{troca de } k \to n} \cos((2n-1)x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nx)}$$

As três primeiras aproximações são

(1) $f(x) \approx -\pi/4$

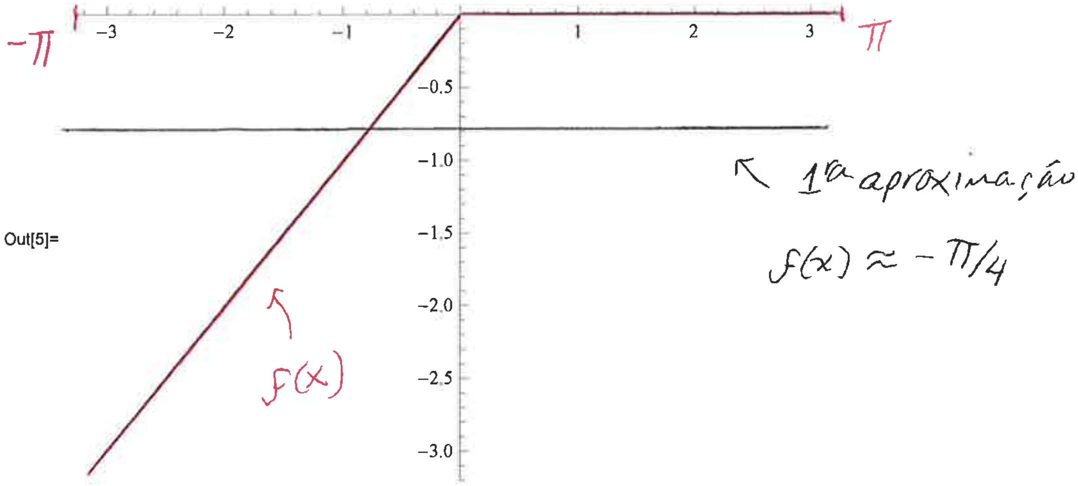
(2) $f(x) \approx -\pi/4 + \frac{2}{\pi}\cos(x) + \operatorname{sen}(x)$

(3) $f(x) \approx -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + \frac{2}{9\pi}\cos(3x) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$

Os gráficos são os mostrados na próxima página.

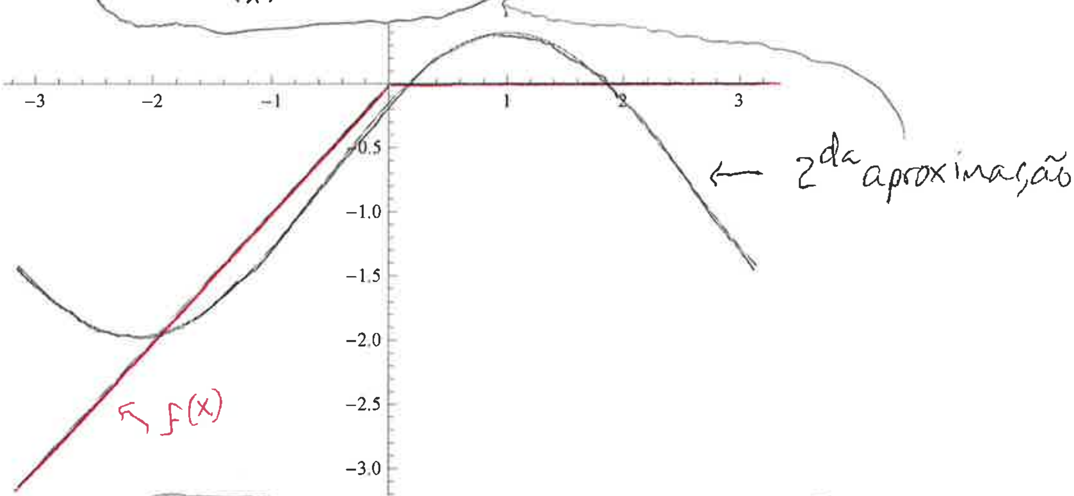
```
In[5]:= Plot[{-π / 4, If[ 0 < x < π, 0, x]}, {x, -π, π}]
```

Out[5]=



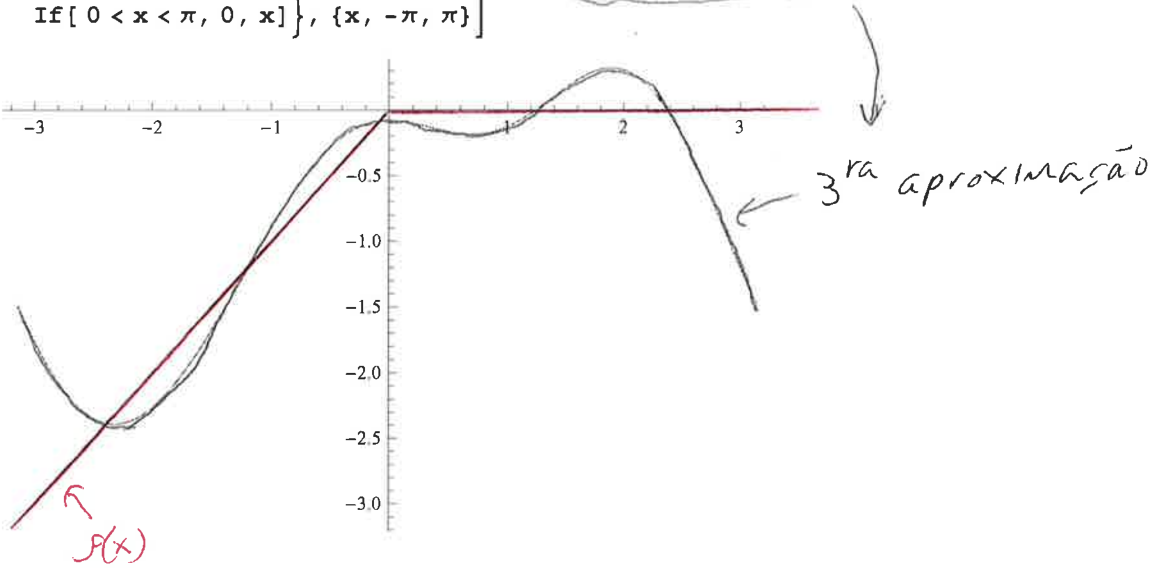

```
Plot[-π / 4, {x, -2 π, 2 π}]
In[12]:= Plot[{(-π / 4) + (2/π) Cos[x] + Sin[x], If[ 0 < x < π, 0, x]}, {x, -π, π}]
```

Out[12]=




```
In[13]:= Plot[{(-π / 4) + (2/π) Cos[x] + Sin[x] + (2/(9 π)) Cos[3 x] - (1/2) Sin[2 x],
   If[ 0 < x < π, 0, x]}, {x, -π, π}]
```

Out[13]=



4) Faça uma extensão periódica par da função

$f(x) = x^2 - 2x$ se $0 < x < 4$

Encontre a série de Fourier da extensão anterior. Esboce os gráficos de $f(x)$ e das três primeiras aproximações para $g(x)$ seguindo a série de Fourier encontrada anteriormente no intervalo $-4 \leq x \leq 4$.

Sol.: $f(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$ parábola

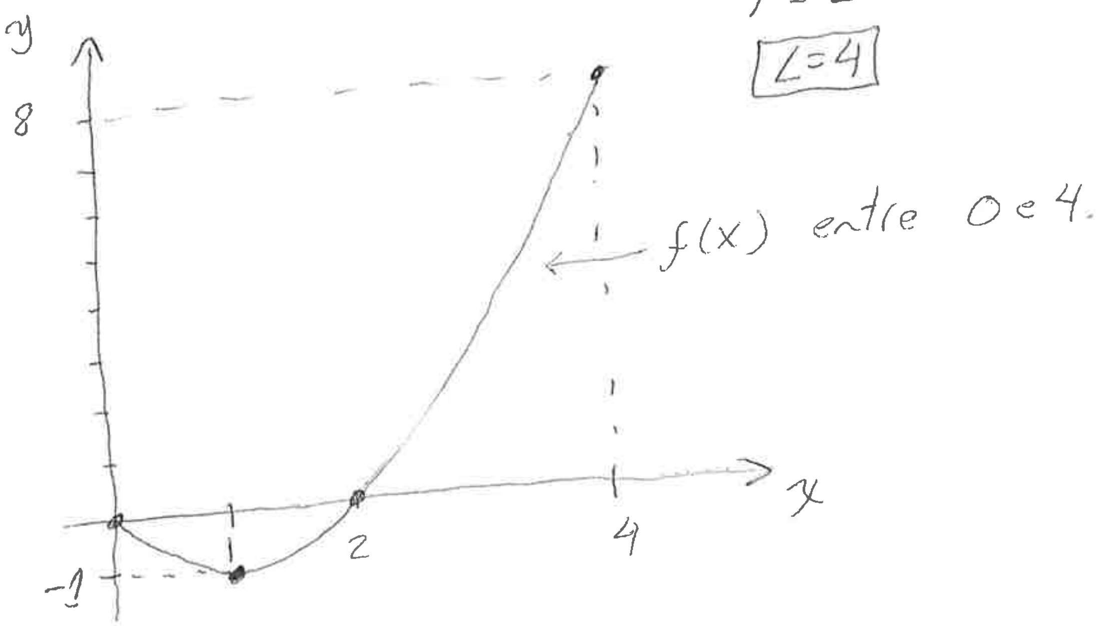
$f'(x) = 2x - 2 \rightarrow x = 1$ ponto de mínimo de $f(x)$.

$f''(x) = 2 > 0$

$f(0) = f(2) = 0$ e $f(1) = -1$

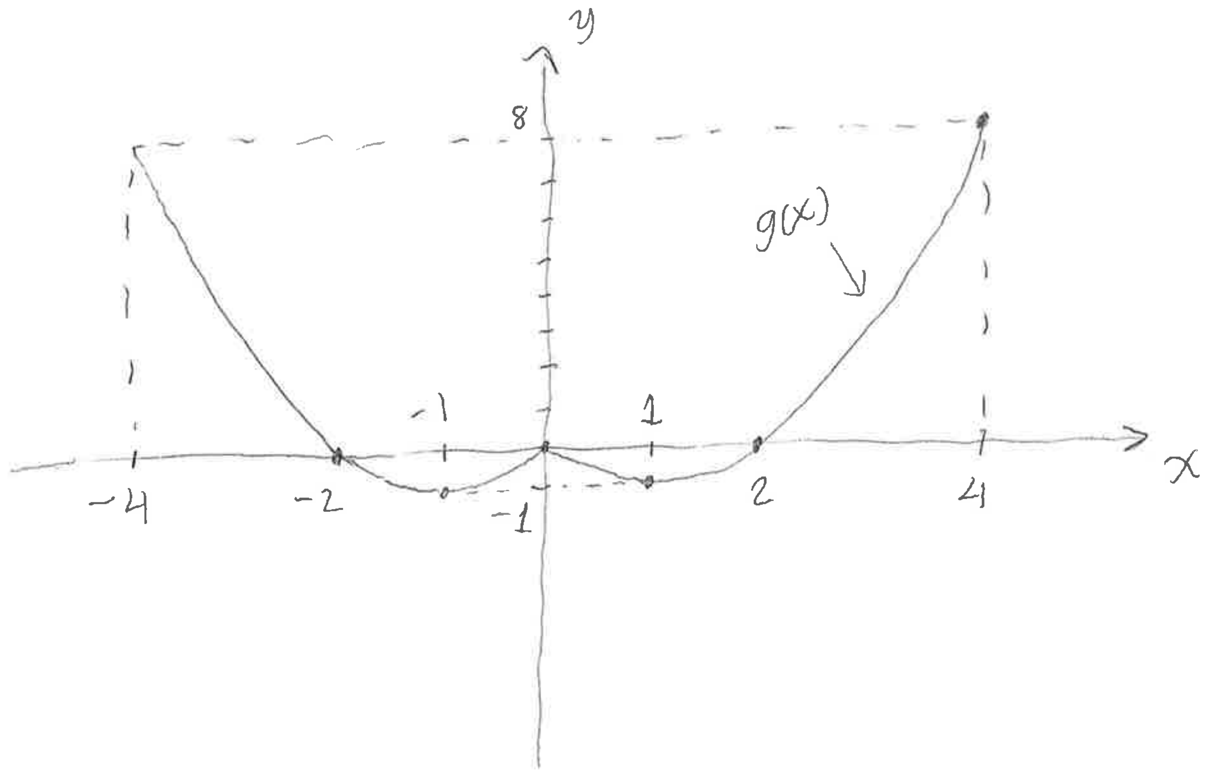
$f(4) = 4(4-2) = 8$

$T = 2L$ com $\boxed{L = 4}$



Seja $g(x)$ a extensão periódica par.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } 0 < x < 4 \\ f(-x) & \text{se } -4 \leq x \leq 0 \end{cases} \quad \text{e } g(x+8) = g(x).$$



$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{se } 0 < x < 4 \\ x^2 + 2x, & \text{se } -4 \, x \leq 0 \end{cases} \quad \text{e } g(x+8) = g(x)$$

A série de Fourier de g(x) terá a forma

$$\cancel{g(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{2}{L} \int_0}$$

$$(I) \begin{cases} g(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \\ \text{e} \quad a_0 = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L g(x)\, dx \\ a_n = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L g(x) \cos\left(n \frac{\pi}{L} x\right) dx, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$b_n = 0 \quad \forall n$

As funções senos não aparecem porque são ímpares

Calculando a_0

$$a_0 = \frac{2}{4}\int_0^4 (x^2-2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}}\right)\Big|_0^4$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{4^3}{3} - 4^2\right) = \frac{4^2}{2}\left(\frac{4}{3}-1\right) = \frac{8}{3}$$

(II) $\boxed{a_0 = \frac{8}{3}}$

Calculando a_n

$$a_n = \frac{2}{4}\int_0^4 (x^2-2x)\cos\left(n\frac{\pi}{4}x\right)dx$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\int_0^4 x^2\cos\left(n\frac{\pi}{4}x\right)dx}_{\text{integral por partes duas vezes}} - 2\underbrace{\int_0^4 x\cos\left(n\frac{\pi}{4}x\right)dx}_{\text{integral por partes uma vez}}\right]$$

Usando um recurso computacional. Por exemplo, www.wolframalpha.com

$$a_n = \frac{1}{2}\left[\frac{128(-1)^n}{n^2\pi^2} - 2\cdot\frac{16(-1+(-1)^n)}{n^2\pi^2}\right]$$

- Se n for par ($n=2k$)

$$a_n = \frac{64}{n^2\pi^2} \quad \text{ou} \quad a_{2k} = \frac{64}{4k^2\pi^2} = \frac{16}{k^2\pi^2}$$

$$\boxed{a_{2k} = \frac{16}{k^2\pi^2}} \quad \text{(IIIa)}$$

- Se n for ímpar ($n=2k-1$)

$$a_n = \frac{-32}{n^2\pi^2} \quad \text{ou} \quad \boxed{a_{2k-1} = \frac{-32}{(2k-1)^2\pi^2}} \quad \text{(IIIb)}$$

Substituindo (II), (IIIa) e (IIIb) em (I)

$$g(x) = \frac{4}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{k^2\pi^2} \cos\left(\cancel{2k}\frac{\pi}{4}x\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-32}{(2k-1)^2\pi^2} \cos\left((2k-1)\frac{\pi}{4}x\right)$$

$$\boxed{g(x) = \frac{4}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{k^2\pi^2} \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-32}{(2k-1)^2\pi^2} \cos\left((2k-1)\frac{\pi}{4}x\right)}$$

As três primeiras aproximações são

(1) $g(x) \approx \frac{4}{3}$

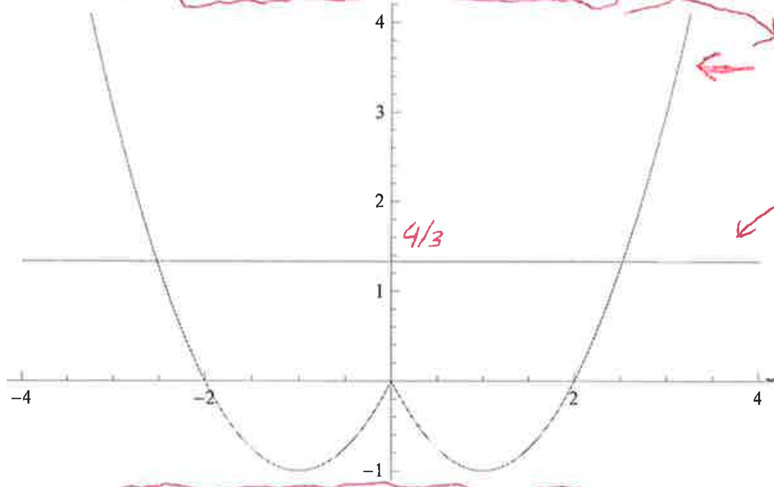
(2) $g(x) \approx \frac{4}{3} + \frac{16}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{32}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

(3) $g(x) \approx \frac{4}{3} + \frac{16}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{32}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + \frac{4}{\pi^2}\cos(\pi x) - \frac{32}{9\pi^2}\cos\left(\frac{3}{4}\pi x\right)$

Veja gráficos na próxima página

In[2]:= `Plot[{4 / 3, If[ 0 < x < 4, x (x - 2), x (x + 2)]}, {x, -4, 4}]`

Out[2]=

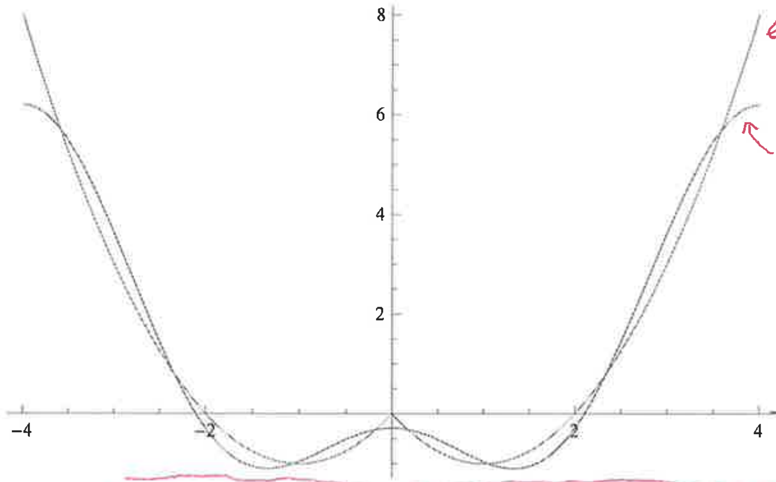


$g(x)$

1ra aproximação

In[3]:= $\text{Plot}\left[\left\{(4/3) + \frac{16}{\pi^2}\,\text{Cos}\left[\frac{\pi}{2}\,x\right] - \frac{32}{\pi^2}\,\text{Cos}\left[\frac{\pi}{4}\,x\right],\ \text{If}[\,0 < x < 4,\ x\,(x-2),\ x\,(x+2)]\right\},\ \{x, -4, 4\}\right]$

Out[3]=

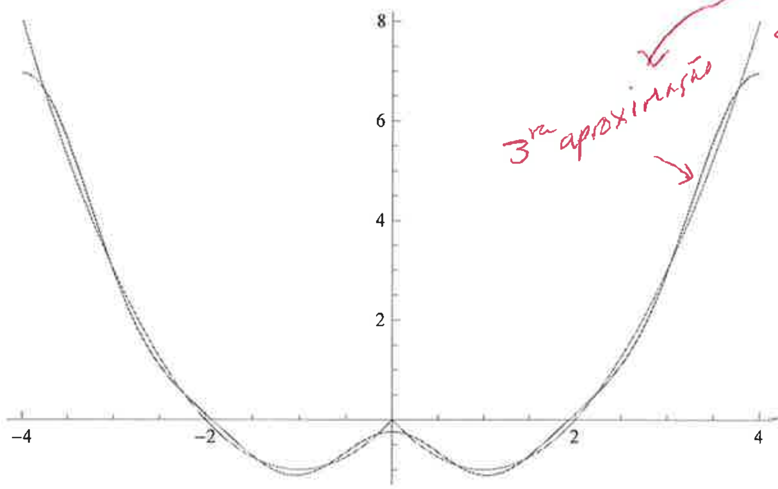


$g(x)$

2da aproximação

In[4]:= $\text{Plot}\left[\left\{(4/3) + \frac{16}{\pi^2}\,\text{Cos}\left[\frac{\pi}{2}\,x\right] - \frac{32}{\pi^2}\,\text{Cos}\left[\frac{\pi}{4}\,x\right] + \frac{4}{\pi^2}\,\text{Cos}[\pi\,x] - \frac{32}{9\,\pi^2}\,\text{Cos}\left[\frac{3\,\pi}{4}\,x\right],\ \text{If}[\,0 < x < 4,\ x\,(x-2),\ x\,(x+2)]\right\},\ \{x, -4, 4\}\right]$

Out[4]=



$g(x)$

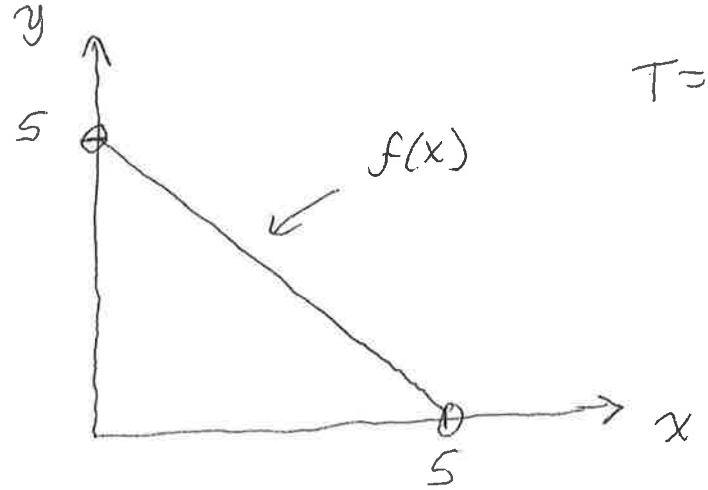
3ra aproximação

5) Faça uma extensão periódica ímpar da função $f(x) = 5 - x$ se $0 < x < 5$. Seja $g(x)$ a extensão periódica ímpar de $f(x)$. Encontre a serie de Fourier de $g(x)$. Esboce os graficos de $f(x)$ e das três primeiras aproximações para $g(x)$ seguindo a serie de Fourier encontrada anteriormente no intervalo

$-5 \leq x \leq 5$.

Sol.: $f(x) = 5 - x \quad , \quad 0 < x < 5$

$f(0) = 5$
$f(5) = 0$

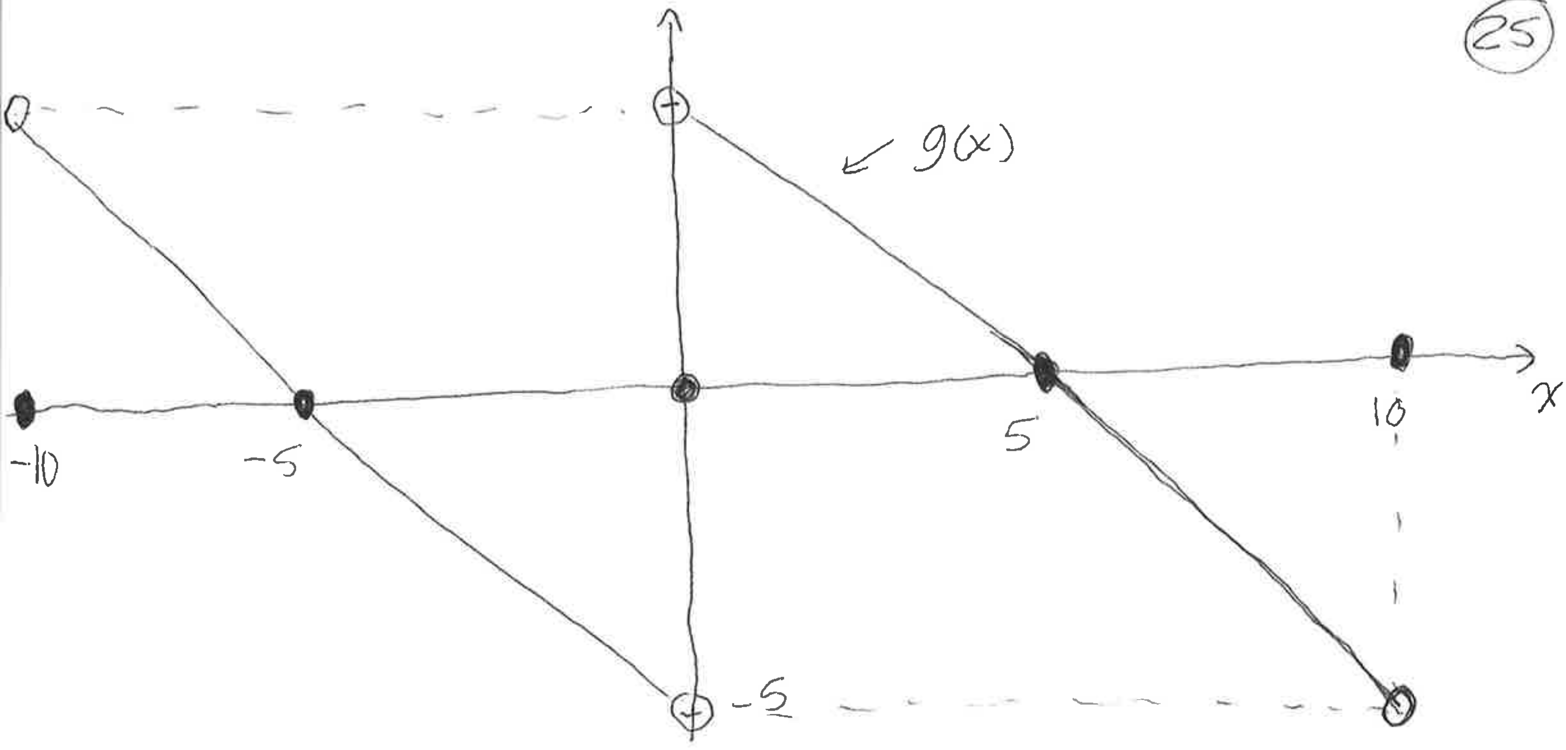


$T = 2L = 2 \cdot 5 = 10$

$\boxed{L = 5}$

Seja $g(x)$ a extensão periódica ímpar de $f(x)$. Analiticamente, quando $-5 < x < 0$ devemos trocar $f(x)$ por $-f(x)$. Adicionalmente, $g(0) = g(L) = 0$.

$$g(x) = \begin{cases} 5 - x & , \quad 0 < x < 5 \\ 0 & , \text{ se } x = 0, \ x = 5 \\ -5 - x & , \text{ se } -5 < x < 0 \end{cases} \quad \text{e } g(x+10) = g(x)$$



A série de Fourier de $g(x)$ terá a forma

(I)
$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$

com
$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx$$

$a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
pois a função constante e a função cosseno são pares

Vamos calcular os b_n, basta integral entre 0 e 5.

$$b_n = \frac{2}{5}\int_0^5 (5-x)\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{5}x\right)dx$$

$$b_n = \frac{2}{5}\left[\int_0^5 5\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{5}x\right)dx - \int_0^5 x\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{5}x\right)dx\right]$$

$$b_n = 2(-1)\cos\left(n\frac{\pi}{5}x\right)\cdot\frac{5}{n\pi}\Big|_0^5 - \frac{2}{5}\underbrace{\int_0^5 x\,\text{sen}\left(n\frac{\pi}{5}x\right)dx}_{\text{por partes}}$$

$$b_n = -\frac{10}{n\pi}\Big[\underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} - \underbrace{\cos(0)}_{1}\Big] - \frac{2}{5}\boxed{\frac{(-25)(-1)^n}{n\pi}}$$

$$b_n = \frac{10}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] + \frac{10}{n\pi}(-1)^n$$

(II) $\boxed{b_n = \frac{10}{n\pi}}$

Subtituindo (II) em (I) temos

$$\boxed{g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{n\pi}\,\text{sen}\left(n\frac{\pi}{5}x\right)}$$

As três primeiras aproximações são

1. $g(x) \approx \frac{10}{\pi}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}x\right)$

2. $g(x) \approx \frac{10}{\pi}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}x\right) + \frac{5}{\pi}\,\text{sen}\left(2\frac{\pi}{5}x\right)$

3. $g(x) \approx \frac{10}{\pi}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}x\right) + \frac{5}{\pi}\,\text{sen}\left(2\frac{\pi}{5}x\right) + \frac{10}{3\pi}\,\text{sen}\left(3\cdot\frac{\pi}{5}x\right)$

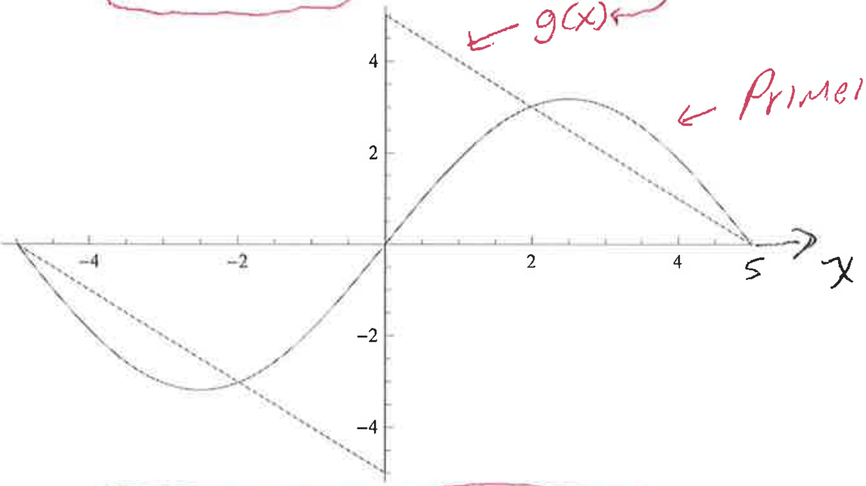
Veja os gráficos na próxima página

In[1]:= `Plot[{(10 / π) Sin[1/5 π x], If[ 0 < x < 5, 5 - x, -5 - x]}, {x, -5, 5}]`

← g(x) ←

← Primeira Aproximação

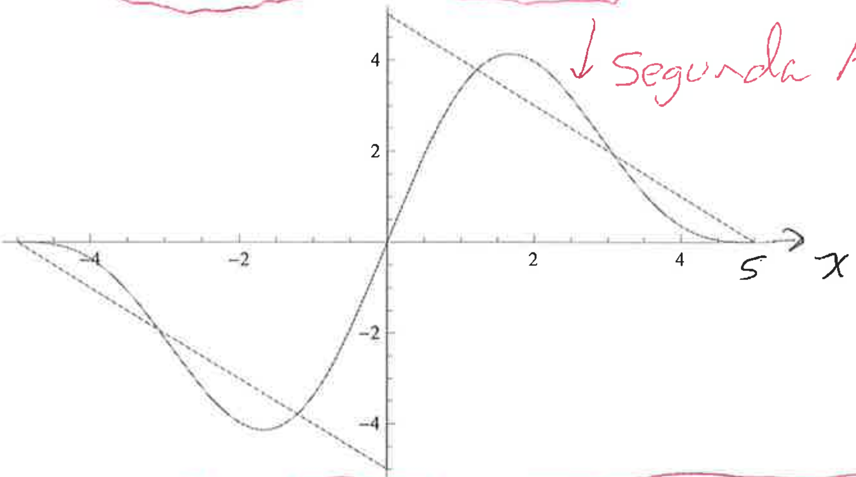
Out[1]=



In[2]:= `Plot[{(10 / π) Sin[1/5 π x] + (5 / π) Sin[2/5 π x], If[ 0 < x < 5, 5 - x, -5 - x]}, {x, -5, 5}]`

↓ Segunda Aproximação

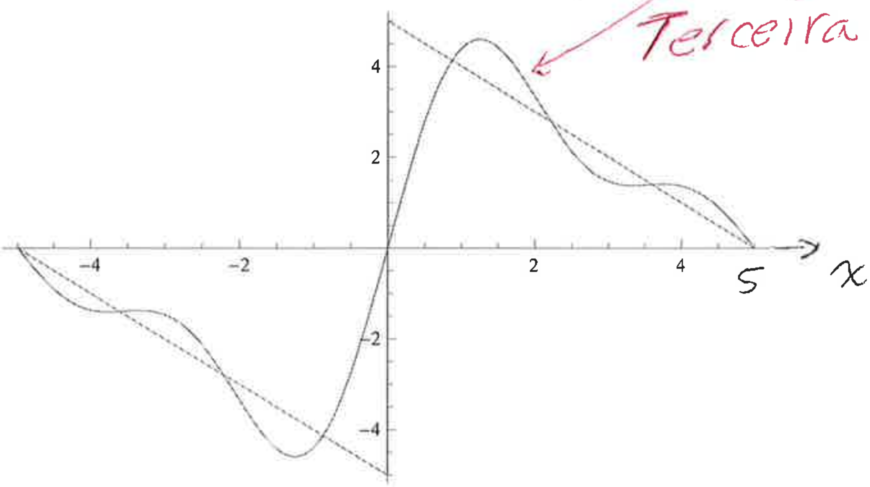
Out[2]=



In[3]:= `Plot[{(10 / π) Sin[1/5 π x] + (5 / π) Sin[2/5 π x] + (10 / (3 π)) Sin[3/5 π x], If[ 0 < x < 5, 5 - x, -5 - x]}, {x, -5, 5}]`

Terceira Aproximação

Out[3]=

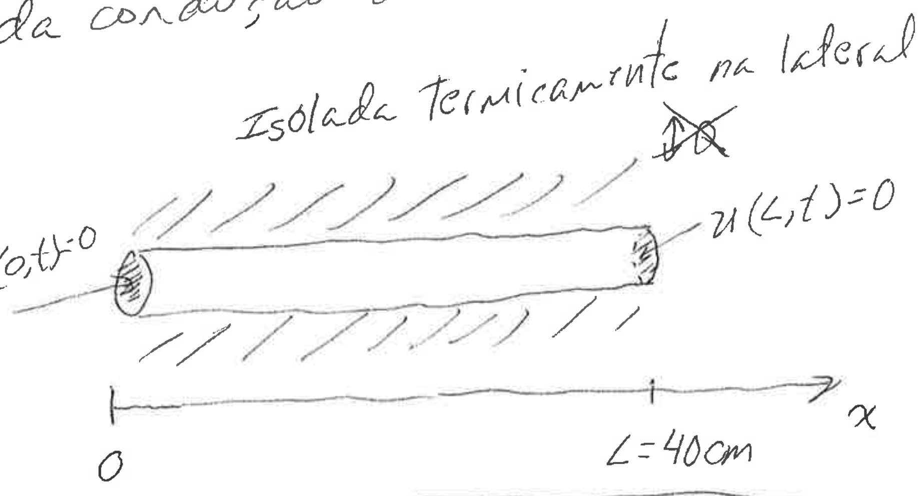


6) Considere a condução do calor em uma barra com 40 cm de comprimento cujas extremidades são mantidas à temperatura de 0°C para todo $t>0$. A superfície lateral da barra está completamente isolada termicamente. Encontre uma expressão para a temperatura $u(x,t)$ quando a distribuição inicial de temperaturas for:

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x < 10 \\ 50 & \text{se } 10 \le x \le 30 \\ 0 & \text{se } 30 < x < 40 \end{cases}$$

Considere $\alpha = 1$ e faça os gráficos "u vs. t" e "u vs. x" usando os primeiros somandos da solução para diferentes valores de x e t, respectivamente.

Sol.: Problema Homogêneo pelas condições de contorno ($u(0,t) = u(L,t) = 0$) da condução do calor.



$u(x,t) = ?$ ↑ significa Temperatura

Eq. Dif. em derivada parciais $\rightarrow$ $\alpha^2 u_{xx} = u_t \quad , \quad t>0 \quad , \quad 0<x<40$

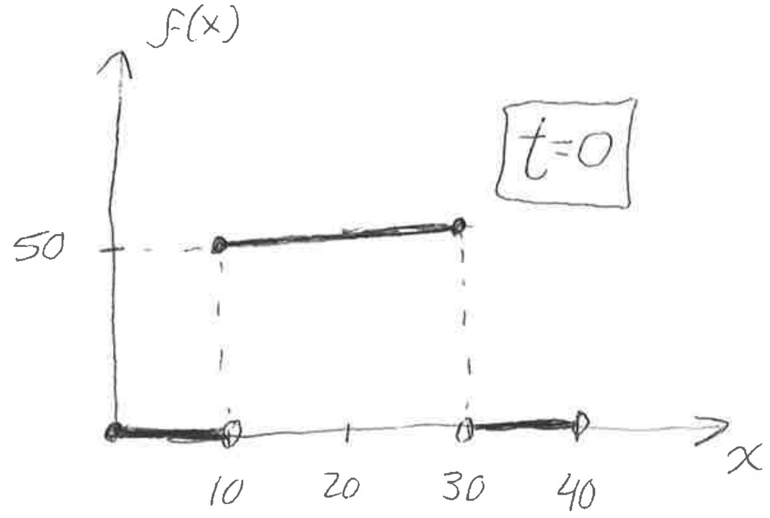
$u(0,t) = u(40,t) = 0 \quad , \quad t>0$ ← Condição de Contorno Homogênea

$$f(x) = u(x,0) = \begin{cases} 0 & , \ 0 \le x < 10 \\ 50 & , \ 10 \le x \le 30 \\ 0 & , \ 30 < x < 40 \end{cases}$$ ← Condição Inicial

A solução para esse problema é

(I) $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{L} x\right)$$

onde $C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx$ e $n \in \mathbb{N}$



$$C_n = \frac{\cancel{2}}{\cancel{40}_{2}} \int_{10}^{30} 5\cancel{0} \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{40}x\right)dx$$

Basta integrar entre 10 e 30. Entre 0 e 10 e 30 e 40 $f(x)=0$.

$$C_n = \frac{5}{2}\int_{10}^{30} \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{40}x\right)dx$$

$$C_n = \frac{5}{\cancel{2}}(-1)\cos\left(n\frac{\pi}{40}x\right)\frac{\overset{2}{\cancel{40}}}{n\pi}\Bigg|_{10}^{30} = -\frac{100}{n\pi}\left[\cos\left(n\frac{\pi}{4\cancel{0}}3\cancel{0}\right) - \cos\left(n\frac{\pi}{4\cancel{0}}1\cancel{0}\right)\right]$$

$$C_n = -\frac{100}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{3}{4}n\pi\right) - \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

(II) $$\boxed{C_n = \frac{100}{n\pi}\left[\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3}{4}n\pi\right)\right]}$$

Subtituindo (II) em (I) teremos

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{n\pi}\left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3}{4}n\pi\right)\right) e^{-\alpha^2\left(\frac{n\pi}{40}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{40}x\right)}$$

As primeiras aproximações serão $(\alpha = 1)$

① $u(x,t) \approx \frac{100}{\pi} \underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - (-1)\frac{\sqrt{2}}{2} \right)}_{\sqrt{2}} e^{-\left(\frac{\pi}{40}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{40} x\right)$

$$u(x,t) \approx \frac{100\sqrt{2}}{\pi} \underbrace{e^{-\left(\frac{\pi}{40}\right)^2 t}}_{\text{decrescente no tempo}} \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{40} x\right)}_{\text{oscilatória em } x} = u_1(x,t)$$

Veja os gráficos nas duas próximas páginas

- O segundo termo do somatório é

$$u_2(x,t) = \frac{50}{\pi} \Big(\underbrace{\cos(\pi/2)}_{0} - \underbrace{\cos\left(\tfrac{3}{2}\pi\right)}_{0} \Big) e^{-\left(\frac{\pi}{20}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{20} x\right)$$

$$u_2(x,t) = 0$$

- O terceiro termo do somatório é

$$u_3(x,t) = \frac{100}{3\pi} \Big(\underbrace{\cos\left(\tfrac{3\pi}{4}\right)}_{-\frac{\sqrt{2}}{2}} - \underbrace{\cos\left(\tfrac{9}{4}\pi\right)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Big) e^{-\left(\frac{3\pi}{40}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{40}\pi x\right)$$

$$u_3(x,t) = -\frac{200}{3\pi}\sqrt{2}\, e^{-\left(\frac{3\pi}{40}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{40}\pi x\right)$$

A terceira aproximação será

$$u(x,t) \approx \frac{100\sqrt{2}}{\pi} e^{-\left(\frac{\pi}{40}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{40} x\right) - \frac{200}{3\pi}\sqrt{2}\, e^{-\left(\frac{3\pi}{40}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{40}\pi x\right)$$

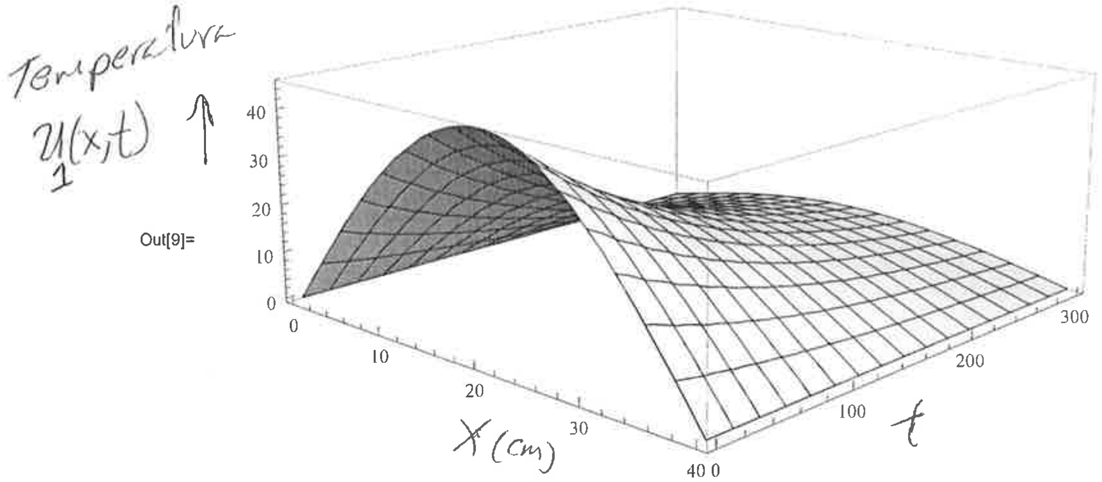
31

Pegando somente o primeiro termo do somatório

$u_1(x,t)$

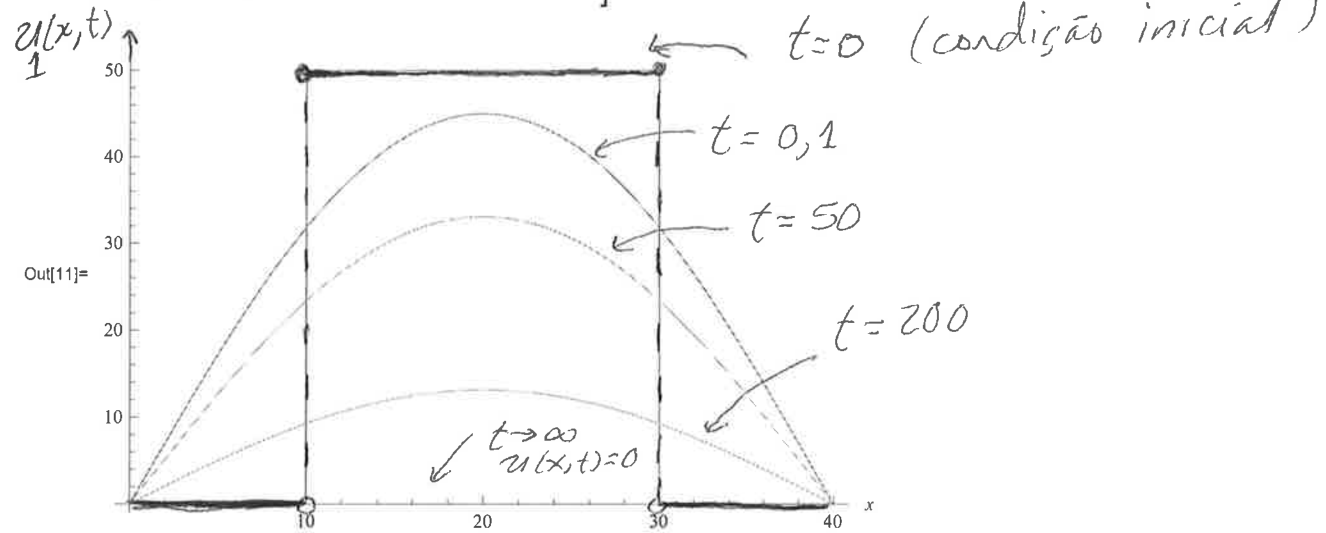
```
In[9]:= Plot3D[(100 √2 / π) Sin[1/40 π x] e^(-(π/40)^2 t),
    {x, 0, 40}, {t, 0.1, 300}, AxesLabel → Automatic]
```

Out[9]=



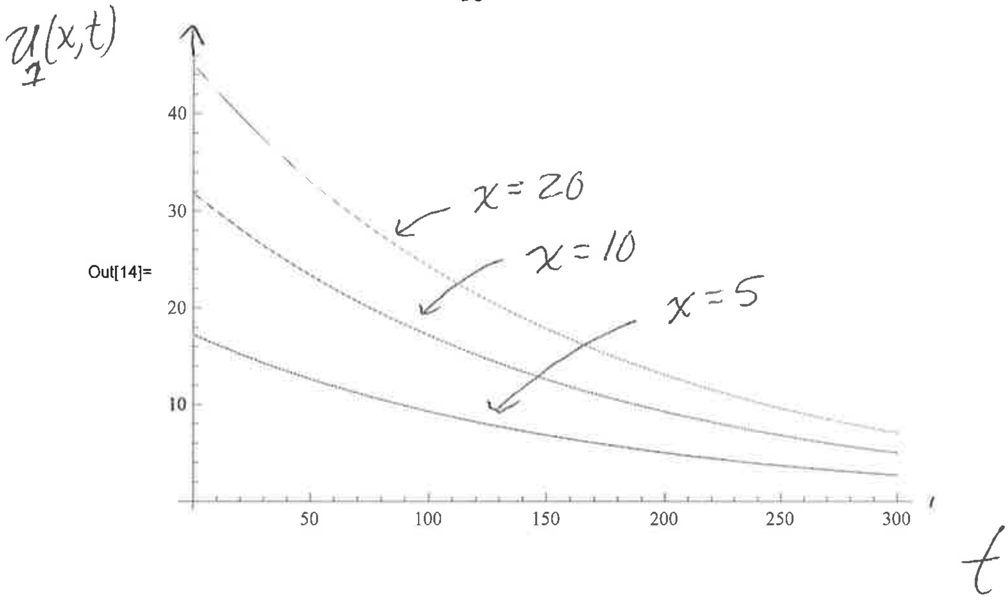

```
In[11]:= Plot[{If[ 10 < x < 30, 50, 0], (100 √2 / π) Sin[1/40 π x] e^(-(π/40)^2 0.1),
    (100 √2 / π) Sin[1/40 π x] e^(-(π/40)^2 50), (100 √2 / π) Sin[1/40 π x] e^(-(π/40)^2 200),},
    {x, 0, 40}, AxesLabel → Automatic]
```

Out[11]=



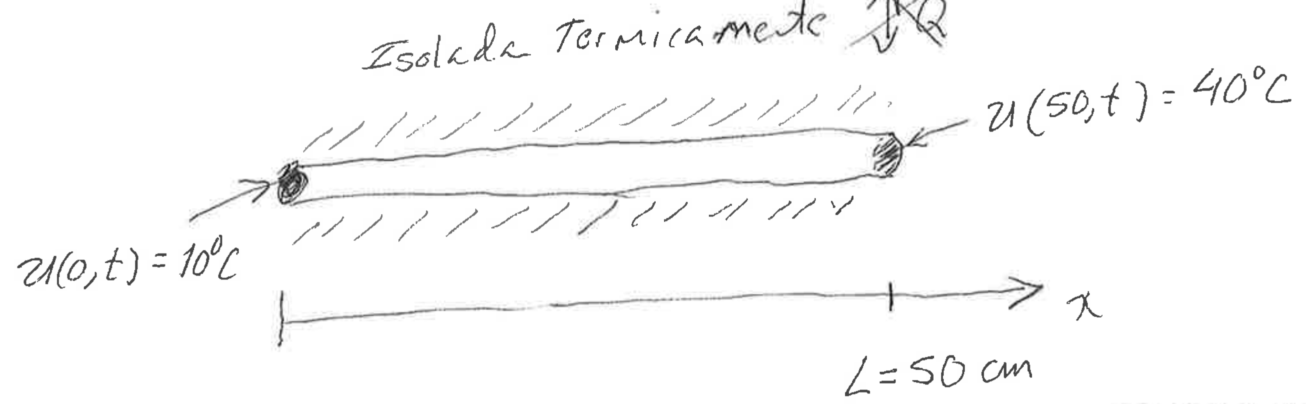
```
In[14]:= Plot[{(100 √2 / π) Sin[1/40 π 5] e^(-(π/40)^2 t), (100 √2 / π) Sin[1/40 π 10] e^(-(π/40)^2 t),
  (100 √2 / π) Sin[1/40 π 20] e^(-(π/40)^2 t),}, {t, 0.1, 300}, AxesLabel → Automatic]
```

Out[14]=



7) Considere a condução do calor em uma barra com 50 cm de comprimento cujas extremidades são mantidas à temperatura de 10°C em $x=0$ e 40°C em $x=50$ cm para todo $t>0$. A superfície lateral da barra está completamente isolada termicamente. Encontre uma expressão para a temperatura $u(x,t)$ quando a distribuição inicial de temperaturas for $u(x,0)=x$, se $0\leq x\leq 50$. Considere $\alpha=1$ e faça os gráficos "u vs. t" e "u vs. x" usando os primeiros somandos da solução para diferentes valores de x e t, respectivamente.

Sol.: Problema de Condução do Calor com condições de fronteira NÃO homogêneas.



Eq. Dif. em derivadas parciais $\rightarrow$ $\alpha^2 u_{xx}(x,t) = u_t(x,t)$, $t>0$, $0<x<50$

Condições de Fronteira não h. $\rightarrow$ $u(0,t)=10°C$ e $u(50,t)=40°C$, $t>0$

Condição Inicial $\rightarrow$ $u(x,0)=x$, $t=0$, $0\leq x\leq 50$

$f(x)=x$, $T=2L$, $L=50$

Devemos procurar a solução na forma

$$u(x,t) = \underbrace{v(x)}_{\substack{\text{solução} \\ \text{estacionária} \\ \text{quando } t\to\infty}} + \underbrace{w(x,t)}_{\substack{\text{solução} \\ \text{transiente}}}$$

A solução estacionária tem a forma

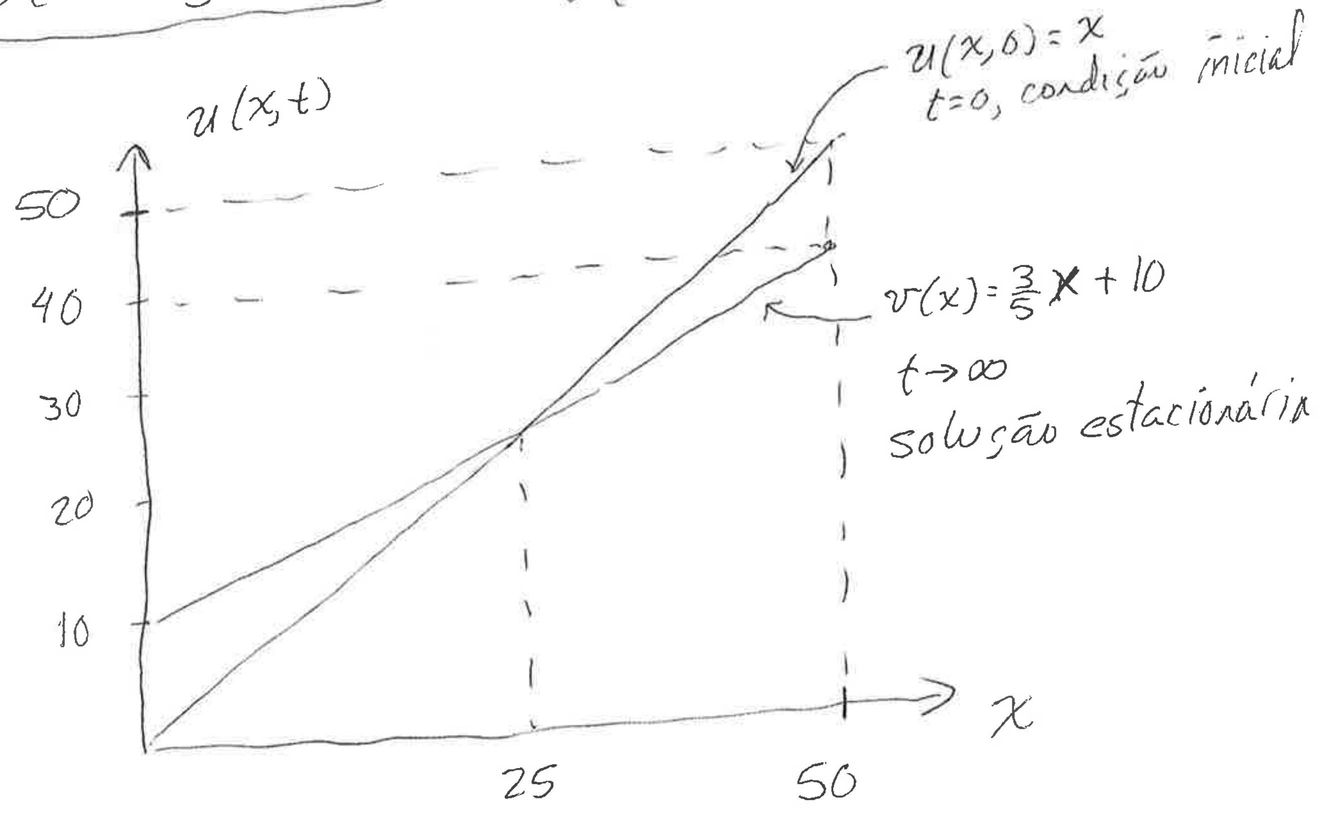
$$v(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}\, x + T_1$$

onde T_2 é a temperatura fixa em $x=0$ e
T_1 " " " " $x=L$

Neste problema temos

$$v(x) = \frac{40-10}{50}\, x + 10$$

$$\boxed{v(x) = \frac{3}{5}x + 10} \quad \begin{aligned} &v(0) = 10 \\ &v(50) = 40 \end{aligned}$$



A função $w(x,t)$ satifaz a mesma eq. diferencial, com condições de contorno homogênea e condição inicial decrescida da solução estacionária.

Isto é,

$$\alpha^2 w_{xx}(x,t) = w_t(x,t) \quad \leftarrow \text{Eq. Dif}$$
$$t>0,\ 0<x<L$$

$$w(0,t) = w(L,t) = 0 \quad \leftarrow \text{Condições de Contorno Homogêneas}$$
$$t>0$$

$$w(x,0) = u(x,0) - v(x) \quad \leftarrow \text{Condição Inicial}$$
$$t=0,\ 0 \le x \le L$$

A solução para $w(x,t)$ é da mesma forma do problema anterior.

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{L} x\right)$$

onde $C_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[u(x,0) - v(x)\right] \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{L} x\right) dx$

e a solução para $u(x,t)$ será

$$u(x,t) = v(x) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{L} x\right)$$

onde $C_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[u(x,0) - v(x)\right] \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{L} x\right) dx$

Vamos calcular os C_n. Note que

$$u(x,0) - v(x) = \cancel{x} - \left(\frac{3}{5} x + 10\right)$$

$$\boxed{u(x,0) - v(x) = \frac{2}{5} x - 10}$$

$$C_n = \frac{2}{50}\int_0^{50}\left(\frac{2}{5}x-10\right)\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{50}x\right)dx$$

Após várias contas encontramos

$$C_n = -\frac{20}{n\pi}\left(1+(-1)^n\right)$$

- se n é ímpar os $C_n = 0$
- se n é par $(n=2k)$ temos

$$C_n = -\frac{40}{n\pi} \quad \text{ou}$$

$$C_{2k} = -\frac{20}{k\pi}$$

Logo, a solução do problema será $(\alpha=1)$

$$u(x,t) = \frac{3}{5}x + 10 + \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{20}{k\pi} e^{-\left(\frac{2k\pi}{50}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\cancel{2k}\frac{\pi}{50}x\right)$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{3}{5}x + 10 - \frac{20}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} e^{-\left(\frac{k\pi}{25}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{25}x\right)}$$

A primeira aproximação é

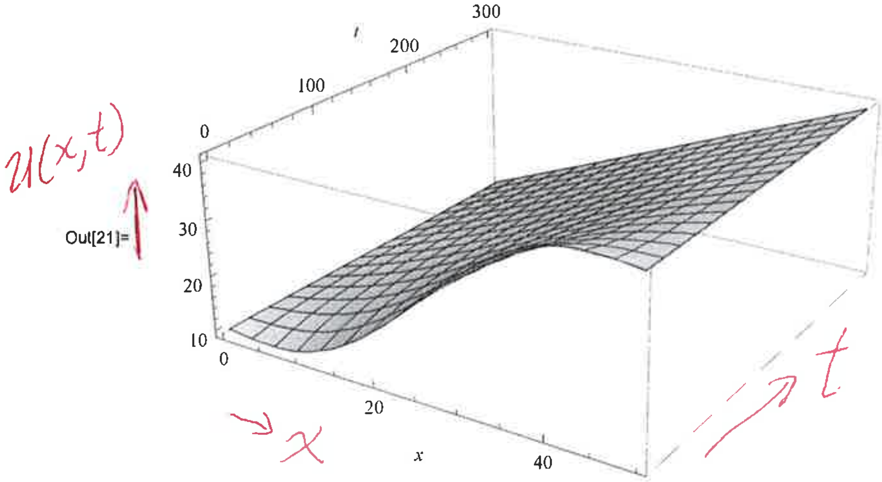
$$u(x,t) \approx \frac{3}{5}x + 10 - \frac{20}{\pi} e^{-\left(\frac{\pi}{25}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{25}x\right)$$

Veja os gráficos a seguir

Primeiro Termo do Somatório + Estacionária

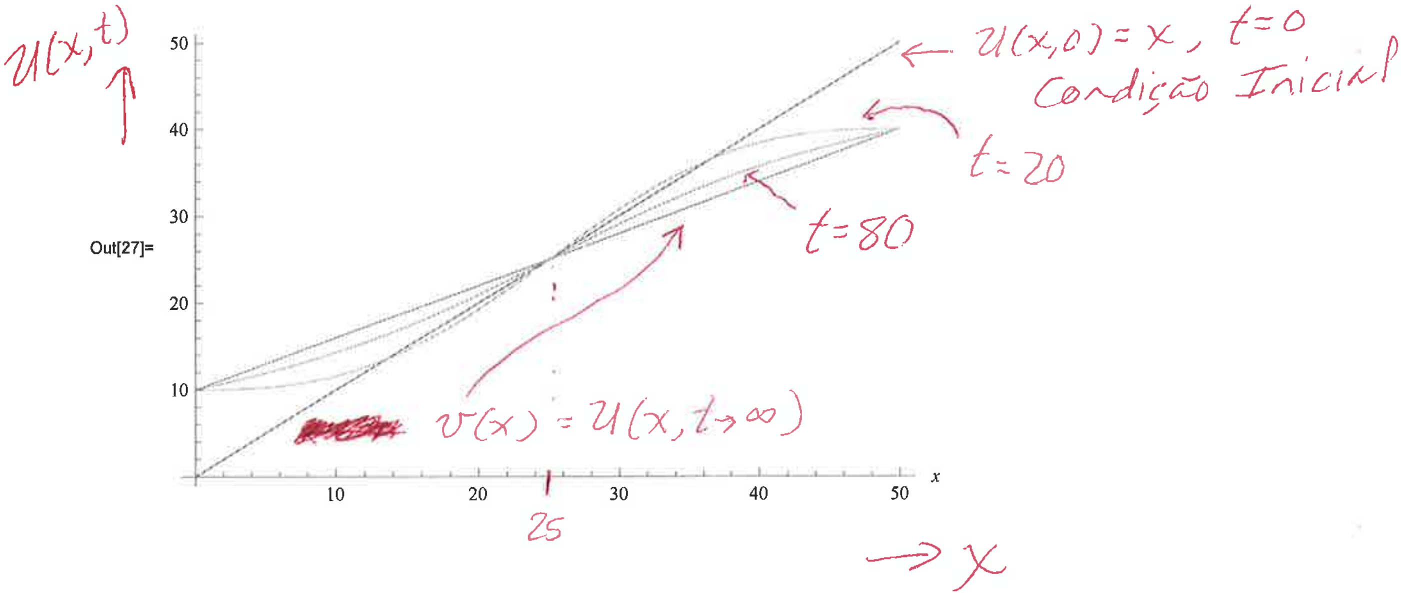
In[21]:= $\text{Plot3D}\left[\frac{3}{5}\,x + 10 - (20/\pi)\,\text{Sin}\left[\frac{1}{25}\,\pi\,x\right]\,e^{-\left(\frac{\pi}{25}\right)^{2} t},\right.$
$\left.\{x, 0, 50\}, \{t, 0.1, 300\}, \text{AxesLabel} \to \text{Automatic}\right]$

Out[21]=



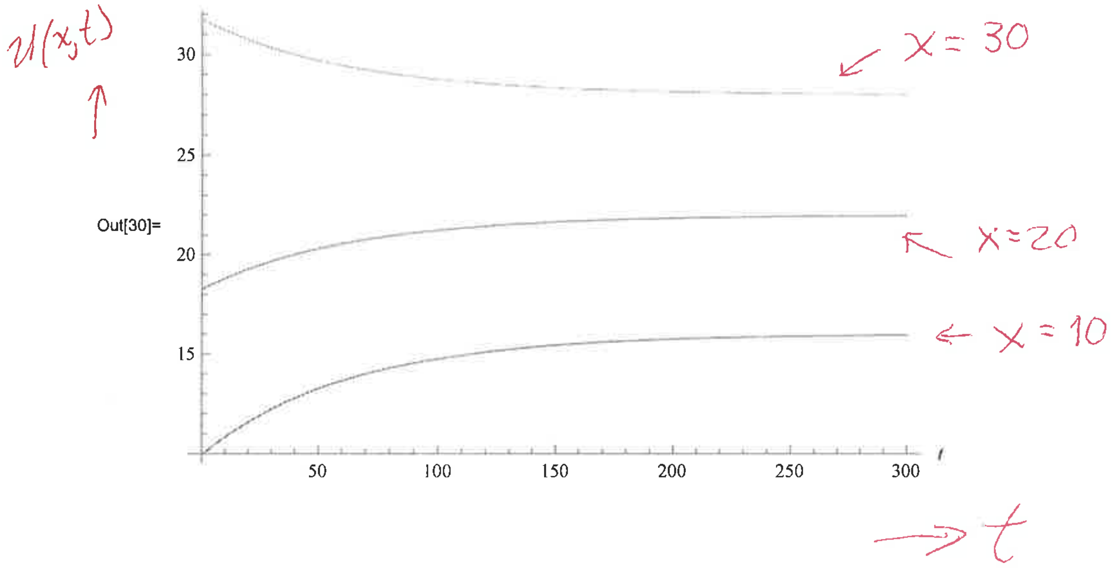
In[27]:= $\text{Plot}\left[\left\{x, \frac{3}{5}\,x + 10, \frac{3}{5}\,x + 10 - (20/\pi)\,\text{Sin}\left[\frac{1}{25}\,\pi\,x\right]\,e^{-\left(\frac{\pi}{25}\right)^{2} 20},\right.\right.$
$\left.\left.\frac{3}{5}\,x + 10 - (20/\pi)\,\text{Sin}\left[\frac{1}{25}\,\pi\,x\right]\,e^{-\left(\frac{\pi}{25}\right)^{2} 80}\right\}, \{x, 0, 50\}, \text{AxesLabel} \to \text{Automatic}\right]$

Out[27]=



In[30]:= $$\text{Plot}\left[\left\{\frac{3}{5}\,10+10-(20/\pi)\,\text{Sin}\left[\frac{1}{25}\,\pi\,10\right]\,e^{-\left(\frac{\pi}{25}\right)^2 t},\ \frac{3}{5}\,20+10-(20/\pi)\,\text{Sin}\left[\frac{1}{25}\,\pi\,20\right]\,e^{-\left(\frac{\pi}{25}\right)^2 t},\ \frac{3}{5}\,30+10-(20/\pi)\,\text{Sin}\left[\frac{1}{25}\,\pi\,30\right]\,e^{-\left(\frac{\pi}{25}\right)^2 t},\right\},\ \{t,\ 0.1,\ 300\},\ \text{AxesLabel}\to\text{Automatic}\right]$$

Out[30]=



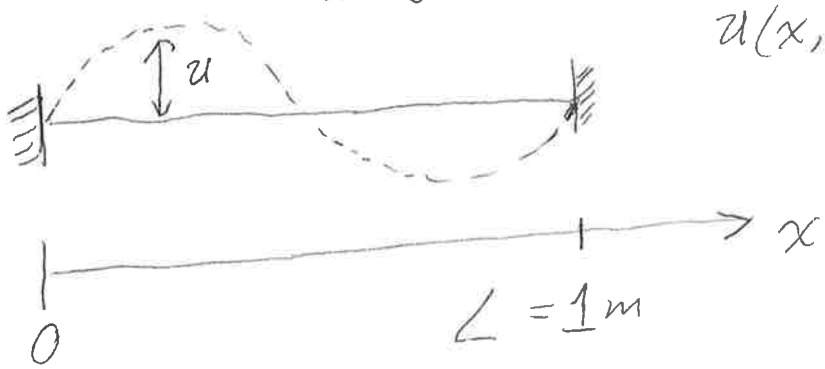
8) Considere uma corda elástica com 1m de comprimento cujas extremidades são mantidas fixas. A corda é colocada em movimento, sem velocidade inicial, de uma posição inicial:

$$f(x) = u(x,0) = \begin{cases} 4x & \text{se } 0 \le x \le 1/4 \\ 1 & \text{se } \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \\ 4(1-x) & \text{se } \frac{3}{4} \le x \le 1 \end{cases}$$

Encontre uma expressão para o deslocamento vertical de cada ponto da corda: $u(x,t)$. Considere a velocidade de propagação horizontal da onda $v = 1\,m/s$ e faça os gráficos "u vs. t" e "u vs. x" usando os primeiros somandos da solução para diferentes valores de x e t, respetivamente.

u significa deslocamento vertical $u(x,t)$.

Sol.:



Eq. Dif. em Derivadas Parciais

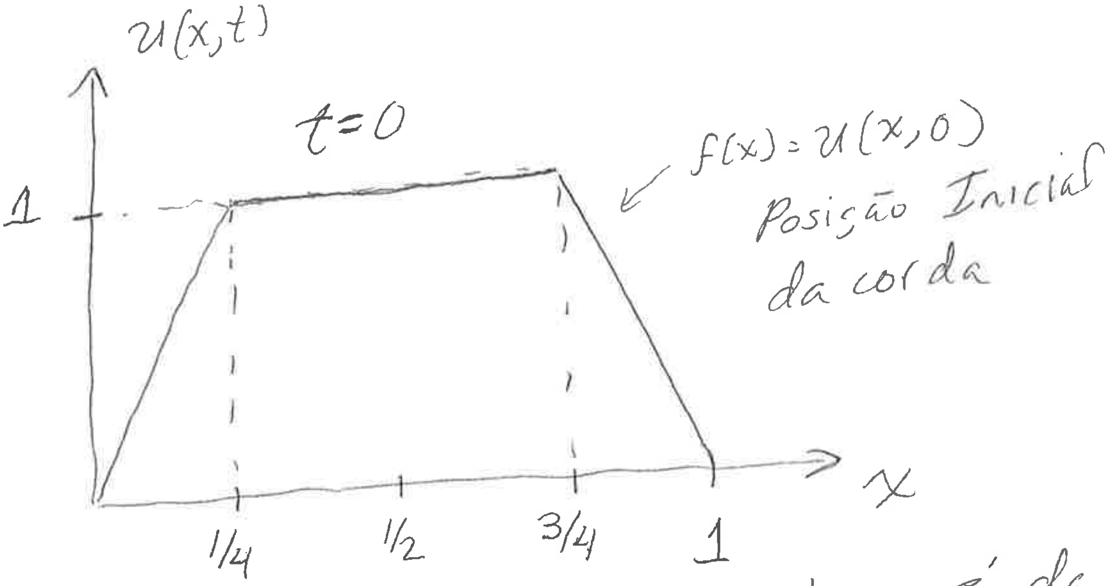
$$a^2 u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t), \quad t>0, \quad 0<x<1$$ ← Eq. de Ondas unidimensional espacialmente

$$0 = u(0,t) = u(1,t), \quad \forall t \ge 0$$ ← Condições de Contorno Homogêneas

$u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = 0$ ← Duas Condições Iniciais

1ra Condição Inicial

Segunda Condição Inicial
sem velocidade inicial em y.



A solução para esse tipo de problema é da forma

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(an\frac{\pi}{L}t\right) \quad \text{onde}$$

$$C_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx \quad , n\in\mathbb{N}$$

Vamos calcular C_n, a integral separa em três

$$C_n=\frac{2}{1}\left[\underbrace{\int_0^{1/4}4x\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{1}x\right)dx}+\underbrace{\int_{1/4}^{3/4}1\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{1}x\right)dx}+\underbrace{\int_{3/4}^{1}4(1-x)\operatorname{sen}(n\pi x)dx}\right]$$

$$C_n=2\left[\frac{-n\pi\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)+4\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n^2\pi^2}+\frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi}+\frac{n\pi\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right)+4\operatorname{sen}\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}{n^2\pi^2}\right]$$

$$\boxed{C_n=\frac{64}{n^2\pi^2}\left(3\cos\left(\frac{n\pi}{8}\right)+2\cos\left(\frac{3n\pi}{8}\right)+\cos\left(\frac{5n\pi}{8}\right)\right)\operatorname{sen}^3\left(\frac{n\pi}{8}\right)}$$

logo, a solução será $(a=1)$

$a=v=1\,m/s.$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{64}{n^2\pi^2}\left(3\cos\left(\frac{n\pi}{8}\right) + 2\cos\left(\frac{3n\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{5n\pi}{8}\right)\right)\operatorname{sen}^3\left(\frac{n\pi}{8}\right)}_{\text{só depende de } n} \cdot$$

$$\cdot\ \underbrace{\operatorname{sen}(n\pi x)}_{\text{oscila em } x}\underbrace{\cos(n\pi t)}_{\text{oscila em } t}$$

O primeiro termo do somatório é

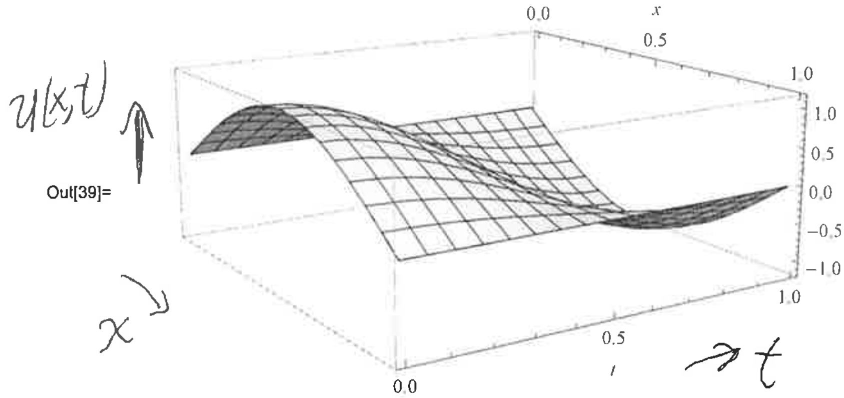
$$u_1(x,t) = \underbrace{\frac{64}{\pi^2}\left(3\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right)\operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{8}\right)}_{1,14632} \cdot$$

$$\cdot\ \operatorname{sen}(\pi x)\cos(\pi t)$$

$$u_1(x,t) \simeq 1,14632\ \operatorname{sen}(\pi x)\cos(\pi t)$$

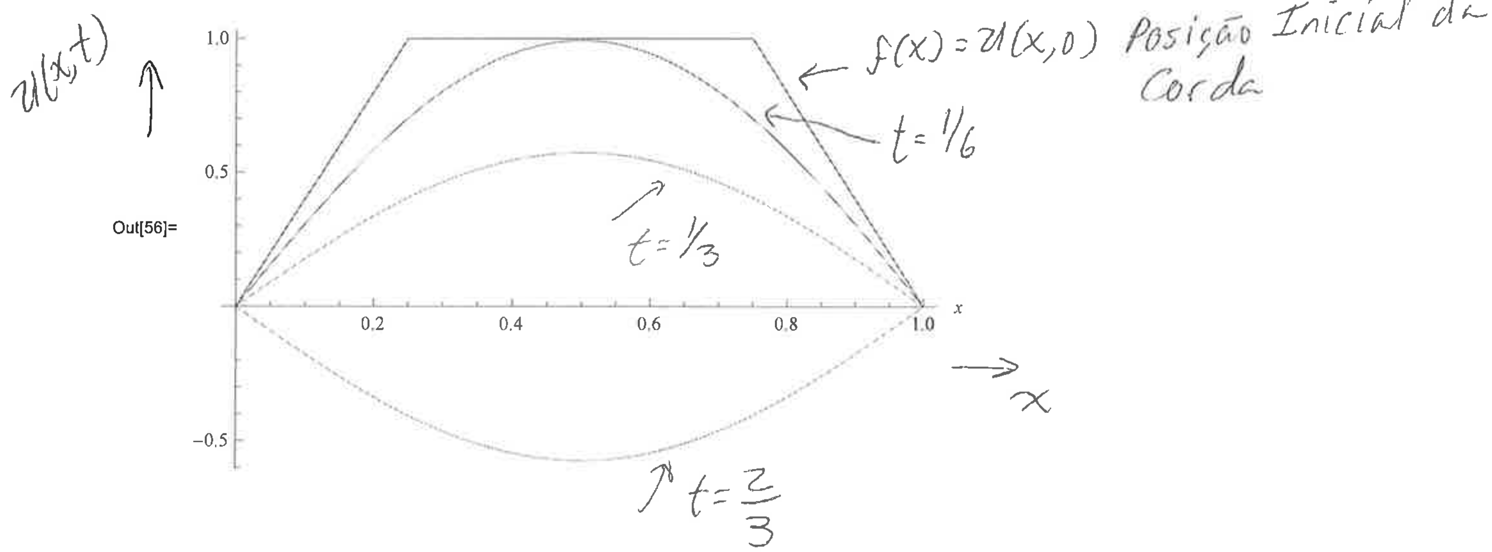
In[39]:= `Plot3D[1.14632 Sin[π x] Cos[π t], {x, 0, 1}, {t, 0, 1}, AxesLabel → Automatic]`

Out[39]=



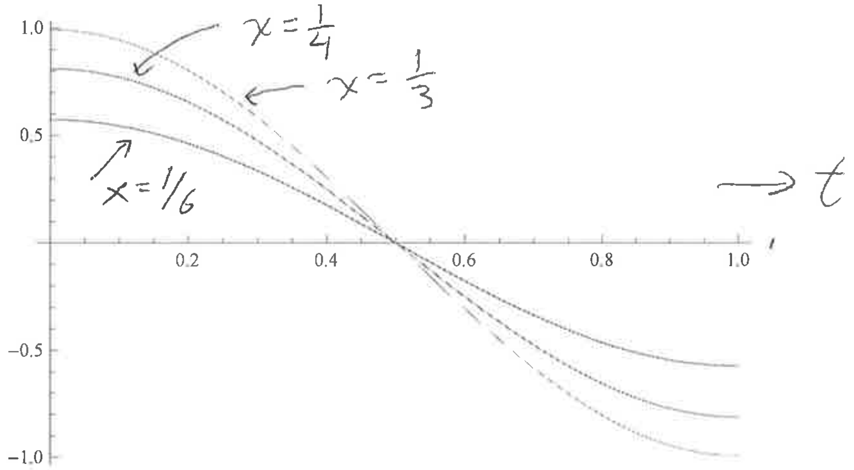
In[56]:= `Plot[{If[0 < x < 1/4, 4 x, If[1/4 < x < 3/4, 1, 4 (1 - x)]], 1.14632 Sin[π x] Cos[π 1/6], 1.14632 Sin[π x] Cos[π 1/3], 1.14632 Sin[π x] Cos[π 2/3]}, {x, 0, 1}, AxesLabel → Automatic]`

Out[56]=



In[59]:= $\text{Plot}\left[\left\{1.14632\,\text{Sin}\left[\pi\,\frac{1}{6}\right]\text{Cos}[\pi\,t],\ 1.14632\,\text{Sin}\left[\pi\,\frac{1}{4}\right]\text{Cos}[\pi\,t],\ 1.14632\,\text{Sin}\left[\pi\,\frac{1}{3}\right]\text{Cos}[\pi\,t]\right\},\ \{t, 0, 1\},\ \text{AxesLabel} \to \text{Automatic}\right]$

Out[59]=



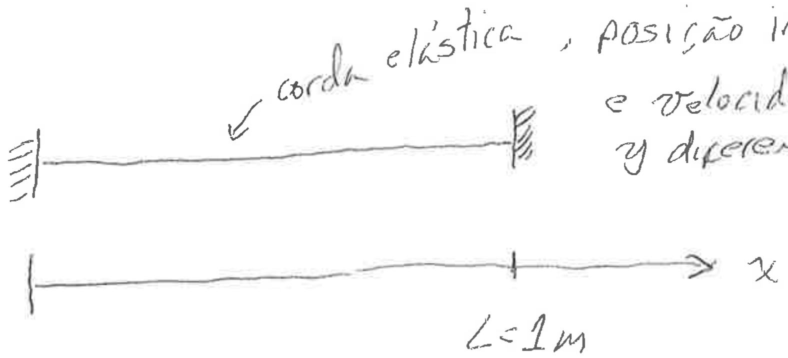
9) Considere uma corda elástica com 1m de comprimento cujas extremidades são mantidas fixas. A corda é colocada em movimento a partir da sua posição de equilíbrio, com velocidade inicial:

$$g(x) = u_t(x,0) = \begin{cases} 4x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 1 & \text{se } \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \\ 4(1-x) & \text{se } \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Encontre uma expressão para o deslocamento vertical de cada ponto da corda: $u(x,t)$. Considere a velocidade de propagação horizontal da onda $v = 1\,m/s$ e faça os gráficos "u vs. t" e "u vs. x" usando os primeiros somandos da solução para diferentes valores de x e t, respectivamente.

Sol.:

posição inicial zero $\forall x$ e velocidade inicial na direção y diferente de zero.



$$\left\{\begin{array}{l} a\, u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ \text{Eq. Dif. de Ondas (Em Derivadas Parciais)} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad \forall t > 0 \\ \text{Condições de Contorno Homogêneas} \\ \underbrace{u(x,0) = 0, \ \forall x, \ t=0}_{\text{Posição Inicial}} \qquad \underbrace{u_t(x,0) = g(x)}_{\text{velocidade inicial em } y \text{ diferente de zero}} \end{array}\right.$$

Condições Iniciais

A solução para este tipo de problema é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\operatorname{sen}\left(a\cdot n\frac{\pi}{L}t\right) \quad \text{onde}$$

$$a\cdot n\cdot\frac{\pi}{L}\cdot C_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx, \quad n\in\mathbb{N}$$

Temos $a=1$ e $L=1$, vamos calcular os C_n

$$C_n = \frac{2}{n\pi}\left[\int_0^1 g(x)\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx\right]$$

o intervalo entre zero e um separa em três

$$C_n = \frac{2}{n\pi}\underbrace{\left[\int_0^{1/4} 4x\operatorname{sen}(n\pi x)dx + \int_{1/4}^{3/4} 1\operatorname{sen}(n\pi x)dx + \int_{3/4}^{1} 4(1-x)\operatorname{sen}(n\pi x)dx\right]}_{\text{mesma integral do exercício 8.}}$$

$$C_n = \frac{64}{n^3\pi^3}\left(3\cos\left(\frac{n\pi}{8}\right)+2\cos\left(\frac{3n\pi}{8}\right)+\cos\left(\frac{5n\pi}{8}\right)\right)\operatorname{sen}^3\left(\frac{n\pi}{8}\right)$$

logo, a solução será

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{64}{n^3\pi^3}\left(3\cos\left(\frac{n\pi}{8}\right)+2\cos\left(\frac{3n\pi}{8}\right)+\cos\left(\frac{5n\pi}{8}\right)\right)\operatorname{sen}^3\left(\frac{n\pi}{8}\right)}_{\text{somente depende de } n} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}(n\pi x)}_{\text{oscila em } x}\,\underbrace{\operatorname{sen}(n\pi t)}_{\text{oscila em } t}$$

O primeiro termo do somatório é

$$u_1(x,t) = 0{,}364884 \cdot \operatorname{sen}(\pi x)\operatorname{sen}(\pi t)$$

O segundo é zero e o terceiro é

$$u_3(x,t) = 0{,}013514 \operatorname{sen}(3\pi x)\operatorname{sen}(3\pi t)$$

Logo, a aproximação até ordem 3 é

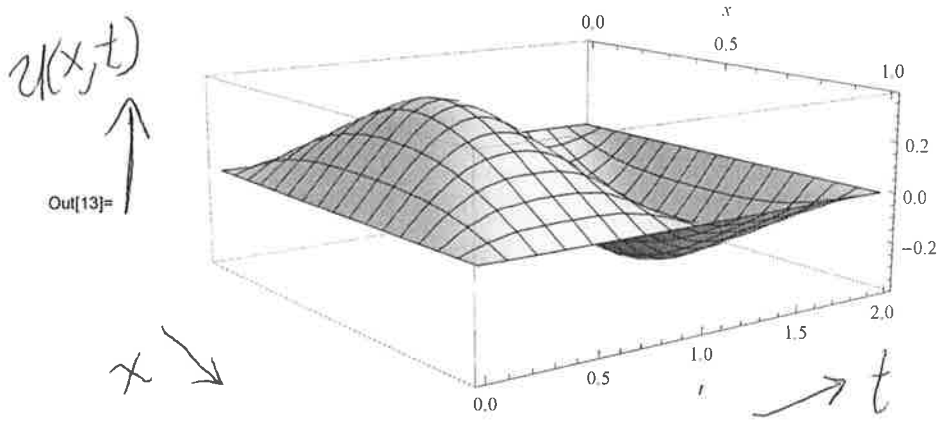
$$u(x,t) \approx 0{,}364884 \cdot \operatorname{sen}(\pi x)\operatorname{sen}(\pi t) + 0{,}013514 \operatorname{sen}(3\pi x)\operatorname{sen}(3\pi t)$$

Veja os gráficos a seguir

Aproximação até 3^a ordem.

```
In[13]:= Plot3D[0.364884 Sin[π x] Sin[π t] + 0.013514 Sin[3 π x] Sin[3 π t],
           {x, 0, 1}, {t, 0, 2}, AxesLabel → Automatic]
```

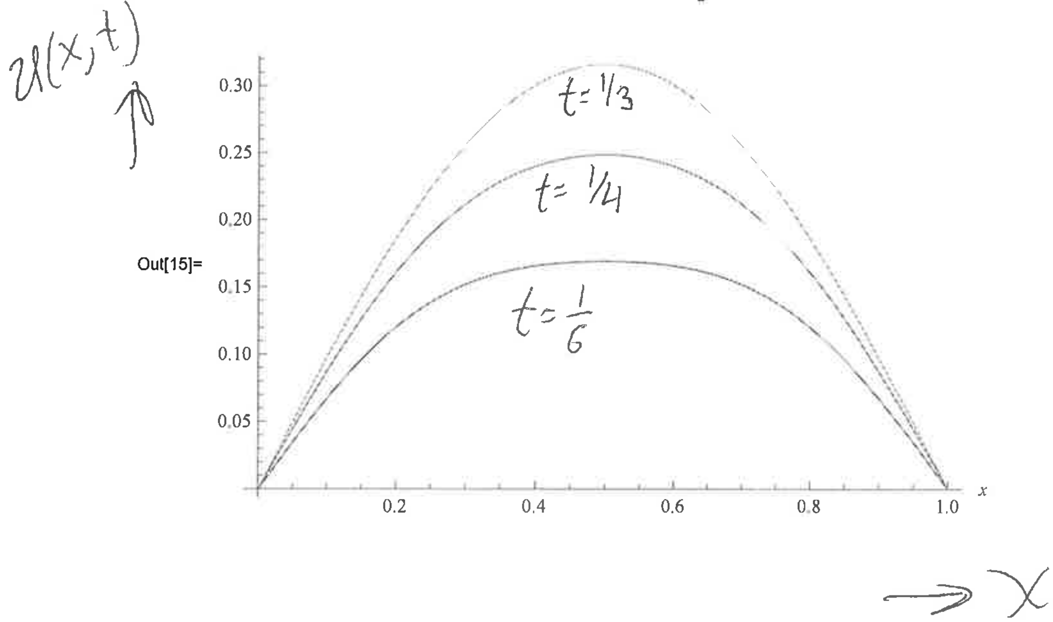
Out[13]=




```
In[15]:= Plot[{0.364884 Sin[π 1/6] ... }]
```

$$\text{In[15]:= Plot}\Big[\Big\{0.364884\ \text{Sin}[\pi\, x]\ \text{Sin}\Big[\pi \frac{1}{6}\Big] + 0.013514\ \text{Sin}[3\,\pi\, x]\ \text{Sin}\Big[3\,\pi \frac{1}{6}\Big],$$
$$0.364884\ \text{Sin}[\pi\, x]\ \text{Sin}\Big[\pi \frac{1}{4}\Big] + 0.013514\ \text{Sin}[3\,\pi\, x]\ \text{Sin}\Big[3\,\pi \frac{1}{4}\Big],$$
$$0.364884\ \text{Sin}[\pi\, x]\ \text{Sin}\Big[\pi \frac{1}{3}\Big] + 0.013514\ \text{Sin}[3\,\pi\, x]\ \text{Sin}\Big[3\,\pi \frac{1}{3}\Big]\Big\},$$
$$\{x, 0, 1\},\ \text{AxesLabel} \to \text{Automatic}\Big]$$

Out[15]=



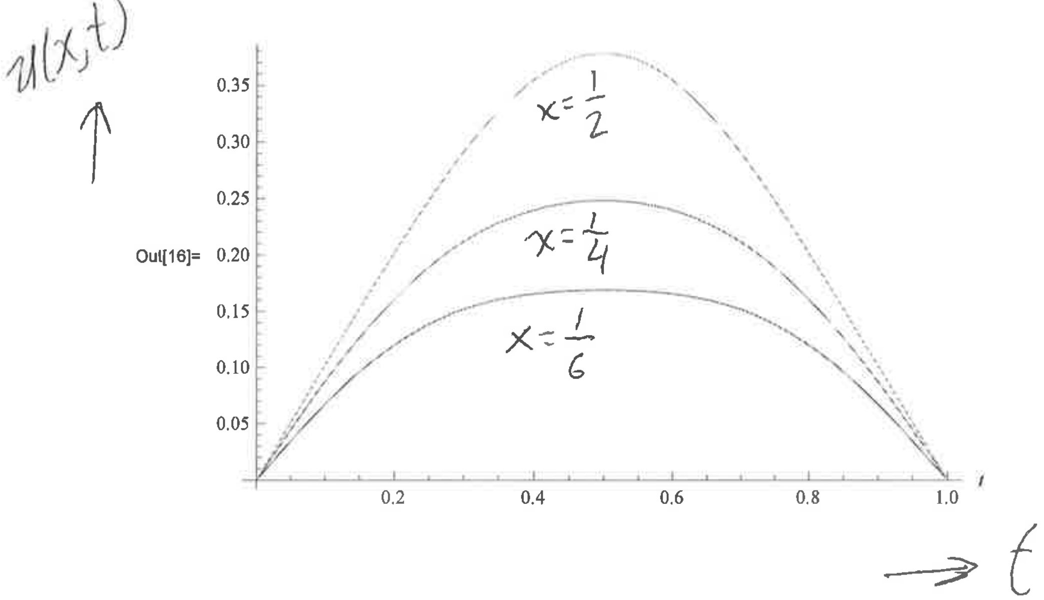
In[16]:= Plot$\left[\left\{0.364884\ \mathrm{Sin}\left[\pi \frac{1}{6}\right] \mathrm{Sin}[\pi\, t] + 0.013514\ \mathrm{Sin}\left[3\pi \frac{1}{6}\right] \mathrm{Sin}[3\pi\, t],\right.\right.$

$0.364884\ \mathrm{Sin}\left[\pi \frac{1}{4}\right] \mathrm{Sin}[\pi\, t] + 0.013514\ \mathrm{Sin}\left[3\pi \frac{1}{4}\right] \mathrm{Sin}[3\pi\, t],$

$\left.0.364884\ \mathrm{Sin}\left[\pi \frac{1}{2}\right] \mathrm{Sin}[\pi\, t] + 0.013514\ \mathrm{Sin}\left[3\pi \frac{1}{2}\right] \mathrm{Sin}[3\pi\, t]\right\},$

$\left.\{t, 0, 1\}, \mathrm{AxesLabel} \to \mathrm{Automatic}\right]$

Out[16]=



10) Encontre a solução $u(x,y)$ da equação diferencial em derivadas parciais de Laplace no retângulo $0<x<a$ e $0<y<b$, que satisfaz as condições de contorno:

$$u(0,y)=0 \;;\; u(a,y)=0 \quad \text{com} \quad 0<y<b$$
$$u(x,0)=h(x) \;;\; u(x,b)=0 \quad \text{com} \quad 0\leq x\leq a$$

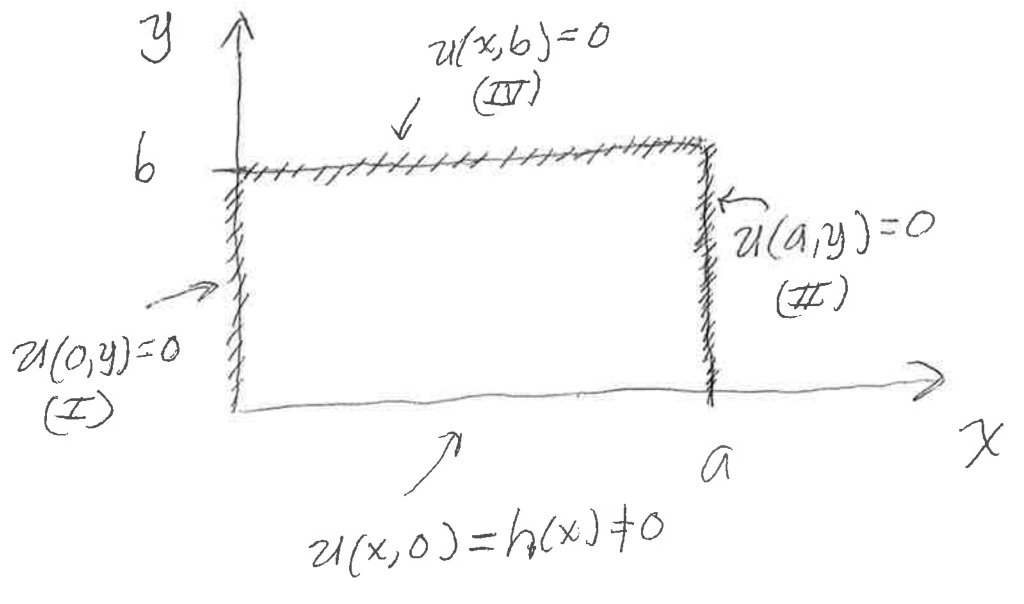
Sol.: A equação diferencial de Laplace é

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0 \qquad (2D)$$

As condições de fronteira são sobre a função sem derivar. É um problema do primeiro tipo, chamado de Dirichlet.

(I) $u(0,y)=0$, (II) $u(a,y)=0$ com $0<y<b$

(III) $u(x,0)=h(x)$, (IV) $u(x,b)=0$ com $0\leq x\leq a$



Usando o método de separação de variáveis ~~49~~ 50

propomos que exista uma solução na forma

$$u(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

Substituindo na Eq. de Laplace temos

$$\big(X(x)\,Y(y)\big)_{xx} + \big(X(x)\,Y(y)\big)_{yy} = 0$$

$$Y(y)\,X''(x) + X(x)\,Y''(y) = 0$$

Vamos simplificar a notação reescrevendo a eq. anterior

como

$$YX'' + XY'' = 0$$

$$YX'' = -XY''$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda \leftarrow \text{constante}$$

$$\frac{X''}{X} = \lambda \qquad -\frac{Y''}{Y} = \lambda$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$X'' = \lambda X \qquad Y'' = -\lambda Y$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\boxed{X'' - \lambda X = 0} \quad (\text{V}) \qquad \boxed{Y'' + \lambda Y = 0} \quad (\text{VI})$$

- Encontramos duas equações diferenciais ordinárias de 2da ordem acopladas pela constante λ. (51)

- Vamos estudar agora o efeito da proposta de existencia de uma solução em variáveis separas tem sobre as condições de contorno.

$$u(x,y) = X(x)\,Y(y)$$ ← Proposta de Solução em Variáveis Separadas

- Usando (I): $u(0,y)=0$ para $0<y<b$

$$u(0,y)=0=X(0)\,Y(y) \quad \text{para} \quad 0<y<b$$

Como procuramos soluções não triviais $Y(y)$ não pode se anular para todo y. Logo

$$Y(y)\neq 0 \quad e \quad \boxed{X(0)=0} \quad (VII)$$

- Usando (II): $u(a,y)=0$ para $0<y<b$

$$u(a,y)=0=X(a)\,Y(y) \quad \text{"}$$

Novamente $Y(y)=0$ leva a solução trivial, logo

$$Y(y)\neq 0 \quad e \quad \boxed{X(a)=0} \quad (VIII)$$

- Usando (IV): $u(x,b)=0$ com $0\leq x\leq a$

$$u(x,b)=0=X(x)\,Y(b)$$

$X(x)=0\ \forall x$ leva a solução trivial

logo $X(x)\neq 0$ e $\boxed{Y(b)=0}$ (IX)

- Com os resultados anteriores podemos escrever dois problemas de autovalores e autovetores:

(1)

(V) $X'' - \lambda X = 0$ eq. dif.

(VII) $X(0) = 0$ } restrições

(VIII) $X(a) = 0$ } duas

e

(2)

$Y'' + \lambda Y = 0$ (VI) Eq. Dif.

$Y(b) = 0$ (IX)

1 restrição

Vamos resolver primeiro (1)

trocando $X'' \to r^2$

$x \to 1$

temos a eq. caraterística

$$r^2 - \lambda = 0$$

(X) $\boxed{r^2 = \lambda}$

O problema (1) separa em três casos

i) $\lambda > 0 \Rightarrow \lambda = \mu^2, \ \mu > 0$

ii) $\lambda = 0$

iii) $\lambda < 0 \Rightarrow \lambda = -\mu^2, \ \mu > 0$

i) $X_{gh}(x) = C_1 \cosh(\mu x) + C_2 \operatorname{senh}(\mu x)$ (Tipo I)

Usando a primeira restrição: $X(0) = 0$

temos $X(0) = 0 = C_1 \underbrace{\cosh(0)}_{1} + C_2 \underbrace{\operatorname{senh}(0)}_{0}$

$$C_1 = 0$$

Usando a segunda restrição: $X(a) = 0$

$$X(a) = 0 = C_2 \operatorname{senh}(\mu a)$$

$C_2 \neq 0$ (para termos soluções não triviais) logo

$senh(\mu a) = 0$

mas o $senh(\theta)$ somente se anula em $\theta = 0$.

Com isto, não existem soluções não triviais neste caso

$C_2 = 0$

ii) $\lambda = 0$ e voltando em (X)

$r^2 = 0$ (tipo II)

$X_{gh}(x) = C_1 e^{0x} + C_2 x e^{0x}$

$X_{gh}(x) = C_1 + C_2 x$

Usando a primeira restrição (VII)

$X(0) = 0 = C_1 + C_2 \cdot 0 \Rightarrow C_1 = 0$

Usando a segunda restrição (VIII)

$X(a) = 0 = C_2 \cdot a \Rightarrow a \neq 0 \Rightarrow C_2 = 0$

Não existem soluções não triviais neste caso

iii) $\lambda < 0$ e voltando em (X)

$r^2 = -\mu^2$ (tipo III)

$X(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 sen(\mu x)$

Usando a primeira restrição (VII)

$X(0) = 0 = C_1 \underbrace{\cos(0)}_{1} + C_2 \overset{0}{\cancel{sen(0)}}$

$C_1 = 0$

Usando a segunda (VIII)

$X(a) = 0 = C_2 sen(\mu a)$ (XI)

$C_2 \neq 0$ e $sen(\mu a) = 0 \Rightarrow \mu a = n\pi, \; n \in \mathbb{N}$

$\mu = \frac{n\pi}{a} \Rightarrow \boxed{\lambda = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \text{ autovalores}}$

As autofunções correspondentes são

$$\boxed{X_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)} \quad (XII)$$

Agora vamos resolver o problema de autovalores e autovetores (2)

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y(b) = 0 \end{cases}$$

Já sabemos que $\lambda = -\mu^2 = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$

Logo, temos

$$Y'' - \mu^2 Y = 0$$

$r^2 - \mu^2 = 0$ Eq. Caraterística

$r^2 = \mu^2$ Tipo (I)

$$Y(y) = C_1 \cosh(\mu y) + C_2 \,\text{senh}(\mu y)$$

Usando a restrição $Y(b)=0$

$$Y(b) = 0 = C_1 \cosh(\mu b) + C_2 \,\text{senh}(\mu b)$$

$$C_1 \cosh(\mu b) = -C_2 \,\text{senh}(\mu b)$$

$$C_1 = -C_2 \tanh(\mu b)$$

Isto é, podemos dar um valor arbitrário a C_2 e encontraremos infinitas soluções para $Y(y)$.

$$Y(y) = \underbrace{-C_2 \tanh(\mu b)}_{C_1} \cosh(\mu y) + C_2 \,\text{senh}(\mu y)$$

Ignorando C_2 encontramos as autofunções para $Y(y)$.

$$\mu = \frac{n\pi}{a}$$

$$Y_n(y) = -\tanh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)\cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

Autofunções para $Y(y)$

Como $u(x,y) = X(x)\,Y(y)$ temos

$$u_n(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\left[\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right) - \tanh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)\cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\right]$$

Autofunções para $u(x,y)$.

A solução geral será uma combinação linear das autofunções:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\left[\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right) - \tanh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)\cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\right]$$

Resta usar a condição de contorno (III)

$$u(x,0) = h(x)$$

$$u(x,0) = h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\left[\underbrace{\operatorname{senh}(0)}_{0} - \tanh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)\underbrace{\cosh(0)}_{1}\right]$$

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(-C_n \tanh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)\right)}_{\text{coeficientes}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

- Mas, a expressão anterior é a série de Fourier em senos da função $h(x)$ com coeficientes $-C_n\tanh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)$

- Logo

$$-C_n \tanh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) = \frac{2}{a}\int_0^a h(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$$

$$C_n = \frac{-2}{a\tanh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)}\int_0^a h(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$$

Resumindo

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u(0,y) = 0 \ ; \ u(a,y) = 0 \quad \text{com} \quad 0 < y < b \\ u(x,0) = h(x) \ ; \ u(x,b) = 0 \quad \text{com} \quad 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

Tem como solução

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\left[\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right) - \tanh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)\cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\right]$$

onde

$$C_n = \frac{-2}{a\tanh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)} \int_0^a h(x) \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{a}x\right) dx$$