Universidade de São Paulo - Instituto de Física

Exercício Cinco

5 de dezembro de 2017

1 Exercício

Uma partícula de massa m, sob a ação da gravidade, escorrega no interior de um paraboloide de revolução liso, com eixo na vertical. Utilizando as coordenadas r, distância da partícula ao eixo vertical, e φ, ângulo azimutal, como coordenadas generalizadas determine:

(a) A lagrangiana do sistema.

(b) Os momentos generalizados.

(c) A equação de movimento para a coordenada r em função do tempo.

(d) Se $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = 0$ mostre que a partícula executa pequenas oscilações em torno do ponto mais baixo do parabolóide.

(e) Determine a frequência de pequenas oscilações em torno do ponto obtido no item anterior.

2 Resposta

(a): Sejam as coordenadas r e φ como as definidas no exercício, vamos considerar a equação de um parabolóide de revolução

$$x^2 + y^2 = z \tag{1}$$

que é um vínculo do problema, então nós teremos que

$$\begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \\ z = cr^2 \end{cases} \tag{2}$$

será a parametrização das coordenadas da massa m que escorrega no interior do parabolóide. Definimos a constante $c = 1$, de parametrização da parabola. Vamos escrever a lagrangiana do sistema utilizando como sempre que $\mathcal{L} = T - U$ de modo que teremos

$$\dot{x} = \dot{r}\cos(\varphi) - r\dot{\varphi}\sin(\varphi) \tag{3}$$

$$\dot{x}^2 = \dot{r}^2\cos^2(\varphi) - 2r\dot{r}\dot{\varphi}\sin(\phi)\cos(\phi) + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2(\varphi) \tag{4}$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin(\varphi) + r\dot{\varphi}\cos(\varphi) \tag{5}$$

$$\dot{y}^2 = \dot{r}^2\sin^2(\varphi) + 2r\dot{r}\dot{\varphi}\sin(\varphi)\cos(\varphi) + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2(\varphi) \tag{6}$$

$$\dot{z} = 2r\dot{r} \implies \dot{z}^2 = 4r^2\dot{r}^2 \tag{7}$$

Então nós teremos que

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + 4r^2\dot{r}^2 \tag{8}$$

E então a energia cinética relacionada à partícula será

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + 4r^2\dot{r}^2) \tag{9}$$

A energia potencial gravitacional da partícula será

$$U = mgz = mgr^2 \tag{10}$$

E portanto nós teremos a seguinte lagrangiana do sistema

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + 4r^2\dot{r}^2) - mgr^2 \tag{11}$$

(b): Vamos obter agora os momentos generalizados. Vamos ter que

$$p_r := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} + 4mr^2\dot{r} \tag{12}$$

e também

$$p_\varphi := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \tag{13}$$

(c): Vamos escrever a equação do movimento para a coordenada r.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 + 4mr\dot{r}^2 - 2mgr \tag{14}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} + 4mr^2\dot{r} \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r} + 4mr^2\ddot{r} + 8mr\dot{r}^2 \tag{16}$$

Portanto teremos a seguinte equação do movimento:

$$mr\dot{\varphi}^2 + 4mr\dot{r}^2 - 2mgr = m\ddot{r} + 4mr^2\ddot{r} + 8mr\dot{r}^2 \tag{17}$$

$$mr\dot{\varphi}^2 - 2mgr = m\ddot{r} + 4mr^2\ddot{r} + 4mr\dot{r}^2 \tag{18}$$

(d): Agora se supormos que $\dot{\varphi} = 0$ então a equação fica

$$-2mgr = m\ddot{r} + 4mr^2\ddot{r} + 4mr\dot{r}^2 \tag{19}$$

Nesse caso nós teremos que

$$\ddot{r} + 4r^2\ddot{r} + 4r\dot{r}^2 + 2gr = 0 \tag{20}$$

Se considerarmos apenas pequenas perturbações então os termos quadráticos vão se cancelar e teremos a equação

$$\ddot{r} + 2gr = 0 \implies \ddot{r} = -2gr \tag{21}$$

Donde nós teremos que

$$r(t) = A\cos(\sqrt{2g}t + B) \tag{22}$$

Onde A, B são constantes. Apenas para ficarmos com uma equação balanciada dimensionalmente nós restituimos a constante c nos cálculos (é uma constante proporcional ao inverso da distância)

$$r(t) = A\cos(\sqrt{2gc}t + B) \tag{23}$$

(e): A frequência de pequenas oscilações será simplesmente

$$\omega_0 := \sqrt{2gc} \tag{24}$$